

21世纪高等院校计算机辅助设计规划教材

ANSYS

基础与实例教程



附光盘

- 本书以理论与实例分析相结合的形式，系统地介绍了有限元法的基础理论与 ANSYS 的应用。
- 本书中诸多例题以操作过程为主线，力求做到深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。

张洪信 王怀敏 孟祥踪 等编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



013046930

0241.82-43
26

21 世纪高等院校计算机辅助设计规划教材

ANSYS 基础与实例教程

张洪信 王怀敏 孟祥踪 等编著



机械工业出版社



北航

C1652605

0 241.82-43
26

P

013042330

本书以理论与实例分析相结合的形式,系统地介绍了有限元法的基础理论与 ANSYS 的应用,另外,附录中给出了有限元法涉及的弹性力学基本知识。

本书以矩阵分析法阐述有限元法的基本思想和分析步骤,只要接触过材料力学的读者皆可轻松入门。首先对有限元法基础理论进行了提炼总结。然后结合作者的研究经历和实践经验,考虑解决实际问题的需求,举例说明了 ANSYS 在连接板、轴类零件、圆柱齿轮等结构件建模,连杆、孔应力集中的结构线性静力分析,机翼模态、汽车悬架系统谐振响应的动力学分析,矿石对车厢的冲击、圆盘塑性变形、销与销孔接触分析等非线性分析,桁架轻量化及拓扑优化等方面的具体应用方法。最后给出用 ANSYS 进行发动机连杆优化设计和曲轴动力分析的操作实例。

本书可作为土木、水利、机械等工科专业本科生及研究生教材,也可以作为工程设计人员的参考用书。

本书附带学习光盘,包含本书实例操作视频文件。本书配有电子教案,需要的教师可登录 www.cmpedu.com 免费注册、审核通过后下载,或联系编辑索取(QQ: 2399929378, 电话: 010-88379753)。

图书在版编目(CIP)数据

ANSYS 基础与实例教程/张洪信,王怀敏,孟祥踪等编著. —北京:机械工业出版社,2013.6

21 世纪高等院校计算机辅助设计规划教材

ISBN 978-7-111-41818-4

I. ①A… II. ①张… ②王… ③孟… III. ①有限元分析-应用程序-高等学校-教材 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 049586 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:和庆娣 李 宁

责任印制:张 楠

中国农业出版社印刷厂印刷

2013 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷

184mm×260mm·20.25 印张·502 千字

0001-3000 册

标准书号:ISBN 978-7-111-41818-4

ISBN 978-7-89433-947-8 (光盘)

定价:49.90 元(含 1CD)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售一部:(010)68326294

机工官网:<http://www.cmpbook.com>

销售二部:(010)88379649

机工官博:<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书坚持理论与实践紧密结合的原则,将有限元理论与 ANSYS 操作结合在一起,以期有助于促进有限元理论与 ANSYS 学习、应用与普及推广。

有限元法是当前工程技术领域最常用、最有效的数值方法,已成为现代工程设计技术不可或缺的重要组成部分。ANSYS 软件是融结构、流体、电场、磁场、声场及热传导等领域静力学、动力学及边界耦合问题分析于一体的大型通用有限元分析软件,由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发,它能与多数 CAD 软件(如 Pro/Engineer、UG、NASTRAN、I-DEAS、AutoCAD)及机械仿真软件(如 ADAMS)接口,实现数据的共享和交换,是现代产品设计中的高级 CAE 工具之一。

本书集编者多年从事本科生、研究生教学与科研经验,编写时力求深入浅出、概念清晰、思路简明、系统性强。本书以 ANSYS 13.0 软件为主,兼顾其他版本;为了能够和其他参考资料相互印证,便于学习 ANSYS,书中诸多例题以操作过程为主线,有的采用公制单位,有的采用英制单位,尽管 ANSYS 程序中并不特别强调物理量的单位,还是需要特别指出的是一个分析过程中英制和公制单位不可混用!

