



航空航天工程类专业规划教材

飞行器结构力学

FEIXINGQI JIEGOU LIXUE

史治宇 丁锡洪 主编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

航空航天工程类专业规划教材

飞行器结构力学

史治宇 丁锡洪 主编

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

飞行器结构力学全书分三个部分。第一部分为弹性力学基础,着重阐述弹性力学的基本理论;第二部分为结构力学,着重讨论静定和静不定结构分析的基本理论和方法;第三部分为有限单元法基础,着重介绍有限单元法的基本理论和方法。

本书可供飞行器设计与工程专业、工程力学专业本科教学使用,亦可供从事飞行器结构设计和强度工作的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

飞行器结构力学/史治宇,丁锡洪主编. —北京:国防工业出版社,2013.1

航空航天工程类专业规划教材

ISBN 978-7-118-08477-1

I. ①飞… II. ①史… ②丁… III. ①飞行器—结构力学—高等学校—教材 IV. ①V414

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第001089号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 17 $\frac{3}{4}$ 字数 412 千字

2013年1月第1版第1次印刷 印数 1—3000册 定价 36.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

全书分三个部分。第一部分为弹性力学基础,着重阐述弹性力学的基本方程,平面问题、薄板弯曲问题和薄板失稳问题的理论和解法,以及能量原理;第二部分为结构力学,着重讨论静定和静不定杆系结构、特别是杆板式薄壁结构分析的基本理论和方法;第三部分为有限单元法基础,着重介绍结构分析的直接刚度法,以及基于最小势能原理的有限单元法的理论和方法。弹性力学是结构力学和有限单元法的理论基础,结构力学是结构工程计算的主要方法,有限单元法是复杂结构计算的主要工具。

本教材可供飞行器设计与工程专业、工程力学专业本科教学使用,亦可供从事飞行器结构设计和强度工作的工程技术人员参考。

本教材由史治宇教授、丁锡洪教授、顾慧芝副教授、郭树祥副教授在《结构力学》(丁锡洪主编,1991年出版)的基础上编写而成,史治宇教授、丁锡洪教授主编。南京航空航天大学航空宇航学院的周丽教授、张斌副教授为本教材的编写提出了很好的建议和意见。本教材的出版还得到了南京航空航天大学航空宇航学院和国防工业出版社的大力支持。在此,编者向所有对本教材出版做出贡献的朋友们表示衷心的感谢!

由于编者水平所限,书中错误和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

2012年8月于南京航空航天大学明故宫校区

目 录

绪论	1
第一章 弹性力学基础	5
1-1 引言	5
1-2 基本方程	8
1-3 平面问题	15
1-4 用直角坐标解平面问题	22
1-5 用极坐标解平面问题	28
习题	42
第二章 薄板的弯曲	44
2-1 引言和简化假设	44
2-2 薄板弯曲的基本方程式	45
2-3 板的边界条件	48
2-4 四边简支矩形板的纳维叶解法	50
2-5 矩形薄板的李维解法	53
2-6 圆形薄板的弯曲	55
习题	57
第三章 能量原理	59
3-1 引言	59
3-2 应变能和余应变能	59
3-3 虚位移原理和最小势能原理	62
3-4 虚力原理和最小余能原理	65
3-5 能量原理在结构分析中的应用	68
习题	77
第四章 结构的组成分析	79

4-1	几何可变系统和几何不变系统	79
4-2	几何不变性的分析	79
4-3	几何组成分析的基本规则	81
4-4	静定结构和静不定结构	85
	习题	85
第五章	静定结构的内力及弹性位移	88
5-1	引言	88
5-2	静定桁架的内力	88
5-3	静定刚架的内力	90
5-4	杆板式薄壁结构计算模型	95
5-5	杆板式薄壁结构元件的平衡	96
5-6	静定薄壁结构及其内力	100
5-7	静定结构的主要特征	110
5-8	静定结构的弹性位移	111
	习题	123
第六章	静不定结构的内力及弹性位移	133
6-1	静不定系统的特性	133
6-2	静不定结构的解法——力法	133
6-3	对称系统的简化计算	143
6-4	静不定结构的位移	145
6-5	力法的一般原理和基本系统的选取	149
	习题	151
第七章	薄壁梁的弯曲和扭转	156
7-1	引言	156
7-2	自由弯曲时的正应力	157
7-3	自由弯曲时开剖面剪流的计算	160
7-4	开剖面的弯心	162
7-5	单闭室剖面剪流的计算	168
7-6	单闭室剖面薄壁梁的扭角	170
7-7	单闭室剖面的弯心	171
7-8	多闭室剖面剪流的计算	175
7-9	限制扭转的概念	181
	习题	183
第八章	结构的稳定	187
8-1	引言	187
8-2	压杆的稳定性	188
8-3	薄板压曲的基本微分方程	188

