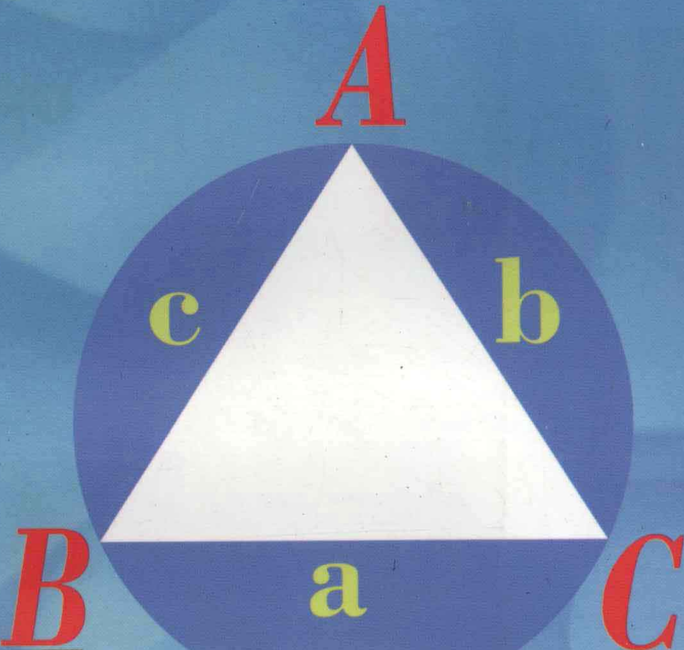
新编中学数学解题指要丛书

王祥麟　孙永铉 编著

PING MIAN SAN JIAO JIE TI ZHI YAO



面三角解题指要

方出版中心

新编中学数学解题指要丛书

平面三角解题指要

王祥麟　孙永铉 编著

东方出版中心

说　明

经中央机构编制委员会办公室和中华人民共和国新闻出版署批准，原中国大百科全书出版社上海分社、知识出版社（沪），自1996年1月1日起，更名为东方出版中心。

平面三角解题指要　　王祥麟　孙永铉　编著

出版：东方出版中心
（上海仙霞路335号　邮编200336）
发行：东方出版中心
经销：新华书店上海发行所
印刷：昆山市亭林印刷总厂

开本：787×1092（毫米）　1/32
印张：9.75
字数：200千字
版次：1999年8月第1版第1次印刷
印数：1—8,000

ISBN 7-80627-439-1/G·122　　定价：11.00元

内 容 提 要

本书系“新编中学数学解题指要丛书”之一种。本书根据中学数学教学大纲的要求及新教材的具体内容，针对教学上的重点、要点、难点，概要地介绍了平面三角解题的基本思路、途径、方法和技巧，将其分门别类地归纳为诸如怎样利用三角函数的定义及性质解题，怎样求三角函数的值，怎样证明三角恒等式、条件三角等式、三角不等式、三角形中的等式和不等式，怎样判断三角形的形状，怎样解三角方程，怎样进行反三角函数的三角运算和三角函数的反三角运算，怎样求三角函数的最值，怎样用对偶原理解题，怎样利用数形结合解题，怎样用三角知识解实际问题等。本书可帮助高中学生灵活掌握平面三角的基本知识，便捷地解决各类平面三角习题，也可供有关教师参考。

出 版 说 明

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学,数学的理论广泛地应用到自然科学和技术的各个部门,对人类认识自然和改造自然起着重要的作用。中学数学是数学的基础,是中学的重要课程,学好中学数学既能训练学生的逻辑思维能力,培养学生的分析问题和解决问题的能力,又对学好中学的其他课程,特别是理科课程(物理、化学、生物、地理等)有着直接的关系。

要学好中学数学,在熟练掌握中学数学的基本概念和基本理论的同时,学会解题,掌握解题技巧也是很重要的,它能帮助学生迅速地找到解题思路,简便地作出正确解答。为此,我们出版这套“新编中学数学解题指要丛书”,共分6册,包括《初中代数解题指要》、《平面几何解题指要》、《高中代数解题指要》、《立体几何解题指要》、《平面三角解题指要》和《解析几何解题指要》。本丛书根据教学大纲和教材,针对教学上的重点、要点、难点,概要地介绍了中学数学各分支解题的基本思路、途径、方法和技巧等。本丛书可作为普通中学数学教和学的参考书,也可供广大数学爱好者作为学习数学的辅导读物。