本书依次介绍了结构静力学问题、结构动力学问题、结构非线性问题分析的有限元法及 ANSYS 操作步骤。第 1 章对有限元法及 ANSYS 分析进行了全面概述,以便总体把握其中要点;第 2 章介绍了有限元法的基础知识及应用,涉及结构静力学、结构动力学、结构非线性等问题的有限元法理论;第 3~7 章主要讲述了 ANSYS 操作,第 3 章介绍了 ANSYS 建模,连接板、轴类零件、圆柱齿轮等建模过程实例操作;第 4 章介绍了结构线性静力分析过程,连杆受力分析、板中圆孔应力集中分析等实例操作;第 5 章介绍了动力学分析过程,机翼模态分析、汽车悬架系统的谐响应分析等实例操作;第 6 章介绍了非线性分析过程,装载时矿石对车厢的冲击非线性分析、圆盘塑性变形分析、销与销孔接触分析等实例操作;第 7 章介绍了机械结构的优化设计;第 8 章介绍了用 ANSYS 进行发动机连杆优化设计和曲轴负荷分析的操作实例,具有重要的实际意义。书后附录还提供了弹性力学的常用量和单位。

本书主要由张洪信、王怀敏、孟祥踪编写,参加编写工作的还有管殿柱、李文秋、宋一兵、王献红、谈世哲、杨德平、褚忠、穆秀春。

由于作者水平有限,书中难免存在疏漏和不足,欢迎广大读者批评指正。

编 者

精品教材推荐目录

序号	书号	书名	作者	定价	配套资源
1	978-7-111-32764-6	AutoCAD 2011 中文版机械制图教程	朱维克	36.00	电子教案
2	978-7-111-32823-0	AutoCAD 2011 中文版机械设计实例教程 (第2版)	张永茂	36.00	
3	978-7-111-28305-8	AutoCAD 2010 中文版机械制图教程	朱维克	31.00	电子教案 素材文件
4	978-7-111-39799-1	AutoCAD 2012 建筑制图	赵景伟	45.00	光盘、素材 教学视频
5	978-7-111-32799-8	AutoCAD 2011 中文版建筑制图教程	曹磊	32.00	电子教案 素材文件
6	978-7-111-34837-5	AutoCAD 2011 及天正建筑 8.2 应用教程	曹磊 刘瑞新	39.00	电子教案
7	978-7-111-39683-3	AutoCAD 2012 室内装潢设计	段辉	45.00	光盘、素材 教学视频
8	978-7-111-40440-8	AutoCAD 2013 工程制图 (第4版)	江洪	39.00	电子教案 素材文件
9	978-7-111-12940-0	AutoCAD 2008 实用教程 (第3版)	邹玉堂 路慧彪	30.00	电子教案
10	978-7-111-22244-6	AutoCAD 2008 中文版应用教程	孙士保	28.00	电子教案
11	978-7-111-20079-9	AutoCAD 2007 中文版应用教程	周健	22.00	电子教案
12	978-7-111-14802-9	AutoCAD 2004 中文版应用教程	刘瑞新	25.00	电子教案
13	978-7-111-37142-7	Solidworks 2011 基础教程 (第4版)	江洪	43.00	光盘、素材 教学视频
14	978-7-111-28269-3	SolidWorks 2009 三维设计及应用教程 (第2版)	曹茹	36.00	光盘、素材 电子教案
15	978-7-111-32398-3	Pro/ENGINEER 5.0 基础教程	江洪	39.00	光盘、素材 教学视频
16	978-7-111-31505-6	UG NX 7.0 基础教程 (第4版)	江洪	36.00	光盘、素材 教学视频
17	978-7-111-40030-1	UG NX 8.0 模具设计教程	高玉新	45.00	光盘 素材文件
18	978-7-111-17788-6	CATIA 基础教程	江洪	28.00	电子教案
19	978-7-111-41023-2	MATLAB 基础教程	杨德平	45.00	电子教案
20	978-7-111-34379-0	MATLAB 基础与实践教程	刘超	47.00	光盘 素材文件