8-4	薄板的临界载荷	191
8-5	板在比例极限以外的临界应力	194
8-6	薄壁杆的稳定性	195
8-7	加劲板受压失稳后的工作情况——有效宽度概念	196
8-8	加劲板受剪失稳后的工作情况——张力场梁概念	200
	习题	204
第九章	结构分析的直接刚度法	206
9-1	引言	206
9-2	结构的离散化	206
9-3	单元分析	207
9-4	结构总刚度矩阵的组集	215
9-5	结构分析实例	218
9-6	约束处理	231
9-7	大型线性方程组的求解	233
	习题	237
第十章	结构分析的有限单元法	240
10-1	引言	240
10-2	结构离散化	240
10-3	结构单元刚度矩阵和总刚度矩阵的推导	242
10-4	弹性力学的平面问题	245
10-5	薄板的弯曲问题	263
	习题	270
附录	平面桁架结构静力分析程序	272
	参考文献	278



绪论

飞行器包括飞机(固定翼和旋翼)、飞艇、运载火箭、导弹、各种航天器等多种类别。但飞行器结构分析的很多方法和技术都源于对飞机结构的分析。飞行器结构分析是研究结构的强度、变形、稳定性、振动和疲劳断裂等问题的学科,涉及航空航天发展史、空气动力学、飞行器总体设计、飞行器结构设计、航空航天材料学以及许多力学课程的专门知识,具有很强的理论基础和工程应用背景。

各种飞行器的研制过程一般可分为项目论证、方案设计、工程研制和定型四个阶段,这四个阶段的工作是一个反复循环、螺旋式上升的过程,直到满足设计要求为止。一个理想的飞行器结构应该是满足全部有关的设计要求而又重量最轻的,为此,结构分析在飞行器研制过程中(特别是方案设计和工程研制阶段中)发挥着关键的作用。完整的结构分析并不是结构力学这门课程能独立完成的。本教材包括弹性力学基础、结构力学和有限单元法基础三部分的内容,主要讲述在静载荷作用下飞行器结构内力(应力)与变形计算的基本理论和方法,为飞行器结构分析提供必要的理论基础。

飞行器结构是用来承受和传递载荷的,必须有足够的强度和刚度。强度是指结构承受载荷的能力;刚度是指在外载荷作用下,结构抵抗变形的能力。所谓足够的强度和刚度并不意味着要过分地加强承力构件,而是要在总体设计所限定的空间内,设计出满足强度和刚度要求且重量较轻的结构。为此,必须掌握有效的结构计算方法和先进的计算工具,以便在飞行器设计各个设计阶段采用不同的方法对结构的内力(应力)与变形进行可靠的计算。本教材将从弹性力学、结构力学和有限单元法三个方面来阐述结构的应力与变形计算方法。

飞行器结构常常是非常复杂的。图1所示是飞机机翼典型结构件,图2是飞机机身典型结构件。要考虑所有的因素来计算这些结构的内力和变形几乎是不可能的,也是没有必要的。为了适应飞行器不同设计阶段的计算要求,必须对真实结构进行简化。为此,应该把所有与结构计算有关的因素(载荷、几何形状、连接关系、材料等)加以分析,保留起主要作用的因素,略去次要因素,用理想化的受力系统来代替实际结构,以得到不同需求的计算模型,如工程设计计算模型、强度校核计算模型、有限元模型等。

