分析力学（下卷）

Analytical Mechanics（Ⅱ）

梅凤翔　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

分析力学（下卷）

Analytical Mechanics（Ⅱ）

梅凤翔　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书全面系统地论述分析静力学和分析动力学，包括约束及其分类，广义坐标与准坐标，虚位移与自由度，理想约束，虚位移原理，运动学基础，d'Alembert-Lagrange 原理，Lagrange 方程，Lagrange 方程的应用(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)，Hamilton 方程，Hamilton 方程的积分，非完整系统，Birkhoff 系统，场积分方法，势积分方法，Jacobi 最终乘子法，Noether 对称性方法，Lie 对称性方法，形式不变性方法，Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法，力学系统与梯度系统，动力学逆问题，力学的变分原理等。

本书可作为高等学校力学、数学、物理学，以及工程专业高年级本科生和研究生的教学参考书，亦可供有关教师、力学工作者和科技人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

分析力学：全2册 / 梅凤翔编著. — 北京：北京理工大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5640-7877-5

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①梅… Ⅲ. ①分析力学-研究 Ⅳ. ①O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145348 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /(010)68914775(总编室)
　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 /710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 /42.5
字　　数 /784 千字
版　　次 /2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 /98.00 元(上、下卷)

责任编辑/王玲玲
文案编辑/王玲玲
责任校对/周瑞红
责任印刷/王美丽

目　录(下卷)

14

非完整系统

1894 年德国物理学家 Hertz H(1857—1894)首次提出将约束和系统分成完整的和非完整的两大类。非完整系统与完整系统的差别在于,完整系统的运动可用第二类 Lagrange 方程来描述,而非完整系统需用更复杂的微分方程来表征。非完整力学的奠基性工作,有 Чаплыгин СА(1869—1942),Volterra V(1860—1940),Appell P(1855—1930),Воронец ПВ(1871—1923),Hamel G(1877—1954)等的工作。

§14.1 基本概念

分析力学的基本概念有约束及其分类、广义坐标和广义速度、准坐标和准速度、虚位移与自由度、理想约束等,这些已在第 1 章至第 4 章介绍过。对非完整系统来说,约束对虚位移的限制,以及微分运算与变分运算的交换关系等问题尤显重要。

14.1.1 约束对虚位移的限制

不可积分的微分约束称为**非完整约束**。至少有一个非完整约束的系统称为**非完整系统**。一般说来,非完整约束是靠接触、靠摩擦来实现的,例如,冰刀不允许横滑[1]、尖缘小轮和带横纹的小轮[1]、两个轴相联结的轮子[2]、滚球[2]、滚盘[2]、三圆柱系统[1]、四轮小车[3]、三轮桌台[4],等等。这些都是物理实现明显的、线性非完整约束。为得到线性非完整约束加在虚位移上的条件,通常采用 Hölder 原则:将约束方程写成微分形式,用 δ 代替 d,并令 $\delta t=0$。

1911 年 Appell[5] 和 Delassus[6] 开始研究非线性非完整约束。Appell 给出一个例子,这个例子已成为经典,并还在研究[7-9]。对 Appell 例 $a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\dot{z}^2=0$,如采用 Hölder 原则,则虚位移满足

$$a^2[(\delta x)^2+(\delta y)^2]-(\delta z)^2=0$$

在利用 d'Alembert-Lagrange 原理推导运动微分方程时，这样的虚位移方程是不行的。于是，对非线性非完整约束，怎样给出约束对虚位移的限制条件就出现了困难。1933 年 Четаев НГ(1902—1959)提出一个条件，称为 Четаев 条件。对一般的非线性非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1,2\cdots,g) \tag{14.1.1}$$

虚位移 $\delta\boldsymbol{q}$ 满足

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \tag{14.1.2}$$

假设约束(14.1.1)是理想的，再加上条件(14.1.2)，便可利用 d'Alembert-Lagrange原理来导出非线性非完整系统的运动微分方程了。

Румянцев ВВ(1921—2007)在 20 世纪 70 年代末曾在法国南特高等机械工程学校(École Nationalle Superièure de Mécanique)作学术报告，其中讲到 Четаев 条件。1981 年春天，本书作者在该校进修时也讲到 Четаев 条件。该校校长，也是作者的指导教师 Pironneau Y(1923—1983)教授，认为这个条件是人为强加的。他认为对非线性非完整约束问题有无穷多个解。他与作者讨论过三次。一次，他举一个例子：一单位质量质点在平面 Oxy 上运动，受速度大小为常数的非完整约束

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2$$

则点的虚位移是 $\delta z=0$，δx，δy 任意，Четаев 条件不对。作者的意见是 Четаев 条件也对。例如，在主动力为零下的运动，按 Четаев 条件，微分方程为

$$\ddot{x} = 2\lambda\dot{x}, \qquad \ddot{y} = 2\lambda\dot{y}$$

其中 λ 为约束乘子，则有

$$0=\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 2\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

于是 $\lambda=0$。方程成为

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0$$

这与 δx，δy 任意是一样的。

条件(14.1.2)也称为 Appell-Четаев 定义，或 Gauss-Appell-Четаев 假定[10]。

14.1.2 微分运算 d 与变分运算 δ 的交换关系

非完整力学中的**交换关系**，或称“过渡方程”，即微分运算 d 和变分运算 δ 的交换性问题，是非完整力学的基本问题之一[11,12]。研究这一问题的重要性，不仅在于利用交换关系可以推导系统的运动微分方程，还在于交换关系与 Hamilton 原理能否应用于非完整系统，以及 Hamilton-Jacobi 经典积分方法能否应用于非完整系统等问题密切相关。

历史上，对交换关系的形式有两种观点：一种认为 d，δ 总可以交换，不论约

束完整与否，代表人物是 Hölder OL(1859—1937)；另一种观点则认为 d，δ 的交换性仅对完整系统才成立，代表人物是 Суслов ГК(1857—1935)，Levi-Civita T(1873－1941)。1961 年 Лурье 指出，dδ＝δd 是采用变分法则的结果，可以采用其他法则使等式不成立[3]。1966 年 Новосёлов 指出，交换关系的 Hölder 形式和 Суслов 形式都可应用于非完整系统 Hamilton 原理的研究[13]。

下面在 **Четаев 条件**下导出非完整系统的交换关系。设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_\sigma,t) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\varepsilon=n-g) \tag{14.1.3}$$

按 Четаев 条件，虚位移满足

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{14.1.4}$$

将式(14.1.4)对 t 求导数，对式(14.1.3)取变分，并将所得结果相减，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_\sigma)-\delta\dot{q}_\sigma\right]+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \tag{14.1.5}$$

其中

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}-\sum_{\gamma=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{14.1.6}$$

考虑到对独立的 δq_σ，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_\sigma-\delta\dot{q}_\sigma=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{14.1.7}$$

则式(14.1.5)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.8}$$

称式(14.1.7)，式(14.1.8)为 Суслов 观点下的交换关系。这表明，对与独立广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 相应的坐标 q_σ，d 与 δ 运算可以交换；而对与不独立的广义速度 $\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$ 相应的坐标 $q_{\varepsilon+\beta}$，d 与 δ 运算不能交换，而由式(14.1.8)决定。

特别地，对于线性非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}B_{\varepsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma+B_{\varepsilon+\beta} \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.9}$$

式(14.1.8)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_{\varepsilon+\beta})-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}t_\sigma^{\varepsilon+\beta}\delta q_\sigma \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{14.1.10}$$

其中