2014

文登培训学校策划

理工社®

文登教育

Wendeng Education

陈文灯◆主　编

（经济类）

◆强调效率、注重得分、贴近考题！

考研数学综合题解题方法与技巧

◆精选内容新颖、涵盖面广、前瞻性强的综合题！

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

文登教育
Wendeng Education

文登培训学校策划

陈文灯◆主　编

(经济类)

◆强调效率、注重得分、贴近考题!

考研数学综合题解题方法与技巧

◆精选内容新颖、涵盖面广、前瞻性强的综合题

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学综合题解题方法与技巧:经济类 / 陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社,2013.7
(文登教育)
ISBN 978-7-5640-7899-7

Ⅰ.①考...　Ⅱ.①陈...　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－解题　Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 149545 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 12.5
字　　数 / 400 千字
版　　次 / 2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 25.00 元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前 言

“高等数学”、“线性代数”及“概率论与数理统计”是目前大学工科经济、管理各专业学生的重要基础课，也是硕士研究生入学考试的必考科目。

综观二十几年来的考研试题，会发现一个明显的特点：试题中包含较多综合题，它不仅出现在解答题中，也出现在选择题、填空题中。综合题是将多个知识点有机组合而成的问题。要解好综合题，必须融会贯通众多的知识点，并且需有较强的分析、综合及计算能力。因此，综合题的难度较大，成为广大考研学子拿高分的障碍。

如何提高解综合题的能力？做一定数量的综合题，是逾越这一难关的最佳途径。根据我们了解，经过综合题系统训练的考生，无论是对基本知识的理解，还是对解题方法的掌握，都较一般考生的水平高出许多，基于这一事实，我们推出《考研数学综合题解题方法与技巧（理工类）》、《考研数学综合题精讲（经济类）》系统丛书，供广大考生复习、练习使用，以尽快提高解综合题能力。

全书共分“高等数学”、“线性代数”及“概率论与数理统计”三篇，每篇又分若干章、节，每章（或节）都由“简明提要”和“例题”两部分组成，其中，“简明提要”简单地叙述该章（或节）的最主要内容；“例题”中的例子，不仅内容新颖、涵盖面广，而且前瞻性强，每个例子都通过“分析”、“详解”及“评注”作了精妙的解析和有益的拓展。

我们曾于 2005 年出版《综合题解析》一书，深受广大考研学子的欢迎，现在出版的这套丛书在《综合题解析》的基础上，经精心修订、加工和增补，更贴近考纲，更贴近考题，更贴近考生，成为考生摘取高分的又一个平台。

预祝广大考研学子在不久将来的考试中取得骄人的成绩，并请对本套丛书提出宝贵意见。

编著者

2013.6 于北京

目　　录

第 1 篇　高等数学

第 1 章　函数、极限与连续

§1.1.1　数列极限

简 明 提 要

数列极限除使用运算法则计算外，还可以借助函数极限及数列极限存在准则等计算：

1. 借助函数极限计算数列极限

设数列 $x_n = f(n), n = 1,2,\cdots$，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

这里特别要指出的是以下情形：

设数列 $x_n = \dfrac{f(n)}{g(n)}, n = 1,2,\cdots$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 0$(或 ∞)，

此时不能直接对 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ 应用洛必达法则，而应先考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$，对它应用洛必达法则.

2. 两个数列极限存在准则

准则 Ⅰ　设数列 $\{x_n\}$，如果可以找到另外两个数列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$，它们满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，且 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n = 1,2,\cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

准则 Ⅱ　如果数列 $\{x_n\}$ 单调不减(单调不增)，且有上界(有下界)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

本节给出 3 个数列极限与高等数学其他部分结合的综合题例子.

例　题

例 1.1.1　设两条曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

【分析】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right) = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}-0}$，所以只要利用题设条件算出函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 即可.

【详解】 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\arctan x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right]\Bigg|_{x=0}\text{（利用两条曲线在点(0,0)处切线相同）}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\Bigg|_{x=0} = 1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right) = 2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\dfrac{2}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{2}{n}-0} = 2\times 1 = 2.$$

【评注】（Ⅰ）本题是数列极限计算与导数定义及曲线切线等的综合题.