对于飞行器结构设计的不同阶段,结构计算目的和精度要求都是不一样的,因而计算模型的简化也不一样。一般来说,计算模型的简化大致可从以下四个方面来考虑。

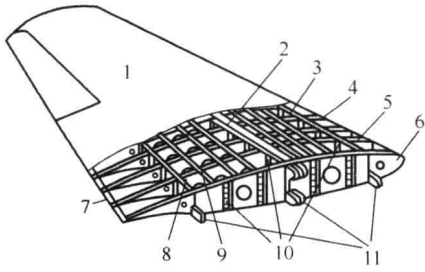


图 1

- 1—蒙皮;2—翼梁;3—前纵墙;4—前缘;
5—普通翼肋;6—加强翼肋;7—后缘;8—后纵墙;
9—桁条;10—支柱;11—与机身的对接接头。

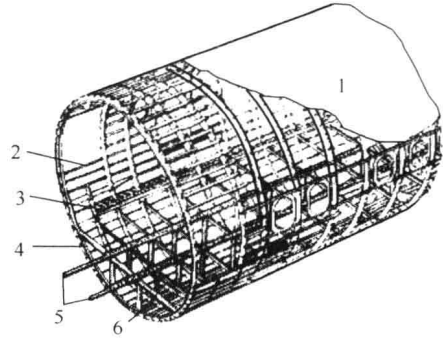


图 2

- 1—蒙皮;2—桁条;3—桁梁;4—隔框;
5—地板纵梁;6—地板横梁。

(1) 外载荷的简化:针对计算要求,略去那些对计算结果影响不大的外载荷,着重考虑起主要作用的外载荷。例如,对于机翼弯曲变形而言,可以只考虑那些与机翼平面相垂直的外力分力,而忽略那些与机翼平面平行的外力分力。同时,将作用到飞行器表面的实际分布载荷(如气动力及分布质量力等)等效地简化为作用于结构各节点上的集中载荷。

(2) 几何形状的简化:飞行器的外形是由曲线或曲面所组成。为了计算方便,可以用折线或若干平面来代替实际外形。例如,图 3(a)所示的机翼,在略去受力不大前后缘后,可以简化为图 3(b)所示的由若干个盒式结构组成的杆板式薄壁结构计算模型;图 4(a)所示的机身圆形框可以简化为图 4(b)所示的由若干段直梁所组成的结构。

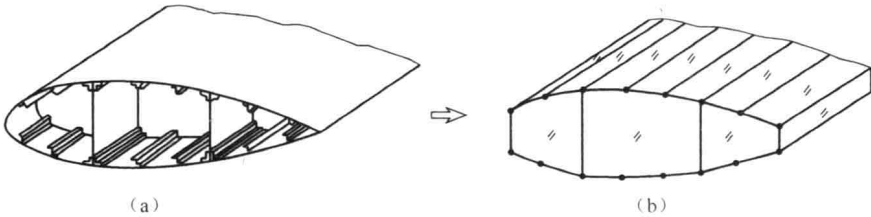


图 3

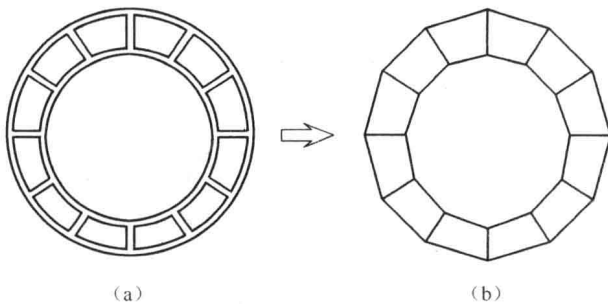


图 4

(3) 受力系统的简化:结构计算模型常常可以略去结构中一些不受力或受力不大的元件,并根据结构件的主要受力特点,对元件的受力规律或受力类型作某些假设,抽象为理想化的受力元件。例如,图 5(a)所示为机翼结构的一个典型剖面,剖面中的桁条和梁缘条主要承受正