本丛书的作者都是长期在中学从事数学教学,具有丰富教学实践经验,对中学数学解题方法颇有研究的中学特级教师和高级教师。我们希望本丛书的出版,能对广大中学生提

高学习数学兴趣,培养创新能力有所裨益,并期待中学广大师生对本丛书多提宝贵意见,以便再版时改进,使本丛书逐步完善。

编 者 的 话

培养优秀的数学思维品质,提高解(证)数学问题的能力,学会用数学知识解决实际问题,这无论对教师,还是对学生都具有非常重要的意义。平面三角作为初等数学的一个重要组成部分,一方面要遵循初等数学的一般的思想方法和解题规律,另一方面由于其自身的性质和规律,又形成其独特的思维方式和解题方法。因此,在学习平面三角这一部分知识时,必须深刻理解各知识点的概念、定义以及由概念、定义推导出来的重要公式、性质,要把握知识之间的联系,学会用三角方法去解决问题。又因为平面三角是初等数学的一部分,它与初等数学其他各部分的知识有着必然的联系,要善于发现它们之间的联系,学会用三角方法解决其他数学问题,同时用其他的数学知识解三角问题。

本书力求按照平面三角自身的知识结构,按专题编排篇目,独立成文,由浅入深,循序渐进。为了帮助读者阅读、自学,每道例题都有解前分析或解后说明,并且每个专题之后都配有一定量的习题,以帮助读者加深理解,掌握数学的思维方式和解题方法。本书由王鸿仁、蔡明通两位先生审定,徐浩颖先生编写了全书的习题及答案,谨表示感谢。由于作者水平有限,书中倘有不妥或疏漏之处,敬请读者予以指正。

编 者

1999年1月

目　录

一、怎样利用三角函数的定义及性质解题

三角函数是高中数学教学要求掌握的重要的基本初等函数之一。由于初中定义的锐角三角函数不能满足解决实际问题的需要,因而必须加以扩展。为此引进弧度制,将角的概念推广到一般情形,建立了角的集合与实数集之间的一一对应关系。应该看到,这不仅仅是角的概念由静态定义进入动态描述,更重要的是为建立和研究三角函数铺垫了一个我们熟悉而且重要的实数基础,使我们能利用平面直角坐标系研究角。在平面直角坐标系中,利用角 α 终边上任一点的坐标 (x,y) 及该点到原点的距离 r,定义了角 α 的六个三角比,进而定义了实数的三角函数,并由定义获得了一些重要的性质。了解三角函数的定义过程,掌握三角函数的性质和图象,这是学习平面三角的基础。

(一) 三角函数的定义

例 1 已知 $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$,求证 $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$。

证明 将角 α 的顶点置于坐标原点,始边与 x 轴正向重合,设 $P(x, y)$ 是 α 终边上的任一点,记 $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$。由

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha \Rightarrow \frac{x-y}{r} = \frac{\sqrt{2}y}{r} \Rightarrow x = (\sqrt{2}+1)y,$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{x+y}{r}=\frac{(\sqrt{2}+2)y}{r}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)y}{r}=\sqrt{2}\frac{x}{r}$$
$$=\sqrt{2}\cos\alpha。$$

说明　本题极易从化积入手，即将 $\cos\alpha-\sin\alpha$、$\cos\alpha+\sin\alpha$ 先化成 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，再利用$\frac{\pi}{4}-\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$去推证，这要引出讨论符号的麻烦，若读者熟悉定义，也可隐去坐标代换，证明就更加简单：

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha\Rightarrow\cos\alpha=(\sqrt{2}+1)\sin\alpha,$$
$$\cos\alpha+\sin\alpha=(\sqrt{2}+2)\sin\alpha=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\sin\alpha$$
$$=\sqrt{2}\cos\alpha。$$

例 2　化简$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}$。

分析　本题仍可利用例 1 的方法来化简，但要预计到角 θ 终边上一点 $P(x,y)$到原点的距离 r 带来的麻烦，为避免这一麻烦，可选择点 P 是θ 的终边与单位圆的交点，则 $r=1$，这样化简就容易多了。

