

分析力学 (下卷)

Analytical Mechanics (II)

梅凤翔 编著

分析力学(下卷)

Analytical Mechanics(II)

梅凤翔 编著



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书全面系统地论述分析静力学和分析动力学,包括约束及其分类,广义坐标与准坐标,虚位移与自由度,理想约束,虚位移原理,运动学基础,d'Alembert-Lagrange 原理,Lagrange 方程,Lagrange 方程的应用(I)、(II)、(III),Hamilton 方程,Hamilton 方程的积分,非完整系统,Birkhoff 系统,场积分方法,势积分方法,Jacobi 最终乘子法,Noether 对称性方法,Lie 对称性方法,形式不变性方法,Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法,力学系统与梯度系统,动力学逆问题,力学的变分原理等。

本书可作为高等学校力学、数学、物理学,以及工程专业高年级本科生和研究生的教学参考书,亦可供有关教师、力学工作者和科技人员参考使用。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

分析力学:全2册 / 梅凤翔编著. — 北京:北京理工大学出版社, 2013. 7

ISBN 978-7-5640-7877-5

I. ①分… II. ①梅… III. ①分析力学-研究 IV. ①O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145348 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市市中画美凯印刷有限公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 42.5

字 数 / 784 千字

版 次 / 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

定 价 / 98.00 元(上、下卷)

责任编辑/王玲玲

文案编辑/王玲玲

责任校对/周瑞红

责任印刷/王美丽

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

目 录(下卷)

14 非完整系统	309
§ 14.1 基本概念	309
14.1.1 约束对虚位移的限制	309
14.1.2 微分运算 d 与变分运算 δ 的交换关系	310
14.1.3 d, δ 交换关系, 满足约束的可能轨道与 Четаев 条件三者的协调性	312
§ 14.2 运动微分方程	313
14.2.1 d'Alembert-Lagrange 原理的各种表达	313
14.2.2 带乘子的方程	313
14.2.3 Чаплыгин 方程	314
14.2.4 Boltzmann-Hamel 方程	316
14.2.5 Appell 方程	318
14.2.6 关于 Lindelöf 方程	319
§ 14.3 积分方法	322
14.3.1 非完整系统的循环积分及其降阶法	322
14.3.2 非完整系统的能量积分及其降阶法	324
14.3.3 Jacobi 方法	329
§ 14.4 专门问题	332
14.4.1 非完整系统平衡状态附近的小振动	332
14.4.2 相对运动动力学	336
14.4.3 打击运动	339
14.4.4 变质量系统	343
思考题	345
习题	346
参考文献	346
15 Birkhoff 系统	348
§ 15.1 Pfaff-Birkhoff 原理	348
15.1.1 Birkhoff 的贡献	348

15.1.2	Santilli 的总结	349
15.1.3	Pfaff-Birkhoff 原理	349
15.1.4	Pfaff-Birkhoff 原理的推广	350
§ 15.2	Birkhoff 方程	350
15.2.1	Birkhoff 方程的导出	350
15.2.2	Birkhoff 方程的形式	352
15.2.3	Birkhoff 方程的性质	353
15.2.4	广义 Birkhoff 方程	355
§ 15.3	Birkhoff 函数的构造	356
15.3.1	Santilli 第一方法	356
15.3.2	Santilli 第二方法	356
15.3.3	Hojman 方法	357
15.3.4	自治系统 Birkhoff 函数的构造	357
15.3.5	构造 Birkhoff 表示的困难	359
§ 15.4	Birkhoff 方程的积分	362
15.4.1	经典积分及降阶法	362
15.4.2	Poisson 方法	367
15.4.3	变换理论	370
15.4.4	积分不变量	373
§ 15.5	专门问题	374
15.5.1	完整系统的 Birkhoff 动力学	374
15.5.2	非完整系统的 Birkhoff 动力学	376
15.5.3	约束 Birkhoff 系统	379
15.5.4	平衡稳定性	382
思考题		385
习题		385
参考文献		387
16	场积分方法	388
§ 16.1	求解常微分方程的场方法	388
16.1.1	场方法	388
16.1.2	应用	390
§ 16.2	完整系统的场方法	391
16.2.1	运动微分方程	391
16.2.2	场方法的应用	391
§ 16.3	非完整系统的场方法	393