应力,腹板和蒙皮承受剪应力。因此,此受力结构可以简化为图 5(b)所示的杆板式薄壁结构,可以假设杆件只承受正应力,板承受剪应力,杆与板相连处只传递剪应力。又如,图 6(a)所示为承受弯矩 M 的平面梁,梁端面上的应力分布如图 6(a)所示,端面的最大正应力可由材料力学公式求得

$$\sigma = \frac{6M}{b^2 t}$$

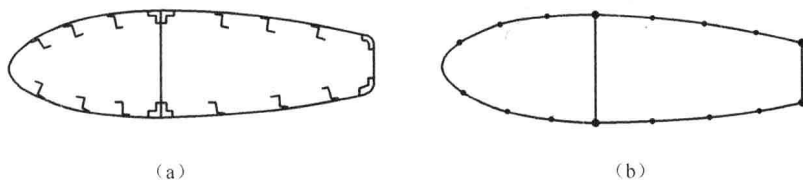


图 5

图 6(a)可简化为图 6(b)所示的双缘条薄壁梁。设薄壁梁缘条的集中面积为 B ,假设腹板只受剪应力,不受正应力,则缘条的正应力为

$$\sigma = \frac{M}{bB}$$

由上面两式可知,当应力相等时,简化后薄壁梁缘条的面积为

$$B = \frac{bt}{6}$$

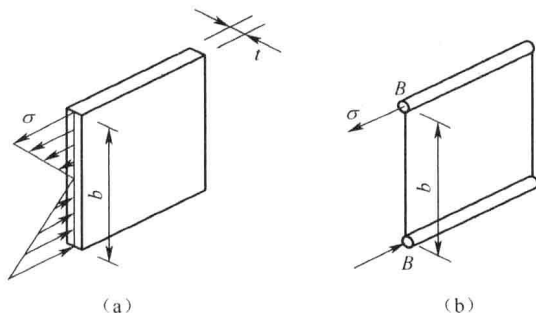


图 6

(4) 连接关系的简化:飞行器结构中有铆接、螺接、焊接或胶接等连接方式,按照其受力及构造特点,可以简化为没有摩擦的铰接、滑铰或完全刚性的刚接等。

飞行器结构经简化后大致可分为杆系结构(工程上常称为桁架结构和刚架结构)、杆板式薄壁结构和整体结构。

桁架结构是指由直杆组成的,且各杆之间均以无摩擦的铰链相连接的受力系统。桁架只能承受节点载荷。刚架是指各杆之间用刚性连接的受力系统。所谓刚性,是指系统在变形过程中同一个节点处各杆之间的夹角保持不变。如起落架、机身框、操纵系统等结构都是杆系结构。

杆板式薄壁结构是由加强构件(梁缘条、桁梁、桁条、肋、隔框)、腹板以及蒙皮所组成的受力系统。它是飞行器结构中广泛采用的一种结构形式,如机翼结构、机身结构等。

整体结构一般是由机械铣切或化学腐蚀加工而成的,如一些现代飞行器翼面由于其强度和刚度要求较高,常常采用这种整体结构受力形式。整体结构面板一般同时承受正应力和剪

应力,常常简化为变厚度板的计算模型。

不同的结构有不同的简化计算模型,相同的结构对于不同的计算要求也可以建立不同的简化计算模型。为了得到适用的计算模型,常常需要引入相关的工程假设,这些内容将在本书的弹性力学基础、结构力学和有限单元法基础的有关章节中进行详细的说明。

随着空气动力学、飞行器设计技术、推进技术、控制技术和材料科学的飞速发展,人们对飞行器的操纵性、机动性、隐身性、重量、寿命、可靠性和经济性等要求越来越高。飞行器结构的形式日趋复杂,新材料和新工艺不断涌现,随之,高精度和高效率的结构分析新方法也不断涌现。如前面所说,本教材不能涵盖结构分析的全部内容,更不涉及不断涌现的先进的结构分析方法。本教材主要讲述在静载荷作用下飞行器结构内力(应力)与变形计算的基本理论和方法,为进一步学习结构分析的其他方法打下必要的基础。因此,在学习本课程时,一方面要注意掌握弹性力学、结构力学和有限单元的基本理论和方法,了解和分析不同结构的受力形式和传力特点,以及不同的结构设计参数对传力特性和传力路线的影响;另一方面要特别注意分析和理解教材中不同计算模型的工程假设,逐步培养和具备将实际结构简化为合理的计算模型的能力。