北航

C1652605

检
10

目 录

前言

第1章 有限元法与 ANSYS 入门	1
1.1 有限元法与 ANSYS 的发展	1
1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤	3
1.2.1 矩阵分析法	3
1.2.2 有限元法分析的一般步骤	9
1.3 ANSYS 基本操作	10
1.3.1 ANSYS 安装	10
1.3.2 ANSYS 启动、用户界面及退出	11
1.3.3 ANSYS 操作方式	13
1.3.4 ANSYS 典型分析过程	14
1.3.5 ANSYS 文件管理及日志文件使用	18
1.4 本章小结	19
1.5 思考与练习	20
第2章 有限元法基础理论	21
2.1 结构静力学问题的有限元法	21
2.1.1 平面问题有限元法	21
2.1.2 轴对称问题有限元法	30
2.1.3 空间问题有限元法	32
2.1.4 等参数有限元方法	35
2.1.5 单元与整体分析	39
2.2 结构动力学问题有限元法	41
2.2.1 运动方程	42
2.2.2 质量矩阵	42
2.2.3 阻尼矩阵	44
2.2.4 结构自振频率与振型	45
2.2.5 振型叠加法求解结构的受迫振动	47
2.3 结构非线性有限元法	48
2.3.1 塑性力学问题	49
2.3.2 大位移问题	57
2.4 本章小结	58
2.5 思考与练习	59

第3章 ANSYS 建模	61
3.1 建模基础	61
3.1.1 模型生成	61
3.1.2 坐标系统	62
3.1.3 工作平面	64
3.1.4 实体模型	65
3.1.5 有限元模型	66
3.2 建立复杂有限元模型	69
3.3 连接板建模实例	70
3.4 轴类零件建模实例	76
3.4.1 自底向上建模	77
3.4.2 自顶向下建模	83
3.5 圆柱齿轮建模实例	85
3.6 本章小结	93
3.7 思考与练习	93
第4章 结构线性静力分析	95
4.1 结构静力分析过程与步骤	95
4.1.1 建立模型	95
4.1.2 施加载荷并求解	95
4.1.3 检查结果	97
4.2 连杆受力分析实例	99
4.3 圆孔应力集中分析实例	112
4.4 本章小结	119
4.5 思考与练习	119
第5章 动力学分析	121
5.1 动力学分析的过程与步骤	121
5.1.1 模态分析	121
5.1.2 谐响应分析	125
5.1.3 瞬态动力学分析	129
5.2 机翼模态分析实例	134
5.3 汽车悬架系统的谐响应分析实例	144
5.4 本章小结	154
5.5 思考与练习	154
第6章 非线性分析	156
6.1 基本概念	156
6.2 非线性分析的过程与步骤	159
6.2.1 建模	160
6.2.2 加载求解	160
6.2.3 查看结果	163

6.3	装载时矿石对车厢的冲击非线性分析实例	165
6.4	圆盘塑性变形分析实例	179
6.5	销与销孔接触分析实例	194
6.6	本章小结	208
6.7	思考与练习	209
第7章	优化设计	210
7.1	结构优化设计	210
7.1.1	优化设计的相关概念	210
7.1.2	优化设计的过程与步骤	212
7.1.3	简支梁优化设计实例	218
7.1.4	桁架轻型化优化设计实例	226
7.2	拓扑优化技术	237
7.2.1	拓扑优化介绍	237
7.2.2	拓扑优化步骤	237
7.2.3	梁结构拓扑优化实例	238
7.3	本章小结	248
7.4	思考与练习	249
第8章	ANSYS 分析综合实例	250
8.1	三缸发动机连杆优化设计	250
8.1.1	连杆优化设计模型	251
8.1.2	优化设计操作步骤	253
8.2	三缸发动机曲轴负荷分析	287
8.2.1	分析说明	287
8.2.2	分析步骤	288
附录	ANSYS 程序中常用量和单位	315
参考文献		317

第1章 有限元法与 ANSYS 入门

计算机辅助工程 (Computer Aided Engineering, CAE), 指工程设计中的分析计算与仿真。CAE 软件可分为专用和通用两类, 专用软件主要是针对特定类型的工程或产品用于产品性能分析、预测和优化的软件。它们以在某个领域中的应用深入而见长, 如美国 ETA 公司的汽车专用 CAE 软件 LS-DYNA3D 及 ETA/FEMB 等。通用软件可对多种类型的工程和产品的物理力学性能进行分析、模拟、预测、评价和优化, 以实现产品技术创新。它以覆盖的应用范围广而著称, 如 ANSYS、PATRAN、NASTRAN 和 MSC. Marc 等。