解　设 $P(x,y)$是角 θ 终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的交点，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}=1$，并且 $\sin\theta=y,\cos\theta=x$。

$$原式=\frac{1+y-x}{1+y+x}+\frac{1+y+x}{1+y-x}$$
$$=\frac{(1+y-x)^2+(1+y+x)^2}{(1+y)^2-x^2}$$
$$=\frac{2[(1+y)^2+x^2]}{2y+y^2+(1-x^2)}$$
$$=\frac{2[1+2y+(x^2+y^2)]}{2y(1+y)}$$

$$=\frac{2}{y}=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta。$$

说明 当然，本题在学习了同角三角比关系和半角的正切公式后还可给出其他的解法，但都相对麻烦。在上述解法中，用到了一个不为重视的知识点，即角 θ 的三角比只与 θ 的终边位置有关，而与 θ 终边上点 P 的选取位置（除原点外）无关。

（二）正弦、余弦函数的有界性

例 3 实数 k 为何值时，(1) $\sin x=\frac{k+1}{k+2}$ 有意义？(2) $\sin x=\frac{k+1}{k+2}$ 与 $\cos x=\frac{3}{k+2}$ 同时有意义。

分析 (1)由 $|\sin x|\leqslant 1$ 知只须解不等式 $\left|\frac{k+1}{k+2}\right|\leqslant 1$ 即可；(2)利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 解方程 $\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2+\left(\frac{3}{k+2}\right)^2=1$ 即可。

解 (1) $|\sin x|\leqslant 1\Leftrightarrow\left|\frac{k+1}{k+2}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow|k+1|\leqslant|k+2|\Leftrightarrow(k+1)^2\leqslant(k+2)^2\Leftrightarrow k\geqslant-\frac{3}{2}$，

$\therefore\quad \sin x=\frac{k+1}{k+2}$ 有意义 $\Leftrightarrow k\geqslant-\frac{3}{2}$。

(2) $\because\quad \sin^2x+\cos^2x=1$，

$\therefore\quad \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2+\left(\frac{3}{k+2}\right)^2=1\Rightarrow(k+1)^2+9=(k+2)^2\Rightarrow k=3$，

$\therefore\quad \sin x=\frac{k+1}{k+2}$ 与 $\cos x=\frac{3}{k+2}$ 同时有意义 $\Leftrightarrow k=3$。

说明 在第(2)小题中为什么不直接利用有界性，求出不

等式组$\begin{cases}\left|\dfrac{k+1}{k+2}\right|\leqslant 1\\ \left|\dfrac{3}{k+2}\right|\leqslant 1\end{cases}$的解集$\{k\mid k\geqslant 1\}$？读者应该体会到，$\sin x$与$\cos x$同时有意义不仅要满足有界性要求，同时要满足同角三角比关系：$\sin^2x+\cos^2x=1$。而“$|m|\leqslant 1$、$|n|\leqslant 1$”是“$m^2+n^2=1$”的必要非充分条件，因而$\sin x$、$\cos x$的有界性含于同角三角比关系$\sin^2x+\cos^2x=1$之中。

例4 已知$\alpha\neq\dfrac{k}{2}\pi\quad(k\in Z)$，试确定下式的符号：

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)-\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}。$$

解

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)-\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)}\\&=\frac{\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\\&=\frac{\operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha-1)}{\operatorname{ctg}\alpha(\sin\alpha+1)}\\&=-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}。\end{aligned}$$

$\because\quad \alpha\neq\dfrac{k}{2}\pi,k\in Z,$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}\operatorname{tg}^2\alpha>0,-\sin\alpha\leqslant|\sin\alpha|<1\\ \cos\alpha\leqslant|\cos\alpha|<1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}1+\sin\alpha>0,\\1-\cos\alpha>0,\end{cases}$$

$$\therefore\quad -\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1+\sin\alpha}<0,$$

即所给式子的符号为负。

说明 本题条件$\alpha\neq\dfrac{k}{2}\pi(k\in Z)$保证了$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$及式子本身有意义，同时保证了$\sin\alpha$、$\cos\alpha$达不到最大下界$-1$和最

小上界 1,因而所给式子有确定的符号。

例 5 设 $a>0,b>0$,求证方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根。

分析 利用方程构造函数 $f(x)=a\sin x+b-x$,因而问题转化为 $f(x)$ 在区间 $(0,a+b]$ 上至少有一零点,因此要证明 $f(0)$ 与 $f(a+b)$ 异号。

解 设 $f(x)=a\sin x+b-x$。

由于初等函数都是连续函数,则 $f(x)$ 是 R 上的连续函数。

$f(0)=a\sin 0+b-0=b>0$,

$f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]$。

1° 若 $\sin(a+b)=1$,则 $f(a+b)=0$,这表明 $a+b$ 就是 $f(x)$ 在区间 $(0,a+b]$ 上的一个零点;