第一章

弹性力学基础

1-1 引言

一、弹性力学研究的内容

弹性力学是固体力学的一个分支,它是研究弹性体在外力作用下所产生的应力和变形规律的一门学科。

大家已经学过材料力学。材料力学是研究杆状弹性体在拉伸、压缩、剪切、弯曲和扭转作用下的应力和变形的一门学科。弹性力学与材料力学相比,有两个特点:其一,在研究对象上,材料力学研究的对象仅限于杆状弹性体,而弹性力学研究的对象则没有形状的限制,研究对象更广泛;其二,在研究方法上,弹性力学只采用一些最基本的假设,而材料力学除了采用一些基本假设外,还引进一些关于变形状态或应力分布的补充假设。例如在研究直梁弯曲时就采用了平截面假设,从而得出梁的横截面上正应力沿高度呈直线分布的规律。弹性力学研究这一问题,并不需要引进这样的假设。计算结果表明,只有当梁的高度远小于它的跨度时,以上结论才是正确的,否则,横截面上的正应力就不是按直线分布,而是按曲线分布。也就是说,这时平截面假设就不适用了。再如在研究带孔杆件拉伸时,材料力学中假设拉应力在净面积上均匀分布,而弹性力学所得结果表明,在净面积上拉应力并不均匀分布,在孔边附近出现高度应力集中。由此可见,弹性力学的研究方法更为严密,所得的结果也比材料力学精确。人们常常用它来检验材料力学对同类问题解答的精度,从而明确材料力学公式的应用范围。

弹性力学是研究弹性体应力和变形问题的一个强有力的武器,已广泛应用于航空、航天、造船、机械、土建等各个工程领域中,为各种工程结构的强度、刚度、稳定性和可靠性分析提供了坚实的理论基础。随着近代科学技术的迅猛发展,弹性力学已成为许多新兴学科的理论基础。因而,从事飞行器设计与工程的技术人员掌握一定的弹性力学基础知识,对于从事飞行器设计和进行科学研究都是十分必要的。

二、弹性力学的基本假设

弹性力学是在不断解决工程问题的过程中逐步发展起来的。人们在长期的科学实践中为

形成严密的弹性力学理论体系,引入了如下的基本假设。

(1) 连续性(Continuous)假设——认为构成物体的材料是密实无间隙的连续介质,并在整个变形过程中保持连续性。实际上,任何物质都是由原子或分子微粒组成,都不是连续的。但是微粒的尺寸和它们之间的距离远比物体的尺寸小,从宏观上看,这一假设并不会引起显著的误差。有了连续性假设,物体中的应力、应变、位移等物理量就可以用空间点位的函数来定义,在变形过程中始终是空间点位的连续函数。可以应用高等数学中的微积分知识来处理连续函数问题。

(2) 均匀性(Homogeneous)和各向同性(Isotropic)假设——匀质指物体不同点处材料的力学性质都相同,与各点的空间位置无关。各向同性指在物体同一点处材料的力学性质在各个方向上都相同,与考察方向无关。因此,反映材料力学性质的弹性系数不随坐标和方向而改变。实际上,金属材料都可看作是均匀各向同性材料;而有些材料是不符合这一假设的,如木、竹等纤维材料以及现代复合材料,它们是各向异性的。

(3) 完全线弹性(Complete Linear Elasticity)假设——物体在外力作用下引起变形,在外力除去后,物体能完全恢复初始的形状和尺寸,没有任何剩余变形。同时应力与应变关系是线性的,服从胡克定律。引入这个假设就等于限定了我们所研究的物体只限于线性弹性体。

(4) 小变形(Small Deflection)假设——弹性体在外力作用下引起变形是微小的,与弹性体最小特征尺寸相比可以忽略不计。这样,在研究弹性体受力后的平衡状态时,可不考虑物体尺寸的变化,而应用变形前的尺寸;在研究弹性体变形时,变形的二次幂和乘积项都是高阶小量,可略去不计。这样就使得弹性力学的微分方程简化为线性的微分方程了。

基于上述基本假设建立的弹性力学称为线性弹性力学。

三、弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。现把它们的含义分别说明如下。

(1) 外力(Force)——作用在弹性体上的外力按其作用的方式不同,可分为体力 and 面力两种。

所谓体力是分布在弹性体整个体积内的力,如重力、惯性力等。弹性体内某一点处单位体积的体力,用它沿 x, y, z 轴的投影 X, Y, Z 来表示。这三个量称为该点的体力分量,并规定沿坐标轴的正向为正,反之为负。体力的因次是[力][长度]⁻³。

