高等数学

教学参考

上册

洪继科编

上海师院分院数学系

高等数学

教学参考

上册

洪继科编

上海师院分院数

前　言

目前，在国内大专院校、电视大学、职工业余大学和刊授大学中，选用樊映川等编《高等数学讲义》或同济大学现行修改本《高等数学》作为教材的甚多，本人根据在书著者学校（同济大学）及本校二十多年的教学实践，特编写与此教材相适应的《高等数学教学参考》。在编写过程中，也注意到对国内几本流行的高等数学的通用性。

本书从青年教师如何上好课考虑，每章内容分为如下几个方面：

一、教学要求；二、概念强化；三、例题分析；四、问题辨析；五、思考问题；六、教材增补；七、习题分类（同济大学数学教研室编《高等数学习题集》1965年修订本）等。

本书中有从国内外高等数学教材中精选出来的500多道例题；还有从多年教学实践中积累起来的学生学习中常见错误。为了便于教师应用启发式教学，加强对学生能力的培养，属概念方面的用〔设问〕与〔解答〕的方式介绍出来；属计算方面的用〔问题辨析〕的方式给出来；对需要学生进一步理解的问题则以思考问题的方式提出来。本书中列有思考题300多个。

本书最后还附有《高等数学教学进度表》，内有讲课次序、主要内容、教材上页数、课后布置的习题号码等，这些环节对教师来说是必不可少的。

本书也可供学生参考，书中根据教材内容，循序渐进地用设问、解答、辨析、思考等方式介绍内容，利于在校学生开展预习或自学，掌握学习上主动权；对于社会上自学青年，他们在没有老师讲课面授的条件下，也可按《高等数学教学进度表》，以每二节课为单元，逐章逐节地自学，阅读教材及本书，根据设问，自我检查对概念的掌握程度，然后再研究例题分析，自我操练本书上指定的习题，掌握计算方法与技巧，对一些似懂非懂的内容，在问题辨析中再进行思索与辨误，通过几个环节，逐步巩固自学所得到的知识；对于在课堂教学中感到“吃不饱”的优秀学生，也可从本书中得到对概念的进一步强化，解题方法的进一步丰富，还可以学到比教材上稍广一些的内容。

本书原为油印，现为了促进交流，逐步完善，决定修改后铅印。由于学识水平和教学实践经验所限，书中不妥之处在所难免，希望读者不吝赐教。

本书在编写过程中，得到了院系的大力支持；陈启明、黄汉禹、金人麟、朱嗣筠等同志从多方面给予了必要的帮助；尤其卢祥攀同志对原稿进行了认真的校阅；此外书末所列的参考文献也提供了丰富的成果；方使本书顺利完成。我利用这个机会，谨致深切的谢意。

编　　者　1983年6月於
上海师范学院分院数学系

目　　录

第一章　函数及其图形

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象。这一章讨论了函数的概念及函数的一些简单性质。重点是函数概念、基本初等函数及其定义域、图象、简单性质。

§1·1　教　学　要　求

1．掌握实数绝对值的定义与简单性质，并能用不等式和绝对值表示实数的范围。

2．掌握函数概念，重点是定义域、对应规律及值域三个环节。 确定一个函数只需定义域和对应规律

3．理解并熟记基本初等函数的定义、分析式、定义域、值域、图象及简单性质。

4．搞清楚复合函数概念，复合与分解，侧重于分解。 侧重于分解

5．了解反函数概念。

§1·2　概　念　强　化

教材中所采用的函数定义是前一世纪卅年代由俄罗斯伟大数学家罗巴契夫斯基(ЛобачевсКий，1793～1856)及德国数学家狄里赫莱(Dirichlet，1805～1859)引入的，且很快获得数学界的普遍承认。

为了强化函数概念，便于对照，把定义抄录如下，并在重要的词汇下面加上着重号：

函数的定义：设x与y是两个变量，当变量x在数轴上某一部分$\mathscr{X}$上取某一数值时，如果变量y依照某一法则，总有一个或多个确定的数值与之对应．则变量y叫做变量x的函数，记为