2° 若 $\sin(a+b)\neq 1$,则 $\sin(a+b)<1$,而 $a>0\Rightarrow f(a+b)<0\Rightarrow f(0)$ 与 $f(a+b)$ 异号,这表明 $f(x)$ 在区间 $(0,a+b)$ 上至少有一个零点。

综合 1°、2° 可知方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根。

说明 本题证明的关键在于利用了 $\sin x$ 的有界性,由此得出 $\sin(a+b)\leqslant 1$。读者应看到要证明方程 $x=a\sin x+b$ 有解并不难,但要证明有一不超过 $a+b$ 的正根却是困难的,这正显示出正弦函数有界性的巧妙应用。

(三)三角函数的奇偶性

例 6 判断函数 $f(x)=\dfrac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}}{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}$ 的奇偶性。

解 由 $e^{\sin x}-e^{-\sin x}\neq 0\Rightarrow \sin x\neq 0\Rightarrow x\neq k\pi(k\in Z)$,则 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid x\neq k\pi,k\in Z\}$,定义域关于原点

对称。

任取$x\in D$,

$$f(x)+f(-x)=\frac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}}{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}+\frac{e^{\sin(-x)}+e^{-\sin(-x)}}{e^{\sin(-x)}-e^{-\sin(-x)}}$$

$$=\frac{e^{\sin x}+e^{-\sin x}-e^{-\sin x}-e^{\sin x}}{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}=0,$$

即$f(-x)=-f(x)$,因而$f(x)$为奇函数。

例7 已知函数$f(x)=\begin{cases}3\sin x+4\cos x+7 & (x<0),\\ 3\sin x-4\cos x-7 & (x>0),\end{cases}$判断$f(x)$的奇偶性。

解 $f(x)$的定义域为$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,任取$x\in D$。

1° 当$x<0$时,$-x>0$,

$$\begin{aligned}f(-x)&=3\sin(-x)-4\cos(-x)-7\\&=-3\sin x-4\cos x-7\\&=-(3\sin x+4\cos x+7)\\&=-f(x)。\end{aligned}$$

2° 当$x>0$时,$-x<0$,

$$\begin{aligned}f(-x)&=3\sin(-x)+4\cos(-x)+7\\&=-3\sin x+4\cos x+7\\&=-(3\sin x-4\cos x-7)\\&=-f(x)。\end{aligned}$$

综合1°、2°可知对于任何$x\in D$,都有$f(-x)=-f(x)$,因而$f(x)$为奇函数。

说明 六个三角函数中$y=\sin x$、$y=\mathrm{tg}x$、$y=\mathrm{ctg}x$、$y=\csc x$为奇函数,$y=\cos x$、$y=\sec x$为偶函数,在例6、例7中用到了正弦、余弦函数的奇偶性。

例8 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x+\sin x\cos x}$，(2) $y=\sin(x-\theta)(\theta\in R)$。

解　(1) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x+\sin x\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{\cos x(\cos x+\sin x)}$。

令 $\cos x(\cos x+\sin x)\neq 0$，则 $\cos x\neq 0$ 且 $\sin x+\cos x\neq 0$。

$\therefore\quad x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$　且 $x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}, k\in Z$，

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x+\sin x\cos x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 且 $x\neq k\pi-\dfrac{\pi}{4}, k\in Z\}$，定义域关于原点不对称，$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x+\sin x\cos x}$ 是非奇非偶函数。

(2) 函数 $y=\sin(x-\theta)$ 的定义域为 R，

$$y=\sin(x-\theta)=\sin x\cos\theta-\cos x\sin\theta。$$

1° 当 $\theta=k\pi$ 时，$y=\cos\theta\cdot\sin x$ 为奇函数；

2° 当 $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=-\sin\theta\cos x$ 为偶函数；

3° 当 $\theta\neq\dfrac{k}{2}\pi$ 时，$y=\sin(x-\theta)$ 为非奇非偶函数，以上 $k\in Z$。

综上可知，当 $\theta=k\pi(k\in Z)$ 时，$y=\sin(x-\theta)$ 为奇函数；当 $\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，$y=\sin(x-\theta)$ 为偶函数；当 $\theta\neq\dfrac{k}{2}\pi$ $(k\in Z)$ 时，$y=\sin(x-\theta)$ 为非奇非偶函数。