所谓面力是作用于弹性体表面上的力,如流体压力、接触力等。作用在弹性体表面上任一点处单位面积上的面力,用它沿 x, y, z 轴的投影 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 来表示,称为该点的面力分量,并规定沿坐标轴的正向为正,反之为负。面力的因次是[力][长度]⁻²。

(2) 应力(Stress)——弹性体受到外力作用后,必将在其内部引起应力。弹性体内任意点的应力状态可用图 1-1 所示的正六面体来表示。每一个面上的应力可分解为一个正应力和两个剪应力。

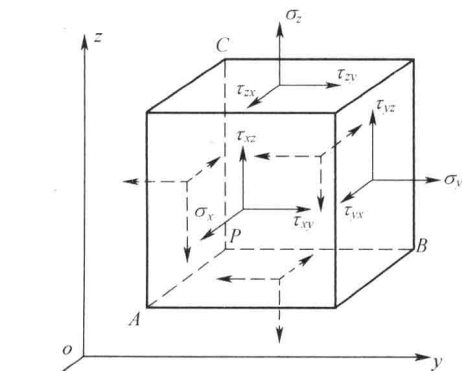


图 1-1

正应力用 σ 表示。为了表明这正应力的作用面和方向,加上一个脚标。例如, σ_x 表示正应力的作用面与 x 轴垂直,其方向沿着 x 轴。

剪应力用 τ 表示,并加上两个脚标,前一个脚标表明作用面垂直哪个坐标轴,后一个脚标表明剪应力的方向沿哪个坐标轴。例如, τ_{xy} 表示剪应力的作用面垂直于 x 轴,其方向与 y 轴平行。其余类推。

对应力的正负也做出规定。如果某一截面的外法线与坐标轴的正方向相同,则该面称为正面。正面上的应力沿坐标轴正方向为正,反之为负。如果某一截面的外法线指向坐标轴的负方向,则该面称为负面。负面上的应力沿坐标轴负方向为正,反之为负。图1-1中所示的应力全都是正的。

下一节将会证明,六个剪应力之间存在两两互等的关系,即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

由此可见,九个应力只有六个是独立的,通常把 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 六个应力称为该点的应力分量。

(3) 应变(Strain)——弹性体受力后,它的形状和尺寸都要改变。这种改变可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了描述弹性体内任意一点的应变状态,在该点沿坐标轴 x 、 y 、 z 的正方向分别取三个微小的线段 PA 、 PB 、 PC 。物体变形以后,这三个线段的长度和它们之间的直角都将有改变,各线段每单位长度的伸、缩称为正应变,用 ε 表示, ε_x 表示 x 方向线段 PA 的正应变,其余类推。正应变以伸长为正,缩短为负;每两线段之间直角的改变称为剪应变,用 γ 表示,单位是弧度。 γ_{xy} 表示 x 和 y 方向的线段 PA 和 PB 之间的直角改变,其余类推。剪应变以直角变小为正,变大为负。与应力分量相仿, ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} 、 γ_{xy} 称为一点的应变分量。

(4) 位移(Displacement)——弹性体受力后,它内部各点将发生位置的移动。弹性体内任一点的位移用它在 x 、 y 、 z 三坐标轴上的投影 u 、 v 、 w 来表示,沿坐标轴正方向为正,反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而言,弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量都是随点的位置不同而改变的,因而,都是点的位置坐标的连续函数。

四、弹性力学的基本方法

在材料力学中,求弹性体中的应力常采用截面法,即假想物体剖开,取截面一边的部分作为分离体,利用静力平衡条件求得截面上的应力。

弹性力学在研究弹性体的应力、应变和位移时,取体内微小的正六面体(称为微元体)为分离体,如图1-2所示。考虑微元体的平衡,建立其平衡微分方程。由于未知应力数总是超出微分方程的个数,因此,弹性力学问题总是超静定的,必须同时考虑微元体的变形条件以及应力与应变的关系,在弹性力学中它们相应地被称为几何方程和物理

方程。平衡方程、几何方程和物理方程统称为弹性力学的基本方程,综合考虑这三方面的方程,就有了足够数目的微分方程来求解未知的应力、应变和位移,而求解微分方程出现的积分