（Ⅱ）顺便指出曲线 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 有以下两个性质：

(a) 所给曲线在 $[0,+\infty)$ 上单调上升；

(b) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{\text{记}} A$，所以，所给曲线有水平渐近线 $y=A$.

例 1.1.2 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geqslant 0)$，

(1) 求 $f(x)(x\geqslant 0)$ 的表达式；

(2) 求 $f'(x)(x\geqslant 0)$ 的表达式.

【分析】(1) 分 $0\leqslant x\leqslant 1$，$1<x<2$ 和 $x\geqslant 2$ 三种情形计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$，即得 $f(x)$ 的表达式.

(2) 由(1)算得的 $f(x)$ 计算 $f'(x)$.

【详解】(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，由于

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3},$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，所以由数列极限存在准则 Ⅰ 得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=1$.

当 $1<x<2$ 时，由于

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3}\,x$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\,x=x$，所以由数列极限存在准则 Ⅰ 得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{1+x^n}{x^2}\right)^n+\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}=x$.

当 $x\geqslant 2$ 时，由于

$$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}<\sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}$，所以由数列极限存在准则Ⅰ得 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}$.

从而 $$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

(2) 显然，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f'(x)=0$，当 $1<x<2$ 时，$f'(x)=1$；当 $x>2$ 时，$f(x)=x$. 下面计算在 $x=1$ 与 $x=2$ 处的导数：

由于 $$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

所以，$f'(1)$ 不存在.

由于 $$f'_-(2)=\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{x-2}{x-2}=1,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\frac{x^2}{2}-2}{x-2}=2,$$

所以，$f'(2)$ 不存在.

从而 $$f'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ 1, & 1<x<2,\\ x, & x>2.\end{cases}$$

【评注】（Ⅰ）本题是数列极限与导数概念等的综合题.

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件为 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. 这一结论对判断分段函数在分段点处是否可导或计算分段函数在分段点处的导数是很有用的.

例 1.1.3 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】(1) 由于数列 $\{x_n\}$ 是由递推公式定义的，因此利用数列极限存在准则 Ⅱ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出它的值.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且令 $t=x_n$，则要计算的极限成为

$$\lim_{t\to a}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}.$$

【详解】(1) 由数列 $\{x_n\}$ 的定义知，对 $n=1,2,\cdots$，有

$$0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n,$$

即$\{x_n\}$是单调减少有下界数列，因此由极限存在准则 Ⅱ 知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \in [0,\pi)$，对

$$x_{n+1} = \sin x_n (n = 1,2,\cdots)$$

的两边令$n \to \infty$得$a = \sin a$. 在$[0,\pi)$上该方程有唯一解$a = 0$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} \xlongequal{\text{令} t = x_n} \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin t}{t}}{t^2}}. \qquad ①$$

将 ① 中的t看作连续变量，则有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\right]}{t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t^2} =$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t - t}{t^3} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t - 1}{3t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = -\frac{1}{6}. \qquad ②$$

将 ② 代入 ① 得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

【评注】(Ⅰ) 本题是数列极限与函数极限(未定式) 计算的综合题.

(Ⅱ) 当数列$\{x_n\}$由递推公式定义时，一般总是利用数列极限存在准则 Ⅱ 确定$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$的存在，有时还能通过对递推公式两边求极限得到$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$的值.

(Ⅲ) 本题(2) 最后归结为计算"1^∞"型未定式极限. 在计算过程中，以下三点值得注意：

(a) 利用$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\frac{\ln\frac{\sin t}{t}}{t^2}}$将计算"$1^\infty$"型未定式的极限转化为计算"$\frac{0}{0}$"型未定式极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}{t^2}.$$

(b) 两次利用等价无穷小代替：$t \to 0^+$时，

$$\ln\left[1+\left(\frac{\sin t}{t}-1\right)\right] \sim \frac{\sin t}{t} - 1, \cos t - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2$$

使得计算简化.

(c) 对"$\frac{0}{0}$"型未定式极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t - t}{t^3}$使用洛必达法则.