16.3.1 运动微分方程	393
16.3.2 应用举例	395
§ 16.4 Birkhoff 系统的场方法	400
16.4.1 运动微分方程	400
16.4.2 应用举例	400
思考题	403
习题	403
参考文献	404
17 势积分方法	405
§ 17.1 势积分方法介绍	405
17.1.1 势积分方法	405
17.1.2 势积分方法的简单应用	407
§ 17.2 完整系统的势积分方法	408
17.2.1 系统的运动微分方程	408
17.2.2 应用举例	408
§ 17.3 非完整系统的势积分方法	412
17.3.1 系统的运动微分方程	412
17.3.2 应用举例	413
§ 17.4 Birkhoff 系统的势积分方法	415
17.4.1 系统的运动微分方程	415
17.4.2 应用举例	416
思考题	418
习题	418
参考文献	419
18 Jacobi 最终乘子法	420
§ 18.1 一般微分方程组的 Jacobi 最终乘子	420
18.1.1 最终乘子	420
18.1.2 由两个乘子导出积分	421
18.1.3 对 Lagrange 力学逆问题的应用	421
18.1.4 应用举例	422
§ 18.2 Hamilton 系统的最终乘子	423
18.2.1 最终乘子对 Hamilton 系统的应用	423
18.2.2 二自由度情形	424
18.2.3 应用举例	426

4 ■ 分析力学(下卷)

§ 18.3 广义 Hamilton 系统的最终乘子	427
18.3.1 系统的最终乘子	427
18.3.2 应用举例	428
§ 18.4 Birkhoff 系统的最终乘子	431
18.4.1 系统的最终乘子	431
18.4.2 广义 Birkhoff 方程的最终乘子	433
18.4.3 应用举例	434
思考题	438
习题	438
参考文献	439
19 Noether 对称性方法	440
§ 19.1 Lagrange 系统	440
19.1.1 运动微分方程	440
19.1.2 Noether 对称性	441
19.1.3 Noether 守恒量	443
19.1.4 应用举例	443
§ 19.2 Hamilton 系统	445
19.2.1 运动微分方程	446
19.2.2 Noether 对称性	446
19.2.3 Noether 守恒量	448
19.2.4 应用举例	449
§ 19.3 一般完整系统	450
19.3.1 运动微分方程	450
19.3.2 Noether 对称性	450
19.3.3 Noether 守恒量	451
19.3.4 应用举例	451
§ 19.4 Четаев 型非完整系统	452
19.4.1 运动微分方程	452
19.4.2 Noether 对称性	453
19.4.3 Noether 守恒量	454
19.4.4 应用举例	454
§ 19.5 Birkhoff 系统	457
19.5.1 运动微分方程	457
19.5.2 Noether 对称性	458
19.5.3 Noether 守恒量	460

19.5.4 应用举例	460
§ 19.6 弱 Noether 对称性与守恒量	462
19.6.1 Lagrange 系统	462
19.6.2 Hamilton 系统	464
19.6.3 一般完整系统	465
19.6.4 Четаев 型非完整系统	466
19.6.5 Birkhoff 系统	467
思考题	468
习题	469
参考文献	470
 20 Lie 对称性方法	 472
§ 20.1 Lagrange 系统	472
20.1.1 运动微分方程	472
20.1.2 Lie 对称性	472
20.1.3 Hojman 型守恒量	473
20.1.4 Noether 守恒量	474
20.1.5 应用举例	475
§ 20.2 Hamilton 系统	476
20.2.1 运动微分方程	476
20.2.2 Lie 对称性	477
20.2.3 Hojman 型守恒量	478
20.2.4 Noether 守恒量	478
20.2.5 应用举例	478
§ 20.3 一般完整系统	480
20.3.1 运动微分方程	480
20.3.2 Lie 对称性	480
20.3.3 Hojman 型守恒量	481
20.3.4 Noether 守恒量	481
20.3.5 应用举例	481
§ 20.4 Четаев 型非完整系统	484
20.4.1 运动微分方程	484
20.4.2 Lie 对称性	485
20.4.3 Hojman 型守恒量	485
20.4.4 Noether 守恒量	486
20.4.5 应用举例	487