$$y=f(x)\qquad x\in\mathscr{X}(\text{读作 } x \text{ 属于 } \mathscr{X})$$

x称为自变量，y称为因变量，从x到y的对应规律(法则)f又称函数关系。

为了与现行高中统一教材、现代数学中常用符号一致，以后用D表示定义域，R表示函数值域。

【设问】1　学了函数定义之后，有人说："有两个变量，一个变，另一个也变，两个变量就成函数关系"。请问此说法对吗？

【解答】：　不对，这种说法很不确切．我们知道，函数关系是反映物质运动过程中两个变量的相互联系及其依从关系．定义中告诉我们：

① 自变量x在什么范围内(定义域上)取值；

② 因变量y按怎样的法则(对应规律)被确定；

③ 值域$R=\{y：y=f(x)，x\in D\}$．

这是确定两个变量是否成函数关系的三要素．很明显，定义域D和对应规律f确定了，函数的值域也就确定了．因此，定义域与对应规律是确定函数的必不可少的要素．只有当这两点完全确定，我们才称两个变量成函数关系，更清楚地说变量y是自变量x的函数．否则我们就会得出许多荒唐可笑的结论：如拖拉机的耗油量与你的饭量成函数关系．因耗油量、饭量是两个变量，一个会变，另一个也会变．这显然是不对的，因为两变量之间没有确定的对应规律．

【设问】2　下列问题①～⑤中，y是x的函数吗？

① $y=\sqrt{-x}$；

② $y=5$；

③ $x=3$；

④ $y=\begin{cases}-x, & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时；}\\ x^2, & \text{当 } x>0 \text{ 时．}\end{cases}$

⑤ $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2}}$．

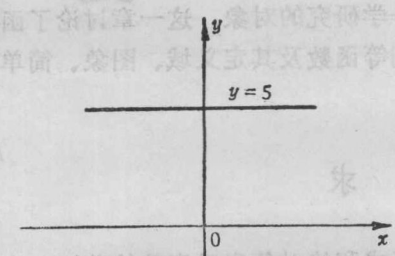


图 1－1

【解答】：①　因对$(-\infty, 0]$中每一x值，都有一个y值与之对应，所以y是x的函数．

②　是．因$y=5$中，虽表面上不含x，但不论x取什么实数，y总有确定的值5与之对应．见图1－1．

③　不是．因为对于$x=3$，有无穷多个y值与之对应．见图1－2．

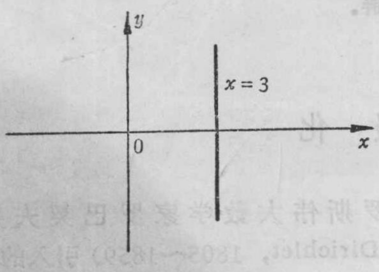


图 1－2

④　y是x的函数．这类函数叫做分段函数．它是由几个分析式子表示的一个函数．它的图形如1－3所示．

⑤　y不是x的函数，因对任何值$x\in(-\infty, +\infty)$，在实数范围内无y值与之对应．

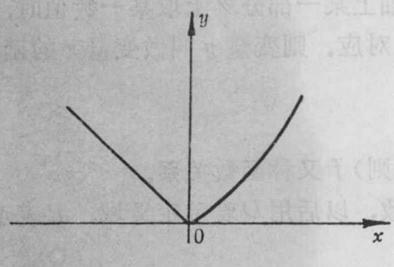


图 1－3

【设问】3　下列各对函数是否为同一函数？

① $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

② $f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)}$，$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$；

③ $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$；

④ $y=f(x)$，　$u=f(t)$．

【解答】：　首先要明确判断两个函数是否相同的根据是什么？根据就是函数定义的两个要素：定义域与对应规律．如果两个函数的定义域和对应规律都相同（函数的值域也必相同），那么这两个函数就是相同的．两者有一不同，就是不同的函数．据此可以回答：

①　不相同．因对应规律不同，事实上$g(x)=|x|$．

②　不相同．因定义域不同．$D_f=\{x: x\neq 0, x\neq -1\}$，$D_g=\{x: x\neq -1\}$．

③　相同，因定义域、值域及对应规律都相同。

④　$y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 是表示同一函数，因对应规律同为 f，函数的定义域（或存在域）也相同。例如 $y=2x$ 与 $u=2t$ 是表示同一个函数。由此可知一个函数由定义域与对应规律完全确定，而与用什么字母表示无关，这点应特别注意。

【设问】4　函数表示法除分析法、图示法及表格法外，还有其它表示法吗？请举例。

【解答】：　有其它表示法，如用语句来表达一个函数。

语句表达一个函数

例 1：“y 是不超过 x 的最大整数”。则也表示 y 是 x 的函数，通常记为 $y=[x]$。如：$y=[3.7]=3$；$y=[-2.1]=-3$ 等。

语句表达一个函数

例 2：“设 x 是有理数时，y 的值是 1，x 是无理数是，y 的值是 0”。这句话也确定了 y 是 x 的函数。记为

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时；}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时。}\end{cases}$$