说明　由例 8 可知，就一般性而言，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\varphi\neq\dfrac{k}{2}\pi, k\in Z)$ 都是非奇非偶函数。

（四）三角函数的单调性

例 9　(1) 比较 $\cos\left(-\dfrac{47}{10}\pi\right)$ 和 $\cos\left(-\dfrac{44}{9}\pi\right)$ 的大小；

(2) 将 $\mathrm{tg}\left(\lg\frac{1}{3}\right)$、$\mathrm{tg}\left(\lg\frac{1}{2}\right)$、$\mathrm{tg}\left(\sin\frac{7}{6}\pi\right)$、$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$、$\mathrm{tg}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\right)$按从小到大次序排列。

解 (1) $\cos\left(-\frac{47}{10}\pi\right)=\cos\frac{47}{10}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{7}{10}\pi\right)$

$$=\cos\frac{7}{10}\pi,$$

$$\cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)=\cos\frac{44}{9}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{8}{9}\pi\right)=\cos\frac{8}{9}\pi。$$

在区间$[0,\pi]$上,函数 $y=\cos x$ 单调递减,并且 $0<\frac{7}{10}\pi<\frac{7}{9}\pi<\frac{8}{9}\pi<\pi$,则 $\cos\frac{7}{10}\pi>\cos\frac{8}{9}\pi$,即

$$\cos\left(-\frac{47}{10}\pi\right)>\cos\left(-\frac{44}{9}\pi\right)。$$

(2) $\because -\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3}{4}\pi<-\frac{1}{2}=\sin\frac{7}{6}\pi=\lg\frac{1}{\sqrt{10}}<\lg\frac{1}{3}<\lg\frac{1}{2}<0$,并且在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上函数 $y=\mathrm{tg}x$ 单调递增,因而

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)<\mathrm{tg}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\right)<\mathrm{tg}\left(\sin\frac{7}{6}\pi\right)<\mathrm{tg}\left(\lg\frac{1}{3}\right)<\mathrm{tg}\left(\lg\frac{1}{2}\right)。$$

说明 比较若干个角的某种三角函数值的大小,关键是通过变化把与它们等值的相关角纳入到同一单调区间,然后利用单调性进行比较。

例 10 确定 $\log_{\frac{1}{e}}(\cos6-\sin6)$的符号。

分析 由于在$(0,+\infty)$上,$y=\log_{\frac{1}{e}}x$ 是减函数,只须比较$\cos6-\sin6$与1的大小。

解 $\cos6-\sin6=\sqrt{2}\cos\left(6+\frac{\pi}{4}\right)$。

$\because \quad \frac{7}{4}\pi<6<2\pi, \quad \therefore \quad 2\pi<6+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$。

又，在$\left[2\pi,2\pi+\frac{\pi}{4}\right]\subset[2\pi,3\pi]$上，函数 $y=\cos x$ 单调递减，则

$$\cos\left(6+\frac{\pi}{4}\right)>\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\cos\left(6+\frac{\pi}{4}\right)>1。$$

$\because$ 在$(0,+\infty)$上，函数 $y=\log_{\frac{1}{e}}x$ 单调递减，

$\therefore \quad \log_{\frac{1}{e}}(\cos6-\sin6)=\log_{\frac{1}{e}}\sqrt{2}\cos\left(6+\frac{\pi}{4}\right)<\log_{\frac{1}{e}}1=0$。

例 11 化简$\sqrt{1+\sin2x}-\sqrt{1-\sin2x} \quad \left[x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$。

解 原式$=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}-\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}$

$=\sin x+\cos x-|\sin x-\cos x|$。

在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上，$\sin x$ 单调递增，$\cos x$ 单调递减。

1° 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$\sin x<\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}<\cos x$，

$\therefore$ 原式$=\sin x+\cos x-(\cos x-\sin x)=2\sin x$。

2° 当$x=\frac{\pi}{4}$时，$\sin x=\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 原式$=\sqrt{2}$。

3° 当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$\cos x<\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}<\sin x$，

$\therefore$ 原式$=\sin x+\cos x-(\sin x-\cos x)=2\cos x$。

综合可得

$$原式=\begin{cases}2\sin x & \left[x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right],\\ \sqrt{2} & \left(x=\frac{\pi}{4}\right),\\ 2\cos x & \left[x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\right]。\end{cases}$$