§ 20.5 Birkhoff 系统	488
20.5.1 运动微分方程	488
20.5.2 Lie 对称性	489
20.5.3 Hojman 型守恒量	490
20.5.4 Noether 守恒量	491
20.5.5 应用举例	492
§ 20.6 广义 Hamilton 系统	493
20.6.1 运动微分方程	493
20.6.2 Lie 对称性	494
20.6.3 Hojman 型守恒量	494
20.6.4 Noether 守恒量	495
20.6.5 应用举例	496
思考题	497
习题	497
参考文献	498
 21 形式不变性方法	 500
§ 21.1 Lagrange 系统	500
21.1.1 运动微分方程	500
21.1.2 形式不变性	500
21.1.3 新型守恒量	501
21.1.4 Noether 守恒量	502
21.1.5 Hojman 型守恒量	502
21.1.6 应用举例	503
§ 21.2 Hamilton 系统	505
21.2.1 运动微分方程	505
21.2.2 形式不变性	505
21.2.3 新型守恒量	506
21.2.4 Noether 守恒量	506
21.2.5 Hojman 型守恒量	507
21.2.6 应用举例	507
§ 21.3 一般完整系统	509
21.3.1 运动微分方程	509
21.3.2 形式不变性	510
21.3.3 新型守恒量	510
21.3.4 Noether 守恒量	511

21.3.5	Hojman 型守恒量	511
21.3.6	应用举例	512
§ 21.4	Чераев 型非完整系统	514
21.4.1	运动微分方程	514
21.4.2	形式不变性	515
21.4.3	新型守恒量	516
21.4.4	Noether 守恒量	516
21.4.5	Hojman 型守恒量	517
21.4.6	应用举例	517
§ 21.5	Birkhoff 系统	521
21.5.1	运动微分方程	521
21.5.2	形式不变性	522
21.5.3	新型守恒量	522
21.5.4	Noether 守恒量	523
21.5.5	Hojman 型守恒量	523
21.5.6	应用举例	524
§ 21.6	广义 Hamilton 系统	526
21.6.1	运动微分方程	526
21.6.2	形式不变性	526
21.6.3	新型守恒量	527
21.6.4	Hojman 型守恒量	527
21.6.5	应用举例	528
思考题		530
习题		530
参考文献		531
22	Lagrange 对称性方法与 Birkhoff 对称性方法	533
§ 22.1	Lagrange 系统	533
22.1.1	运动微分方程	533
22.1.2	Lagrange 对称性的定义和判据	534
22.1.3	Lagrange 对称性导致的守恒量	534
22.1.4	应用举例	537
§ 22.2	一般完整系统	539
22.2.1	运动微分方程	539
22.2.2	Lagrange 对称性的定义和判据	539
22.2.3	Lagrange 对称性导致的守恒量	540

22.2.4 应用举例	540
§ 22.3 有多余坐标完整系统	541
22.3.1 运动微分方程	541
22.3.2 Lagrange 对称性的定义和判据	542
22.3.3 Lagrange 对称性导致的守恒量	543
22.3.4 应用举例	543
§ 22.4 相对运动动力学系统	544
22.4.1 运动微分方程	544
22.4.2 Lagrange 对称性的定义和判据	544
22.4.3 Lagrange 对称性导致的守恒量	545
22.4.4 应用举例	545
§ 22.5 变质量完整系统	546
22.5.1 运动微分方程	546
22.5.2 Lagrange 对称性的定义和判据	547
22.5.3 Lagrange 对称性导致的守恒量	547
22.5.4 应用举例	548
§ 22.6 非完整系统	549
22.6.1 运动微分方程	549
22.6.2 Lagrange 对称性的定义和判据	549
22.6.3 Lagrange 对称性导致的守恒量	550
22.6.4 应用举例	551
§ 22.7 Birkhoff 系统的 Birkhoff 对称性	553
22.7.1 运动微分方程	553
22.7.2 Birkhoff 对称性的定义和判据	554
22.7.3 Birkhoff 对称性导致的守恒量	554
22.7.4 应用举例	558
思考题	561
习题	562
参考文献	562
23 力学系统与梯度系统	564
§ 23.1 梯度系统与斜梯度系统	564
23.1.1 微分方程	564
23.1.2 梯度系统的性质	565
23.1.3 斜梯度系统的性质	565
§ 23.2 Lagrange 系统与梯度系统	565