目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有有限元法 (Finite Element Method, FEM)、边界元法 (Boundary Element Method, BEM) 和有限差分法 (Finite Difference Method, FDM) 等, 但就其实用性和应用的广泛性而言, 主要还是有限元法。作为一种离散化的数值解法, 有限元法首先在结构分析中, 然后又在其他领域中得到广泛应用。

本章重点

- 有限元法与 ANSYS 软件的起源与发展
- 矩阵分析法分析杆件结构的过程与步骤
- ANSYS 软件界面组成及分析问题的步骤

1.1 有限元法与 ANSYS 的发展

离散化的思想可以追溯到 20 世纪 40 年代。1941 年, A. Hrennikoff 首次提出用离散元素法求解弹性力学问题, 当时仅限于用杆系结构来构造离散模型, 但能很好地说明有限元的思想。如果原结构是杆系, 这种方法的解是精确的, 发展到现在就是大家熟知的矩阵分析法。究其实质这还不能说就是有限元法的思想, 但结合以后的有限元理论, 统称为广义有限元法。1943 年, R. Courant 在求解扭转问题时为了表征翘曲函数而将截面分成若干三角形区域, 在各三角形区域设定一个线性的翘曲函数, 这实质上就是有限元法的基本思想 (对里兹法的推广), 这一思想真正用于工程中是在电子计算机出现后。

20 世纪 50 年代因航空工业的需要, 美国波音公司的专家首次采用三节点三角形单元, 将矩阵位移法用到平面问题上。同时, 德国斯图加特大学的 J. H. Argyris 教授发表了一组能量原理与矩阵分析的论文, 为这一方法的理论基础做出了杰出贡献。1960 年, 美国的 R. W. Clough 教授在一篇题为“平面应力分析的有限元法”的论文中首先使用“有限元法 (the Finite Element Method)”一词, 此后这一名称得到广泛认可。

20 世纪 60 年代, 有限元法发展迅速, 除力学界外, 许多数学家也参与了这一工作, 奠定了有限元法的理论基础, 搞清了有限元法与变分法之间的关系, 发展了各种各样的单元模式, 扩大了有限元法的应用范围。

20 世纪 70 年代以来,有限元法进一步得到蓬勃发展,其应用范围扩展到几乎所有工程领域,成为连续介质问题数值解法中最活跃的分支。由变分法有限元扩展到加权残数法与能量平衡法有限元,由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定性问题、动力问题和波动问题,由线性问题扩展到非线性问题,分析的对象从弹性材料扩展到塑性、粘弹性、粘塑性和复合材料等,由结构分析扩展到结构优化乃至设计自动化,从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学等领域。它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解。

有限元法的基本思想是将物体(即连续的求解域)离散成有限个且按一定方式相互连接在一起的单元的组合,来模拟或逼近原来的物体,从而将一个连续的无限自由度问题简化为离散的有限自由度问题求解的一种数值分析法。物体被离散后,通过对其中各个单元进行单元分析,最终得到对整个物体的分析。网格划分中每一个小的块体称为单元。确定单元形状、单元之间相互连接的点称为节点。单元上节点处的结构内力为节点力,外力(有集中力、分布力等)为节点荷载。

数值模拟技术通过计算机程序在工程中得到广泛的应用。20 世纪 80 年代初期,国际上较大型的面向工程的有限元通用程序达到几百种,其中著名的有 ANSYS、NASTRAN、ABAQUS、ASKA、ADINA、SAP 与 Cosmos 等,它们的功能越来越完善,不仅包含多种条件下的有限元分析程序,而且带有功能强大的前处理和后处理程序。由于有限元通用程序使用方便、计算精度高,计算结果已成为各类工业产品设计和性能分析的可靠依据。大型通用有限元分析软件不断吸取计算方法和计算机技术的最新进展,将有限元分析、计算机图形学和优化技术相结合,已成为解决现代工程学问题必不可少的有力工具。

ANSYS 软件是融结构、流体、电场、磁场、声场和耦合场分析于一体的大型通用有限元分析软件,由世界上最大的有限元分析软件公司之一的美国 ANSYS 公司开发,它能与多数 CAD 软件接口,实现数据的共享和交换,如 Pro/Engineer、UG、I-DEAS、CADDSS 及 AutoCAD 等,是现代产品设计中的高级 CAE 工具之一。