这个函数叫做狄里赫莱（Dri chlet）函数。

这两个函数以后将经常用到。

【设问】5　设由函数　$y=f(x)$　（1）

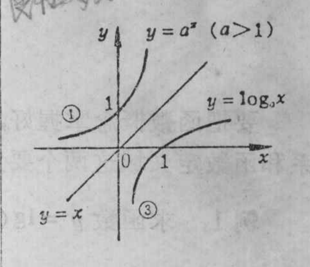
所确定的反函数为　$x=\varphi(y)$　（2）

若再将（2）中 x 与 y 位置对调得函数

$y=\varphi(x)$　（3）

试问（3）是否是（1）的反函数？两者图形有何关系？试举例说明。

【解答】：　由设问 3 的解答中所说的道理知：$x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是表示同一个函数。$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，所以 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数。$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在 oxy 坐标系下是同一个图形。而 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是横坐标 x 与纵坐标 y 位置互换，即点 (x, y) 换成 (y, x)，因此两者图形对称于直线 $y=x$，故 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$，以指数函数为例。列表对比如下：

一　　般	特　　殊	编号	函数之间关系	图形之间关系	图　　　形
$y=f(x)$	$y=a^x$	①	①与②互为反函数	①与②为同一图形	
$x=\varphi(y)$	$x=\log_a y$	②	①与③互为反函数	①与③图形对称于直线 $y=x$	
$y=\varphi(x)$	$y=\log_a x$	③	②与③为同一函数		

* 此处都假定反函数是存在的。

【设问】6　你学了函数特性一节之后，是否认为函数就分为两类：奇函数与偶函数？

有没有一个函数既不是奇函数又不是偶函数？有没有一个函数既是奇函数又是偶函数？请各举一例。

【解答】: 我初学函数特性时是这样认为的。函数不属奇函数就属偶函数。后来仔细钻研了教材，领会到函数中有这样特性的两类函数，但并非只有奇函数或偶函数。还有既不是奇函数也不是偶函数的，例如：线性函数 $y=kx+b$，（k，b 为非零常数）。不仅如此，还有既是奇函数又是偶函数的，且这样的函数只有一个 $y=0$。

【设问】7 设 $f(x)$ 在其定义域 D_f 内有界。$f(x)$ 在定义域内 D_f 的一部分上是否有界？又若 $f(x)$ 在其定义域 D_f 内无界，试问在 D_f 的一部分上（子集）是否一定无界？试举例说明。

【解答】: 由题设．对一切 $x\in D_f$ 有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立， 所以对 $x\in A\subseteq D_f$，也有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，即 $f(x)$ 在 D_f 的一部分（子集 A）上也有界。

又答：$f(x)$ 在其定义域 D_f 上无界。但在 D_f 的子集上不一定无界，因为 $f(x)$ 有界与否，是与所在区间紧密联系在一起的。例如：函数 $y=\dfrac{1}{|x|}$（见图1－4）。在整个定义域 D_f：$(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 上无界，但在子集 $A=\{x:1\leqslant x<+\infty\}$ 上却有界。事实上 $|y|=\dfrac{1}{|x|}\leqslant 1$，对一切 $x\in[1,+\infty)$ 成立。但是在另一子集 $\overline{A}=\left\{x:0<x<1\right\}$ 上函数 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 却又无界。

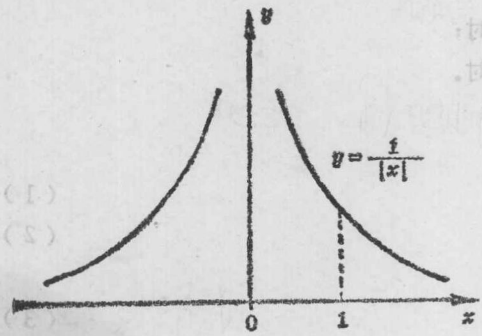


图 1－4

【设问】8 是否任意两个函数都可以复合而成复合函数？试举例。如此，两个函数复合的条件应该重视了。

【解答】: 不是任意两个函数都可以复合而成复合函数的。例如 $y=\ln u$，$u=\sin x$；这两个函数，只有当 $x\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$（即角的终边在第一、二象限内，函数 $u=\sin x$ 的值域 R_u $(0<u=\sin x\leqslant 1)$，作为函数 $y=\ln u$ 的定义域，才能有意义。