23.2.1	运动微分方程	565
23.2.2	化成梯度系统	566
23.2.3	稳定性	566
23.2.4	化成斜梯度系统	566
23.2.5	应用举例	567
§ 23.3	Hamilton 系统与梯度系统	568
23.3.1	运动微分方程	568
23.3.2	化成梯度系统	568
23.3.3	稳定性	568
23.3.4	化成斜梯度系统	569
23.3.5	应用举例	569
§ 23.4	一般完整系统与梯度系统	569
23.4.1	运动微分方程	570
23.4.2	化成梯度系统	570
23.4.3	稳定性	570
23.4.4	化成斜梯度系统	571
23.4.5	应用举例	571
§ 23.5	Birkhoff 系统与梯度系统	573
23.5.1	运动微分方程	573
23.5.2	化成梯度系统	574
23.5.3	稳定性	574
23.5.4	化成斜梯度系统	574
23.5.5	应用举例	575
§ 23.6	广义 Hamilton 系统与梯度系统	577
23.6.1	运动微分方程	577
23.6.2	化成梯度系统	578
23.6.3	稳定性	578
23.6.4	化成斜梯度系统	578
23.6.5	应用举例	578
思考题		580
习题		580
参考文献		581
24	动力学逆问题	582
§ 24.1	完整系统	582
24.1.1	广义坐标中 Lagrange 方程的建立	582

24.1.2	按给定的一个积分确定广义力	584
24.1.3	Noether 对称性与动力学逆问题	587
24.1.4	Poisson 方法与动力学逆问题	591
§ 24.2	非完整系统	593
24.2.1	运动方程的组建	593
24.2.2	运动方程的修改	596
24.2.3	Bertrand 定理的推广	599
24.2.4	Noether 对称性与动力学逆问题	603
§ 24.3	Birkhoff 系统	606
24.3.1	运动方程的组建	606
24.3.2	Noether 对称性与动力学逆问题	609
24.3.3	根据 Pfaff-Birkhoff-d'Alembert 原理组建运动方程	612
24.3.4	Poisson 方法与动力学逆问题	614
思考题		615
习题		615
参考文献		616
25	力学的变分原理	618
§ 25.1	d'Alembert-Lagrange 原理	618
25.1.1	d'Alembert 原理	618
25.1.2	虚位移原理	619
25.1.3	d'Alembert-Lagrange 原理的表述	619
25.1.4	d'Alembert-Lagrange 原理在广义坐标中的表达	619
§ 25.2	Jourdain 原理	620
25.2.1	Jourdain 原理的表述	620
25.2.2	Jourdain 原理在广义坐标中的表达	621
§ 25.3	Gauss 原理	621
25.3.1	Gauss 原理的表述	621
25.3.2	Gauss 原理在广义坐标中的表达	622
§ 25.4	Hamilton 原理	623
25.4.1	Hamilton 原理的表述	623
25.4.2	一般完整系统的 Hamilton 原理	624
25.4.3	Hamilton 原理应用于近似计算	624
25.4.4	Hamilton 原理的极值特性	626
25.4.5	非完整系统的 Hamilton 原理	627
25.4.6	Суслов 例与 Pars 例	628

§ 25.5 Lagrange 原理	630
25.5.1 Lagrange 原理的表述	630
25.5.2 Lagrange 原理的其他形式	631
§ 25.6 Pfaff-Birkhoff 原理	633
25.6.1 Pfaff-Birkhoff 原理的表述	633
25.6.2 Hamilton 原理是 Pfaff-Birkhoff 原理的特例	633
25.6.3 Pfaff-Birkhoff 原理与 Birkhoff 方程	634
25.6.4 Pfaff-Birkhoff 原理的一个推广	634
§ 25.7 力学变分原理发展简史	635
25.7.1 力学变分原理的发展	635
25.7.2 力学与物理学中变分原理的含义和意义	635
思考题	636
习题	637
参考文献	637
 索 引	 639