ANSYS 公司成立于 1970 年,总部位于美国宾夕法尼亚州的匹兹堡,致力于 CAE 技术的研究和发展。ANSYS 软件的创始人是美国匹兹堡大学力学系教授、著名有限元权威 John Swanson 博士。如今,ANSYS 软件已经成功地应用于世界工业的各个领域,如航空航天、汽车工业、生物医学、土木工程、电子产品、造船等一般工业及科学研究。ANSYS 软件是一个功能强大、应用灵活的设计分析及优化软件包,可以浮动运行于个人计算机、工作站和巨型计算机及操作系统。

ANSYS 公司发布的 ANSYS 13.0 在 CAE 功能上引领现代产品研发科技,涉及高级分析、网格划分、优化、多物理场和多体动力学。立足于拥有世界上最多的用户,ANSYS 13.0 不仅为当前的商业应用提供了新技术,而且在以下方面取得了显著进步:

- 继续开发和提供世界一流的求解器技术。
- 提供了针对复杂仿真的多物理场耦合解决方法。
- 整合了 ANSYS 的网格技术并产生统一的网格环境。
- 通过对先进的软硬件平台的支持来实现对大规模问题的高效求解。
- 继续改进最好的 CAE 集成环境——ANSYS Workbench。
- 继续融合先进的计算流体动力学技术。

- 功能更为强大的显式动力学分析模块 ANSYS/LS - DYNA。
- 加速多步求解：ANSYS VT 加速器，基于 ANSYS 变分技术，它是通过减少迭代总步数以加速多步分析的数学方法。
- 网格变形和优化：对于很多单位，进行优化分析的最大障碍是 CAD 模型不能重新生成，特征参数不能反映那些修改研究的几何改变。

1.2 矩阵分析法及有限元法分析的一般步骤

矩阵分析法适用于由连杆或梁等单元组成的杆件结构，它是一种具有朴素的有限元思想的非连续介质的力学分析方法。下面以此为例说明有限元分析的一般步骤。

1.2.1 矩阵分析法

杆件结构的矩阵分析法从广义上说，可以包含在有限元法中，并且可以比较形象地说明有限元法的概念，在实际工程中也有很大的应用价值。

1. 水平杆单元刚度矩阵

如图 1-1 所示的桁架，杆的两端都可以产生位移。为了循序渐进，先研究水平杆 ij ，如图 1-2 所示。

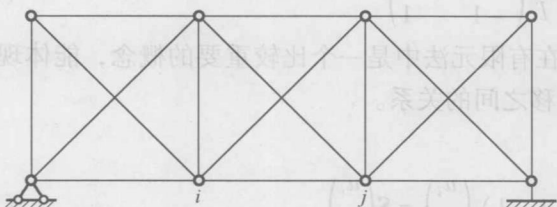


图 1-1 桁架

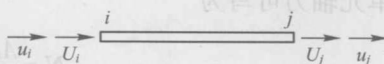


图 1-2 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平节点位移 u_i 和 u_j ，即具有两个自由度。两端节点力分别为 U_i 和 U_j 。

杆的受力情况可分解为两种状态。

1) 状态一： $u_i = u_i$ ， $u_j = 0$ 。这时，节点 j 被固定。

单元应变： $\varepsilon = -\frac{u_i}{l}$ 。

单元应力： $\sigma = E\varepsilon = -\frac{Eu_i}{l}$ 。

材料力学中以拉应力为正，而有限元法中，以向右的节点力为正，所以下式中加一负号。

单元左端节点力： $U_i = -A\sigma = \frac{AE}{l}u_i$ 。

单元右端节点力： $U_j = A\sigma = -\frac{AE}{l}u_i$ 。

2) 状态二： $u_i = 0$ ， $u_j = u_j$ 。这种状态与状态一正好相反。

$$\text{单元应变: } \varepsilon = \frac{u_j}{l}。$$

$$\text{单元应力: } \sigma = \frac{Eu_j}{l}。$$

$$\text{单元左端节点力: } U_i = -A\sigma = -\frac{AE}{l}u_j。$$

$$\text{单元右端节点力: } U_j = A\sigma = \frac{AE}{l}u_j。$$

把以上两种状态的结果叠加起来, 得到左、右两端都可变位情况下单元节点力为

$$U_i = \frac{AE}{l}u_i - \frac{AE}{l}u_j$$

$$U_j = -\frac{AE}{l}u_i + \frac{AE}{l}u_j$$

写成矩阵形式得到

$$\begin{pmatrix} U_i \\ U_j \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \mathbf{K}^e \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