一般地，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 R_u，包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f 之中，即 $R_u\subseteq D_f$，复合才有意义，这也是复合的必要条件。否则，复合就无意义，如在本例中，当 $x\in[\pi,2\pi]$ 时，$y=\ln\sin x$ 就无意义。

§1·3 例 题 分 析

要把函数概念掌握好，并用它来解决一些问题，关键在于抓住自变量与因变量的对应关系和函数定义域这两个要素，对分段函数学生比较生疏，也必须予以注意。

例 1 求函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域。

解： $\because$ 当 $x-1\leqslant 0$ 时，$\lg(x-1)$ 无意义，$\therefore\lg(x-1)$ 的定义域为 $x>1$；

又 $\because$ $x+1\leqslant 0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 无意义，$\therefore\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为 $x>-1$。

综上，$y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为 $D=\{x:x>1\}\cap\{x:x>-1\}$，即 $(1,+\infty)$。

例 2　求函数 $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$ 的定义域和值域。

解：　由于在实数范围内，负数没有平方根，所以，$\sin\sqrt{x}\geqslant 0$，$2K\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2K+1)\pi$，即 $4K^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2K+1)^2\pi^2(K=0,\ 1,\ 2\cdots)$，值域 R_y 为$[0,\ 1]$。

小结：　①　在微积分中，我们都在实数范围内进行讨论，求函数的定义域，就是在实数范围内求出能使函数有对应值的自变量的全体；

②　无理函数中遇到偶次方根时，定义域是被开方式为非负数的实数集合；

③　在分式函数中，要除去使分母为 0 的那些 x 值；

④　在对数函数中，要除去使真数部分小于等于 0 的那些 x 值；

⑤　如果所给定的函数为基本初等函数经过四则运算后而得到的，则定义域为各个基本初等函数的定义域的交集。如在例 1 中 $D=\{x:x>-1\}\cap\{x:x>1\}=\{x:x>1\}$。

例 3　求函数 $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 的定义域。

解：　要使 $-\sin^2\pi x\geqslant 0$，必须 $\sin\pi x=0$，即 $x=K(K=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$。

当 $x-|x|=0$ 时，即使 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 不属于实数范围，然因 $x=|x|$ 时，$y=0$，因而 $x\geqslant 0$ 也可认为 y 是有定义的。

由上所述，函数 y 的定义域为 $x\geqslant 0$ 以及 $x=-K(K=1,\ 2,\ \cdots)$。

例 4　求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}}$ 的定义域。

解：　要使函数 y 有意义，必须使 $\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}\geqslant 0$，即 $\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}\geqslant 0$，

解此不等式，介绍两种方法。

方法一　不等式可化为下列两个不等式组：

$$(\text{I})\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\(x+1)(x-3)>0.\end{cases}\quad 与(\text{II})\begin{cases}x-2\leqslant 0,\\(x+1)(x-3)<0.\end{cases}$$

不等式组(Ⅰ)的解为 $x>3$，不等式组(Ⅱ)的解为 $-1<x\leqslant 2$，所以原不等式的解为 $x>3$ 与 $-1<x\leqslant 2$，也即为函数的定义域。

解这两个不等式组是很繁复的。下面介绍：

方法二　即列表定符号的方法。

将函数分解成因式之积，确定各因式在不同区间上的正负号，按其零值由小到大依次排列，表中的正负号表示该因式(及函数)在该区间内的取值符号：

x	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ 2)$	2	$(2,\ 3)$	3	$(3,\ +\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}$	$-$	无意义	$+$	0	$-$	无意义	$+$

由表上可以看出：

当 $-1<x\leqslant 2$ 时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}\geqslant 0$；

当 $3<x<+\infty$ 时，$\dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}>0$。

所以不等式的解是 $-1<x\leqslant 2$ 与 $3<x<+\infty$，函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,\ 2]$ 与 $(3,+\infty)$。

为了巩固与熟悉用方法二求函数定义域，建议读者求函数 $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 的定义域。

例 5 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1}, & x\geqslant 2\ ;\\[2ex] \dfrac{2-x}{x+1}, & x<2,\ x\neq -1\ .\end{cases}$$

计算 $f(0)$，$f(1)$，$f(a)$。

解： $\because\ 0<2,\ 1<2,\quad \therefore\ f(0)=\dfrac{2-0}{0+1}=2,\quad f(1)=\dfrac{2-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$。