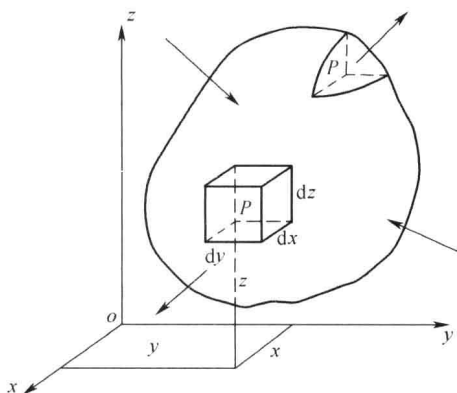


图1-2

常量,则根据边界条件来确定。

求解这些微分方程通常有两种方法:应力法和位移法。以应力为基本未知函数的叫做应力法,以位移为基本未知函数的叫做位移法。

1-2 基本方程

本节推导在直角坐标下弹性力学的基本方程。

一、平衡微分方程

首先,研究弹性体的平衡问题,建立应力分量和体力分量之间的关系,即平衡微分方程。

在弹性体内任一点 P 处,取出一个微小的正六面体,它的六个面分别与 x, y, z 轴垂直,棱边的长度分别为 $PA = dx, PB = dy, PC = dz$,如图 1-3 所示。这个微元体受到它周围部分弹性体的作用,每个面上受到的作用力分别用三个应力分量(一个正应力、两个剪应力)表示。由于弹性体内应力是坐标的连续函数,作用在这六面体两对面上的应力分量将有微小变化。例如,作用在 x 负面上的正应力是 σ_x ,在 x 正面上,由于坐标增加了 dx ,其正应力为 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 其余类推。此外,弹性体中还有体力。由于所取的微元体是无限小的,作用在微元体中的体力和微元体每个面上的应力可认为是均匀分布的。

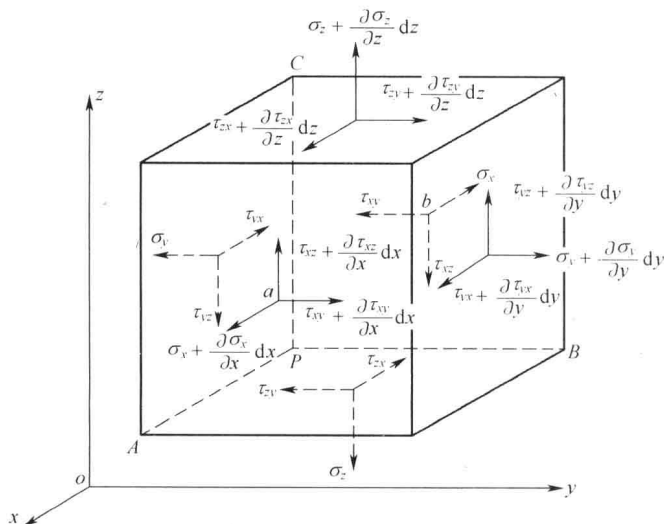


图 1-3

若所研究的弹性体在外力作用下处于平衡,则从中取出的任一微元体也应处于平衡,它应满足六个平衡条件

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0, & \Sigma F_y &= 0, & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0, & \Sigma M_y &= 0, & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned}$$

先利用第一个平衡条件 $\Sigma F_x = 0$,得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz -$$

$$\tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0$$

上式经化简后,得下列方程的第一式。同理,利用平衡条件 $\Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma F_z = 0$,得下列方程的第二式和第三式。

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

式(1-1)称为弹性体的平衡方程(Equations of Equilibrium)

再考虑三个力矩平衡条件,先利用 $\Sigma M_x = 0$,以连接微元体前后两面中心的直线作为矩轴,列出力矩平衡方程,则有

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

将上式化简,并略去高阶微量,可得下面的第一式。同样,利用另外两个力矩平衡条件可得下面的第二式和第三式

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1-2)$$

这证明了剪应力的互等定律。

利用了剪应力互等定律,平衡微分方程式(1-1)中仍有六个应力分量,未知应力分量的数目仍超过平衡方程的数目,要求解应力分量还必须进一步研究弹性体的变形关系及物理关系。