其中,

$$\mathbf{K}^e = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

式 (1-2) 称为单元刚度矩阵。刚度矩阵在有限元法中是一个比较重要的概念, 能体现出任何一个自由度方向的节点力与所有节点位移之间的关系。

单元轴力可写为

$$\mathbf{N} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

其中,

$$\mathbf{S} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

在杆件结构中, 通常以轴力作为广义应力, 因此矩阵 $\mathbf{S}$ 称为单元应力矩阵。

实际, 在节点 i 和 j , 除了水平位移外, 还可产生垂直位移 (但在小变形条件下, 垂直节点位移对铰接杆的内力无影响)。引入垂直节点位移 v_i 、 v_j 和垂直节点力 V_i 、 V_j , 把单元刚度矩阵扩展为 4 阶形式, 单元节点力为

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{pmatrix} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

或

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e \quad (1-6)$$

式中, $\mathbf{F}^e = (U_i \ V_i \ U_j \ V_j)^T$ 为节点力; $\boldsymbol{\delta}^e = (u_i \ v_i \ u_j \ v_j)^T$ 为节点位移。

单元刚度矩阵为

$$K^e = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

单元轴力为

$$N = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} = S \delta^e \quad (1-8)$$

2. 倾斜杆单元刚度矩阵

如图 1-3 所示, 局部坐标 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 与整体坐标 x 、 y 之间的位移 $\bar{\delta}$ 与 δ 之间存在如下变换关系。

$$\bar{\delta} = \lambda \delta \quad (1-9)$$

式中, 转换矩阵

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

为正交矩阵, 其中 $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$ 。

局部坐标系中节点力 $\bar{F} = (\bar{U}_i \bar{V}_i \bar{U}_j \bar{V}_j)^T$ 与整体坐标系中的节点力 $F = (U_i V_i U_j V_j)^T$ 之间的关系为

$$\bar{F} = \lambda F \quad (1-10)$$

局部坐标系中的节点力为

$$\bar{F} = \bar{K}^e \bar{\delta} \quad (1-11)$$

局部坐标系中的刚度矩阵 $\bar{K}^e$ 见式 (1-7)。

将式 (1-9) 和式 (1-10) 代入式 (1-11), 得

$$F = \lambda^{-1} \bar{K}^e \lambda \delta$$

或记为

$$F = K^e \delta \quad (1-12)$$

式 (1-12) 反映了单元节点位移与单元节点力的关系, 称为单元刚度方程。其中, $K^e = \lambda^{-1} \bar{K}^e \lambda$, 为整体坐标系中的单元刚度矩阵, 即

$$K^e = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

并将式 (1-12) 记为

$$\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

式中, i 点节点力 $F_i = (U_i \ V_i)^T$; j 点节点力 $F_j = (U_j \ V_j)^T$; i 点节点位移 $\delta_i = (u_i \ v_i)^T$; j 点节点位移 $\delta_j = (u_j \ v_j)^T$; $K_{ii} = K_{jj} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$; $K_{ij} = K_{ji} = -K_{ii}$ 。刚度系数 K_{ij} 的意义是节点 j 的单位节点位移在节点 i 上产生的节点力, 其余类推。

3. 节点平衡方程与整体刚度矩阵

从一个桁架中取一节点 i , 如图 1-4a 所示。设环绕该点有 3 个单元, 即 ij 、 im 、 ip 。该节点承受的水平荷载和垂直荷载分别为 X_i 和 Y_i , 即节点 i 的荷载 $P_i = (X_i \ Y_i)^T$ 。

根据力的平衡, 作用于杆单元的节点力与作用于节点的节点力, 其大小相等, 方向相反。以杆 ij 为例, 作用于杆单元的节点力是 $(U_{ij} \ V_{ij})^T$, 而作用于节点 i 的节点力是 $(-U_{ij} \ -V_{ij})^T$ 。将节点脱离出来, 受力分析如图 1-4b 所示。在水平和垂直方向的节点受力平衡方程为

$$\begin{cases} X_i - U_{ij} - U_{im} - U_{ip} = 0 \\ Y_i - V_{ij} - V_{im} - V_{ip} = 0 \end{cases} \quad (1-15)$$