§1.1.2 函数极限

简明提要

函数极限中最主要的是未定式极限的计算. 未定式共有七种:

$$“\frac{0}{0}”,“\frac{\infty}{\infty}”,“\infty-\infty”,“0\cdot\infty”,“1^{\infty}”,“0^{0}” 以及“\infty^{0}”.$$

1. “$\frac{0}{0}$”型未定式极限有三种常用计算方法

(1) 利用重要极限. 重要极限有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\left(或\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right).$$

此外,以下三个极限也是常用的.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1,\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$$

(2) 等价无穷小代替. 这一方法的理论基础是:

设 $\alpha(x),\beta(x),\alpha_1(x),\beta_1(x)$ 都是在自变量 x 的某个变化过程中的无穷小,且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$. 如果在自变量 x 的这个变化过程中,$\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或无穷大,则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

常用的等价无穷小有:$x\to0$ 时

$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x$,

$\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^{x}-1\sim x,(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x(\mu\neq0),1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$.

注 当函数 $f(x)$ 比较复杂,它的等价无穷小不易找到时,可以利用泰勒公式.

(3) 使用洛必达法则. “$\frac{0}{0}$”型洛必达法则简述如下:

设在自变量 x 的某个变化过程中,有 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$,如果在 x 的这个变化过程中有 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大,则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. “$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限有两种计算方法

(1) 将“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限转化为“$\frac{0}{0}$”型未定式极限.

(2) 使用洛必达法则. “$\frac{\infty}{\infty}$”型洛必达法则简述如下:

设在自变量 x 的某个变化过程中有 $\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$,如果在 x 的这个变化过程中有 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大,则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3. 其他五种未定式极限

其他五种未定式极限都可通过函数的恒等变形或变量代换转化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限，然后按“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式极限计算方法计算.

本节给出 5 个未定式极限计算与高等数学其他部分相结合的综合题例子.

例 题

例 1.1.4 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

【分析】 由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以 $x\to 0$ 时，

$$\ln[1+2f(x)]\sim 2f(x).$$

由此即可算得所求的极限.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+2f(x)]}{\ln(1+x)}}$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+2f(x)]}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{x}$（由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，所以 $\ln[1+f(x)]\sim f(x)(x\to 0)$）

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)=2\times 1=2,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\mathrm{e}^2$.

【评注】（Ⅰ）本题是函数极限与导数定义等的综合题.

（Ⅱ）本题的极限计算有以下两点值得注意：

(a) 利用 $f(x)$ 连续和 $f(0)=0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，即 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小，从而有

$$\ln[1+2f(x)]\sim 2f(x)(x\to 0).$$

(b) 由于 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导，所以对极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)}{x}$ 不能使用洛必达法则，而要利用导数定义计算.

例 1.1.5 设二元函数 $f(x,t)=\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\,\mathrm{d}y}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}\ (x>0,t>0)$.

(1) 求函数 $I(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)(t>0)$ 的表达式；

(2) 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}I(t)$.

【分析】(1) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,t)$ 时应注意的是，$f(x,t)$ 中只有分母与 x 有关.

(2) 为了计算 $\lim\limits_{t\to 0^+}I(t)$，应通过交换积分次序将它的分子部分 $\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\,\mathrm{d}y$ 的 t 集中到外层积分的上限，以便使用洛必达法则.

【详解】(1) 由于对 $t>0$ 有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)},$$

其中，$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left[1-\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)\right]}{\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)}{\dfrac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{1}{t^2}}{1+\left(\dfrac{x}{t^2}\right)^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}t^2,$$

所以，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{x}{t^2}\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}t^2}\ (t>0)$，从而

$$I(t)=\lim_{x\to+\infty}f(x,t)=\frac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^t\sin y^2dy}{\left(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1\right)\arctan t^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) 由于 $\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^t\sin y^2dy=\iint\limits_D\sin y^2dy$（其中 $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant t,0\leqslant x\leqslant\sqrt{t}\}=$

$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant t\}$）

$$=\int_0^t dy\int_0^{\sqrt{y}}\sin y^2dx=\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy.$$

此外，$\left(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1\right)\arctan t^{\frac{3}{2}}\sim-\dfrac{2}{\pi}t^2\cdot t^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}\ (t\to0^+)$，

所以，$\lim\limits_{t\to0^+}I(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^t\sin y^2dy}{\left(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1\right)\arctan t^{\frac{3}{2}}}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy}{-\dfrac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t}\sin t^2}{-\dfrac{7}{\pi}t^{\frac{5}{2}}}=-\frac{\pi}{7}.$$

【评注】(Ⅰ) 本题是未定式极限计算、积分上限函数求导及二次积分交换积分次序等的综合题.