1894 年德国物理学家 Hertz H(1857—1894)首次提出将约束和系统分成完整的和非完整的两大类。非完整系统与完整系统的差别在于,完整系统的运动可用第二类 Lagrange 方程来描述,而非完整系统需用更复杂的微分方程来表征。非完整力学的奠基性工作,有 Чаплыгин СА(1869—1942),Volterra V(1860—1940),Appell P(1855—1930),Воронец ПВ(1871—1923),Hamel G(1877—1954)等的工作。

§ 14.1 基本概念

分析力学的基本概念有约束及其分类、广义坐标和广义速度、准坐标和准速度、虚位移与自由度、理想约束等,这些已在第 1 章至第 4 章介绍过。对非完整系统来说,约束对虚位移的限制,以及微分运算与变分运算的交换关系等问题尤显重要。

14.1.1 约束对虚位移的限制

不可积分的微分约束称为**非完整约束**。至少有一个非完整约束的系统称为**非完整系统**。一般说来,非完整约束是靠接触、靠摩擦来实现的,例如,冰刀不允许横滑^[1]、尖缘小轮和带横纹的小轮^[1]、两个轴相联结的轮子^[2]、滚球^[2]、滚盘^[2]、三圆柱系统^[1]、四轮小车^[3]、三轮桌台^[4],等等。这些都是物理实现明显的、线性非完整约束。为得到线性非完整约束加在虚位移上的条件,通常采用 Hölder 原则:将约束方程写成微分形式,用 δ 代替 d ,并令 $\delta t=0$ 。

1911 年 Appell^[5]和 Delassus^[6]开始研究非线性非完整约束。Appell 给出一个例子,这个例子已成为经典,并还在研究^[7-9]。对 Appell 例 $a^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\dot{z}^2=0$,如采用 Hölder 原则,则虚位移满足

$$a^2[(\delta x)^2+(\delta y)^2]-(\delta z)^2=0$$

在利用 d'Alembert-Lagrange 原理推导运动微分方程时,这样的虚位移方程是不行的。于是,对非线性非完整约束,怎样给出约束对虚位移的限制条件就出现了困难。1933 年 Четаев НГ(1902—1959)提出一个条件,称为 Четаев 条件。对一般的非线性非完整约束

$$f_{\beta}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g) \quad (14.1.1)$$

虚位移 $\delta \mathbf{q}$ 满足

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \dot{q}_s} \delta q_s = 0 \quad (14.1.2)$$

假设约束(14.1.1)是理想的,再加上条件(14.1.2),便可利用 d'Alembert-Lagrange 原理来导出非线性非完整系统的运动微分方程了。

Румянцев ВВ(1921—2007)在 20 世纪 70 年代末曾在法国南特高等机械工程学院学校(École Nationale Supérieure de Mécanique)作学术报告,其中讲到 Четаев 条件。1981 年春天,本书作者在该校进修时也讲到 Четаев 条件。该校校长,也是作者的指导教师 Pironneau Y(1923—1983)教授,认为这个条件是人为强加的。他认为对非线性非完整约束问题有无穷多个解。他与作者讨论过三次。一次,他举一个例子:一单位质量质点在平面 Oxy 上运动,受速度大小为常数的非完整约束

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = c^2$$

则点的虚位移是 $\delta z = 0$, $\delta x, \delta y$ 任意,Четаев 条件不对。作者的意见是 Четаев 条件也对。例如,在主动力为零下的运动,按 Четаев 条件,微分方程为

$$\ddot{x} = 2\lambda \dot{x}, \quad \ddot{y} = 2\lambda \dot{y}$$

其中 λ 为约束乘子,则有

$$0 = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 2\lambda(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