由式 (1-14) 知道杆单元 ij 在节点 i 的节点力为

$$F_{ij} = \begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{Bmatrix} = K_{ii}\delta_i + K_{ij}\delta_j \quad (1-16)$$

其他单元施于节点 i 的节点力同样可以写出, 一起代入式 (1-15), 得到

$$\left(\sum_e K_{ii} \right) \delta_i + K_{ij}\delta_j + K_{im}\delta_m + K_{ip}\delta_p = P_i \quad (1-17)$$

每个节点都有一对平衡方程如上, 对于全部节点 $i = 1, 2, \dots, N$ 的结构, 得到 $2N$ 阶线性方程组, 即结构的节点平衡方程组

$$K\delta = P \quad (1-18)$$

其中,

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)^T$$

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_N)^T$$

式中, δ 为全部节点位移组成的列阵; P 为全部节点荷载组成的列阵; K 为结构的整体刚度矩阵。

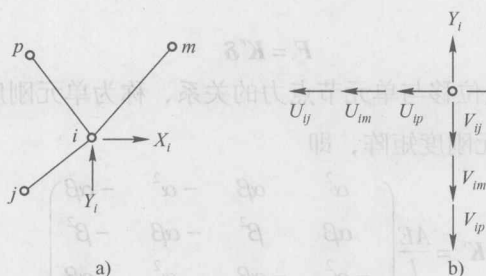


图 1-4 节点 i 的平衡

4. 总体刚度矩阵的合成

由单元刚度矩阵合成结构的整体刚度矩阵通常采用两种方法，一种为编码法，一种为大域变换矩阵法，前者对自由度较少的结构简单明了，后者特别适合计算机编程运算。下面重点介绍后者。

结构总体刚度矩阵 K 与单元刚度矩阵 K^e 之间的关系为

$$K = \sum_e (G^e)^T K^e G^e \quad (1-19)$$

其中， G^e 为单元大域变换矩阵，对平面桁架结构，单元自由度 $m=4$ ，节点自由度 $h=2$ ，整个结构有 n 个节点，则该单元大域变换矩阵为 $m \times (hn)$ 维。其中， ij 单元假定为全局单元编号中第 3 个，其大域变换矩阵为

$$G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2i-1 & 2i & \cdots & 2j-1 & 2j & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

另外，总体结构的荷载向量、位移向量与单元荷载向量、位移向量之间的关系为

$$P = \sum_e (G^e)^T P^e \quad (1-21)$$

$$\delta = \sum_e (G^e)^T \delta^e \quad (1-22)$$

5. 边界条件的处理

边界条件指结构边界上所受到的外加约束。边界上的节点通常有两种情况。一种可以自由变形，如图 1-5 所示的节点 5、6、7、8 等，这时只要让这些节点上的荷载等于零就可以了。如果节点 3 作用着外荷载，则可令该点的荷载等于规定的荷载 Q 。另一种是边界上的节点，规定了节点位移的数值，如图 1-5 所示的桁架，有

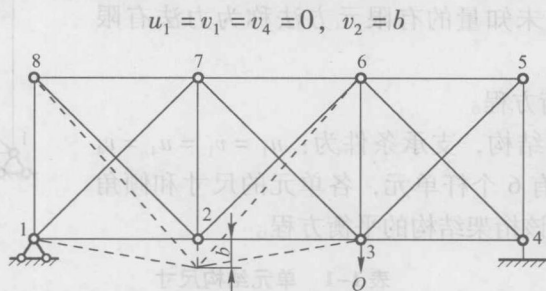


图 1-5 桁架

这时，是否可以把规定的位移数值直接放到平衡方程 $K\delta = P$ 中去呢？当采用迭代法求解时，是可以这样做的。如果采用直接法求解，则不能这样做，因为直接法是以全部节点位移都是未知量为基础的。

现在把结构平衡方程组重新排列如下。

$$\begin{pmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_a \\ P_b \end{pmatrix}$$