(Ⅱ) 本题的核心问题是计算未定式的极限，在题解中运用了计算未定式极限的两个常用技巧：

(a) 计算"1^∞"，"0^0"和"∞^0"型未定式极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$，按以下方法转化成计算"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式极限：

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}};$$

(b) 计算"$\frac{0}{0}$"型未定式极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 时，一般先对 $f(x)$ 或 $g(x)$ 用等价无穷小代替，然后再考虑用洛必达法则.

本题解答中，有两处使用了等价无穷小代替：

$\ln\left[1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{t^2}\right)\right] \sim -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{t^2}\right)(x \to +\infty)$, $(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}} \sim -\frac{2}{\pi}t^2 \cdot t^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}(t \to 0^+)$.

但是，当 $f(x)$ 或 $g(x)$ 是积分上限函数时，则应首先使用洛必达法则，目的是消去 $f(x)$ 或 $g(x)$ 中的积分运算.

例 1.1.6 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$，求

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$；

(2) 二阶导数 $f''(0)$.

【分析】(1) 由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，因此由

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}$$

知，只要算出极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ 即可.

(2) 对(1)算得的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$，由洛必达法则可得 $f''(0)$ 的值.

【详解】(1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$ 知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，所以

$$e^3 = \lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}} = e^{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}.$$

由此得到
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2. \qquad ①$$

从而
$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}} = e^2.$$

(2) 由(1)推得的 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，可以得到

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0, f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

于是由 ① 得

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} \xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{1}{2}f''(0),$$

即 $f''(0)=4$.

【评注】(Ⅰ) 本题是关于抽象函数 $f(x)$ 的未定式极限计算和二阶导数计算的综合题.

(Ⅱ) 在本题的假设下，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$ 按如下方法计算 $f''(0)$ 是错误的：

$$2=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}f''(x)=\frac{1}{2}f''(0),$$

所以 $f''(0)=4$.

这是因为 $f(x)$ 仅在点 $x=0$ 处二阶可导，所以 $f''(x)$ 在 $x\neq0$ 处未必存在，因此对极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}$ 不能应用洛必达法则.

例 1.1.7　设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，且它的图形在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$，求极限

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^tf(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t}{x^2\ln\cos x}.$$

【分析】先用变量代换将 x 从积分 $\int_0^{x^2}\mathrm{e}^tf(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$ 的被积函数中移出，并对分母 $x^2\ln\cos x$ 作等价无穷小代替，然后利用洛必达法则和导数定义计算 I.

【详解】由于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x-1$，所以有

$$f(1)=0,f'(1)=1.$$

下面计算极限 I：由于

$$\int_0^{x^2}\mathrm{e}^tf(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }u=1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t}\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u,$$

$$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2\ (x\to0),$$

所以，
$$I=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^tf(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t}{x^2\ln\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{\mathrm{e}^{x^2}}f(u)\mathrm{d}u}{x^2\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})\cdot\mathrm{e}^{x^2}\cdot2x}{-2x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{x^2}\xlongequal{\text{令 }z=x^2}-\lim_{z\to0}\frac{f(\mathrm{e}^z)-f(1)}{z}$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(\mathrm{e}^z)\Big|_{z=0}=-f'(\mathrm{e}^z)\mathrm{e}^z\Big|_{z=0}=-1\text{(利用 }f'(1)=1\text{)}.$$

【评注】(Ⅰ) 本题是未定式极限计算与导数定义、曲线切线及积分上限函数求导等的综合题.

(Ⅱ) 题解中有以下两点值得注意：

(a) 在计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\mathrm{e}^tf(1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$ 时，应先利用变量代换 $u=1+\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^t$ 将 x 从被积函数中移出；

(b) 由于 $f(x)$ 仅在点 $x=1$ 处可导，所以计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{e}^{x^2})}{x^2}$ 时应利用导数定义，而不能使用洛必达法则.

例 1.1.8 设函数 $f(x)$ 可导，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=c$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)],$$

求常数 b,c.