二、几何方程和变形协调方程

1. 几何方程

现在从几何学方面来研究应变分量和位移分量之间的关系,导出弹性力学的几何方程。

在外力作用下,弹性体发生变形。弹性体中任一点 P_0 ,变形后移到了点 P_1 ,矢量 $\overline{P_0 P_1}$ 就是点 P_0 的位移,它在三个坐标轴上的投影分别用 u, v, w 表示,它们都是坐标的函数,如图 1-4 所示。

为研究弹性体内点 P_0 处的变形,从 P_0 点取出棱边长分别为 dx, dy, dz 的正六面微元体,它在各坐标面上的投影显然都是矩形,如图 1-5 所示。弹性体变形时,微元体的棱边长度和各棱边之间的夹角都要发生变化,它们在各坐标面上的投影也将发生相应变化。通过各坐标面上的投影变化来研究微元体的变形。

首先研究微元体在 xoy 面上的投影如图 1-6 所示。变形前,线段 PA 和 PB 的长度分别为 dx 和 dy ,两线段之间成直角。变形后, P, A, B 三点分别移到 P', A', B' 。点 P 在 x 和 y 方向的位移分量分别为 u 和 v 。由于点 A 与点 P 的坐标相差 dx ,因而点 A 在 x 和 y 方向的位移分别为 $u + (\partial u / \partial x) dx$ 和 $v + (\partial v / \partial x) dx$ 。同理,点 B 沿 x 和 y 方向的位移分别为 $u + (\partial u / \partial y) dy$ 和 $v + (\partial v / \partial y) dy$ 。在小变形前提下,由于位移是微小的,沿 y 方向位移引起线段 PA 的伸缩以及

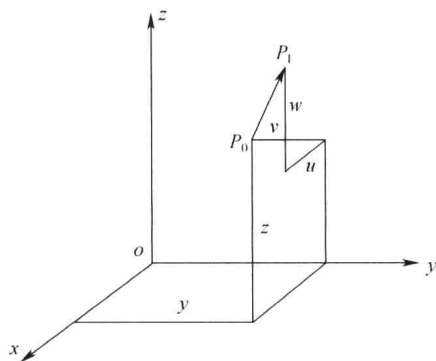


图 1-4

沿 x 方向位移引起线段 PB 的伸缩均属高一阶微量,可以略去不计。因此线段 PA 和 PB 的正应变分别为

$$\varepsilon_x = \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{P'A'' - PA}{PA} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$

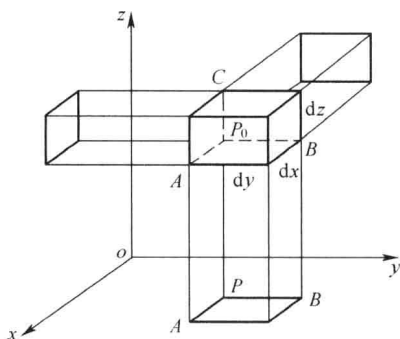


图 1-5

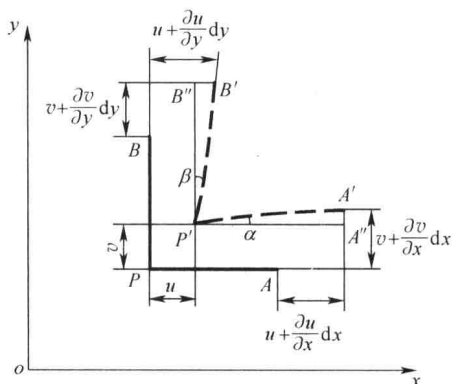


图 1-6

用同样的方法研究微元体在 xoz 或 $yozy$ 坐标面上的投影变化,可得

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (c)$$

下面来求线段 PA 和 PB 之间直角的改变,也就是点 P_0 处的剪应变 γ_{xy} 。这剪应变包括两个部分,一部分是线段 PA 向 y 轴方向的转角 α ,另一部分是线段 PB 向 x 轴方向的转角 β 。在小变形情况下,有

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A'A''}{P'A''} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$$

上式分母中的 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \ll 1$,可略去。于是上式简化为

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{B'B''}{P'B''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

因此,线段 PA 与 PB 之间的直角变化

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (d)$$

以同样的方式研究微元体在坐标面 $yozy$ 和 xoz 上的投影变化,可得线段 PB 与 PC 、 PC 与 PA 之间的直角变化,为

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (e)$$