式中， δ_b 是已知的节点位移， δ_a 是未知的节点位移。相应地， P_a 是已知的节点荷载，而 P_b

是未知的支点反力。只要已给出的位移 δ_b 足以阻止结构的刚体移动，则子矩阵 K_{aa} 将是非奇异的，可以解出未知的节点位移

$$\delta_a = K_{aa}^{-1}(P_a - K_{ab}\delta_b)$$

进而求出未知支点反力

$$P_b = (K_{bb} - K_{ab}^T K_{aa}^{-1} K_{ab}) \delta_b + K_{ab}^T K_{aa}^{-1} P_a$$

上面说明了求解平衡方程组的步骤，但在有限元法中，未知量的个数通常有几百个，甚至几万个，一般都利用电子计算机求解。给定位移的节点和给定荷载的节点实际上是交错出现的。通常为了程序设计的方便，刚度矩阵 K 的行序和列序都不改变，而作下述处理。

设结构的平衡方程为

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & \cdots & k_{1,16} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & \cdots & k_{2,16} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & \cdots & k_{3,16} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & \cdots & k_{4,16} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{16,1} & k_{16,2} & k_{16,3} & k_{16,4} & \cdots & k_{16,16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_8 \end{pmatrix} \quad (1-23)$$

对 $u_1 = 0$ 上式作如下变化，在刚度矩阵 K 中，把与 u_1 对应的对角线上的刚度系数 $k_{1,1}$ 换为一个极大的数，如可换成 $k_{1,1} \times 10^8$ ；把与 u_1 对应的节点荷载换成 $k_{1,1} \times 10^8 \times u_1 = 0$ ，其余保留不变。对其他边界条件可以类推。

通过上述变化，式 (1-23) 中节点位移列阵成为未知量，荷载列阵成为已知向量，两端左乘刚度矩阵的逆阵可以求出节点位移，进而得到节点力和单元内力。上述以位移作为未知量求解并表示出节点力和单元内力的方法，称为位移法，相应的有限元法称为位移法有限元。以单元内力为未知量的有限元方法称为力法有限元，工程中采用不多。

例 桁架结构的平衡方程。

图 1-6 所示为桁架结构，支承条件为： $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$ ， $u_3 = b$ 。该桁架共有 6 个杆单元，各单元的尺寸和倾角如表 1-1 所示。试列出该桁架结构的平衡方程。

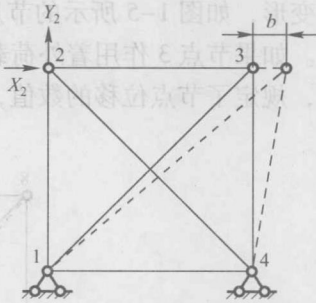


图 1-6 桁架

表 1-1 单元结构尺寸

杆单元	i 点	j 点	面积	长度	弹性模量	倾角 $\theta/(^{\circ})$	$\alpha = \cos\theta$	$\beta = \sin\theta$	α^2	β^2	$\alpha\beta$
12	1	2	A	l	E	90	0	1	0	1	0
13	1	3	A	$\sqrt{2}l$	E	45	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
14	1	4	A	l	E	0	1	0	0	0	0
23	2	3	A	l	E	0	1	0	0	0	0
24	2	4	A	$\sqrt{2}l$	E	315	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
34	3	4	A	l	E	270	0	-1	0	1	0



求解步骤。

1) 根据前述列出各单元的刚度矩阵。

$$K^{12} = \frac{AE}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K^{13} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \dots$$

2) 列出各单元的大域变换矩阵。

$$G^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G^{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

3) 进而计算整体刚度矩阵 K , 写出结构总体平衡方程。

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1.914 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{pmatrix}$$

4) 引入边界条件后得到平衡方程。

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{pmatrix} 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 \times 10^8 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 \times 10^8 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 \times 10^8 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \times 10^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ 1.914 \times 10^8 \times b \\ Y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 有限元法分析的一般步骤

1. 有限元法分析的一般步骤

结构离散化就是将结构分成有限个小的单元体, 单元与单元、单元与边界之间通过节点连接。结构的离散化是有限元法分析的第一步, 关系到计算精度与计算效率, 是有限元法的基础步骤, 包含以下 3 个方面的内容:

1) 单元类型选择。离散化首先要选定单元类型, 包括单元形状、单元节点数与节点自由度数 3 个方面的内容。