【分析】利用拉格朗日中值定理知，所给等式右边极限为 c，然后对所给等式左边极限使用洛必达法则，并令其等于 c，由此即可算得 b,c 的值.

【详解】由于 $f(x)$ 可导，所以由拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(x,x+1)$，使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi).$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=c$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{bx-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c.$$

对上式左边极限使用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{b-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=c，即\lim_{x\to 0}\frac{b-\cos x}{x^2}=c.$$

由此可知，$\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$，即 $b=1$. 从而

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

【评注】（Ⅰ）本题是未定式极限计算与微分中值定理、积分上限函数求导等的综合题.

（Ⅱ）本题实质上是在已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c$ 的条件下，确定常数 b 和 c，这是未定式极限的另一种题型.

一般说来，未定式极限有以下三种题型：

(a) 计算具体函数的未定式极限；

(b) 在抽象函数的某些假定条件下，计算关于这个抽象函数的未定式极限；

(c) 在已知未定式极限存在的条件下，确定含于这个未定式中常数的值，并计算这个未定式极限.

§1.1.3 函数连续性

简 明 提 要

1. 函数连续性的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \text{ 或 } \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左半邻域,即$(x_0-\delta,x_0]$(或右半邻域,即$[x_0,x_0+\delta)$)上有定义,如果
$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\text{(或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\text{)},$$
则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续(或右连续).

如果函数 $f(x)$ 在区间(a,b)的每点都连续,则称 $f(x)$ 在(a,b)内连续.

如果函数 $f(x)$ 在(a,b)内连续,且在点 $x=a$ 处右连续和在点 $x=b$ 处左连续,则称 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续.

2. 闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值和最小值.(最大值最小值定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则对任意介于 $A=f(a)$,$B=f(b)$($A\neq B$)之间的实数 C,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=C$.(介值定理)

设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.(零点定理)

本节给出3个函数连续性与高等数学其他部分结合的综合题例子.

例 题

例 1.1.9 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$,$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$,试补充定义 $f(1)$,使 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上连续.

【分析】由函数连续概念知,只要定义 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 即可.

【详解】显然,$f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right)$上连续,所以欲使 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上连续,只要定义 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$.下面计算$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\sin x\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{\pi[-\sin\pi x+\pi(1-x)\cos\pi x]}\\&=\frac{1}{\pi}-\lim_{x\to1^-}\frac{1+\cos\pi x}{-\sin\pi x+\pi(1-x)\cos\pi x}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{-\pi\sin\pi x}{-\pi\cos\pi x-\pi\cos\pi x-\pi^2(1-x)\sin\pi x}=\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

于是,只要定义 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}$ 就得 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上连续.

【评注】(Ⅰ)本题是函数连续性概念与未定式极限计算等的综合题.

(Ⅱ)题解中的极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\left[\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}\right]$ 是"$\infty-\infty$"型未定式. 这类未定式极限通常通过通分、变量代换等转化为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"未定式极限进行计算.

例 1.1.10 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 可导,且在点 $x=0$ 处二阶可导,以及 $\varphi(0)=1$.

(1) 确定 a 的值,使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

【分析】(1) 利用 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ 确定 a 的值.

(2) 由求导公式计算 $f'(x)(x\neq0)$,并由导数定义计算 $f'(0)$.

(3) 由(2)求得的 $f'(x)$,考虑它在点 $x=0$ 处的连续性.

【详解】(1) 欲使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,必须

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0),\text{即}\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}=a,$$

于是 $a=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to0}[\varphi'(x)+\sin x]=\varphi'(0)$.

(2) 当 $x\neq0$ 时,

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}\right]=\frac{[\varphi'(x)+\sin x]x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}. \quad ①$$

此外,

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}\text{(利用(1))}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\varphi''(0)+\frac{1}{2}.\end{aligned} \quad ②$$

(3) 对 ① 的两边令 $x\to0$,取极限得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f'(x)&=\lim_{x\to0}\frac{[\varphi'(x)+\sin x]x-[\varphi(x)-\cos x]}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)+\cos x}{x^2}+1\\&=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{x\varphi'(0)-\varphi(x)+\cos x}{x^2}+1\end{aligned}$$