于是 $\lambda = 0$ 。方程成为

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

这与 $\delta x, \delta y$ 任意是一样的。

条件(14.1.2)也称为 Appell-Четаев 定义,或 Gauss-Appell-Четаев 假定^[10]。

14.1.2 微分运算 d 与变分运算 δ 的交换关系

非完整力学中的交换关系,或称“过渡方程”,即微分运算 d 和变分运算 δ 的交换性问题,是非完整力学的基本问题之一^[11,12]。研究这一问题的重要性,不仅在于利用交换关系可以推导系统的运动微分方程,还在于交换关系与 Hamilton 原理能否应用于非完整系统,以及 Hamilton-Jacobi 经典积分方法能否应用于非完整系统等问题密切相关。

历史上,对交换关系的形式有两种观点:一种认为 d, δ 总可以交换,不论约

束完整与否,代表人物是 Hölder OL(1859—1937);另一种观点则认为 d, δ 的交换性仅对完整系统才成立,代表人物是 Суслов ГК(1857—1935), Levi-Civita T(1873—1941)。1961 年 Лурье 指出, $d\delta = \delta d$ 是采用变分法则的结果,可以采用其他法则使等式不成立^[3]。1966 年 Новосёлов 指出,交换关系的 Hölder 形式和 Суслов 形式都可应用于非完整系统 Hamilton 原理的研究^[13]。

下面在 Четаев 条件下导出非完整系统的交换关系。设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s=1, 2, \dots, n)$ 来确定,它的运动受有 g 个双面理想 Четаев 型非完整约束

$$\dot{q}_{\epsilon+\beta} = \varphi_\beta(q_s, \dot{q}_\sigma, t) \quad (\beta=1, 2, \dots, g; \sigma=1, 2, \dots, \epsilon; \epsilon=n-g) \quad (14.1.3)$$

按 Четаев 条件,虚位移满足

$$\delta q_{\epsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\epsilon} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta q_\sigma \quad (14.1.4)$$

将式(14.1.4)对 t 求导数,对式(14.1.3)取变分,并将所得结果相减,得到

$$\frac{d}{dt}(\delta q_{\epsilon+\beta}) - \delta \dot{q}_{\epsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\epsilon} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} \left[\frac{d}{dt}(\delta q_\sigma) - \delta \dot{q}_\sigma \right] + \sum_{\sigma=1}^{\epsilon} T_{\sigma}^{\epsilon+\beta} \delta q_\sigma \quad (14.1.5)$$

其中

$$T_{\sigma}^{\epsilon+\beta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma} - \sum_{\gamma=1}^g \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{\epsilon+\gamma}} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (14.1.6)$$

考虑到对独立的 δq_σ , 有

$$\frac{d}{dt} \delta q_\sigma - \delta \dot{q}_\sigma = 0 \quad (\sigma=1, 2, \dots, \epsilon) \quad (14.1.7)$$

则式(14.1.5)成为

$$\frac{d}{dt}(\delta q_{\epsilon+\beta}) - \delta \dot{q}_{\epsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\epsilon} T_{\sigma}^{\epsilon+\beta} \delta q_\sigma \quad (\beta=1, 2, \dots, g) \quad (14.1.8)$$

称式(14.1.7), 式(14.1.8)为 Суслов 观点下的交换关系。这表明,对与独立广义速度 $\dot{q}_\sigma$ 相应的坐标 q_σ , d 与 δ 运算可以交换;而对与不独立的广义速度 $\dot{q}_{\epsilon+\beta}$ 相应的坐标 $q_{\epsilon+\beta}$, d 与 δ 运算不能交换,而由式(14.1.8)决定。

特别地,对于线性非完整约束

$$\dot{q}_{\epsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\epsilon} B_{\epsilon+\beta, \sigma} \dot{q}_\sigma + B_{\epsilon+\beta} \quad (\beta=1, 2, \dots, g) \quad (14.1.9)$$

式(14.1.8)给出

$$\frac{d}{dt}(\delta q_{\epsilon+\beta}) - \delta \dot{q}_{\epsilon+\beta} = \sum_{\sigma=1}^{\epsilon} t_{\sigma}^{\epsilon+\beta} \delta q_\sigma \quad (\beta=1, 2, \dots, g) \quad (14.1.10)$$

其中