计算 $f(a)$ 时要分两种情形：

当 $a\geqslant 2$ 时，$f(a)=\dfrac{a-2}{a+1}$；

当 $a<2$ 时，$f(a)=\dfrac{2-a}{a+1}$，$(a\neq -1)$。

存在域

注意：函数的定义域说明自变量在哪个范围内取值时，函数关系的分析表达式才能成立。通常若该表达式后面不加注明，就把定义域理解为使表达式有意义的那些自变量的全体，在这种意义下，定义域也叫做函数的存在域。

例 6 设 $\qquad y=\Pi(x)\qquad (x\geqslant 0)$

表示不超过数 x 的素数的数目。对于自变量取 $0\leqslant x\leqslant 20$ 的值，作这个函数的图形。

解： 通常 1 不作为素数。将 0 到20的素数排列如下：2，3，5，7，11，13，17，19。

故 当 $0\leqslant x<2$ 时，$\Pi(x)=0$；

当 $2\leqslant x<3$ 时，$\Pi(x)=1$；

当 $3\leqslant x<5$ 时，$\Pi(x)=2$；

当 $5\leqslant x<7$ 时，$\Pi(x)=3$；

当 $7\leqslant x<11$ 时，$\Pi(x)=4$；

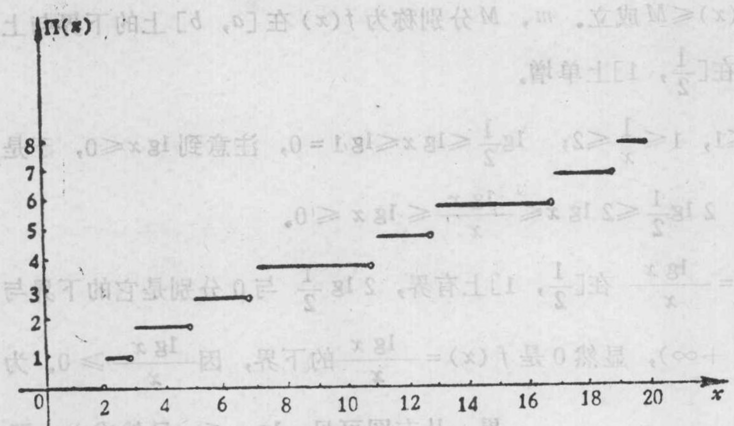
当 $11\leqslant x<13$ 时，$\Pi(x)=5$；

当 $13\leqslant x<17$ 时，$\Pi(x)=6$；

当 $17\leqslant x<19$ 时，$\Pi(x)=7$；

当 $19\leqslant x\leqslant 20$ 时，$\Pi(x)=8$。

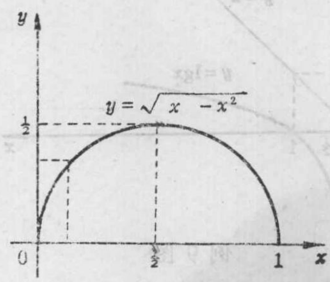
函数的图形如下：



例 7 自变量 x 跑过区间 $0<x<1$，问函数

$$y=\sqrt{x-x^2}$$

跑过怎样的集合，并作图。



例 7 图

解： $\because\quad y=\sqrt{x-x^2}$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}$$

$\therefore$ 当$0<x\leqslant\frac{1}{2}$时，$0<y\leqslant\frac{1}{2}$；

又当$\frac{1}{2}\leqslant x<1$时，$\frac{1}{2}\geqslant y>0$；

故知 y 跑过集合 $E_y=\left\{y: 0<y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

例 8 若自变量的诸值 $x=x_n\ (n=1,\ 2\cdots)$组成一等差级数，求证：

1° 对于线性函数 $y=ax+b$，函数值 $y_n=f(x_n)$ 也组成一等差级数；

2° 对于指数函数 $y=a^x\ (a>0)$，函数值 $y_n=f(x_n)\ (n=1,\ 2\cdots)$组成一等比级数.

证明： 先证 1°，设 $x_n=x_1+(n-1)(x_2-x_1)$，

则 $x_{n+1}-x_n=x_1+n(x_2-x_1)-[x_1+(n-1)(x_2-x_1)]=x_2-x_1$，

因而 $x_n\ (n=1,\ 2\cdots)$组成等差级数。于是

$$y_{n+1}-y_n=ax_{n+1}+b-ax_n-b=a(x_2-x_1),$$

此即 y_n 也组成等差级数。

再证 2°，如 1° 中所证知 $x_{n+1}-x_n=x_2-x_1$，现考察

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{a^{x_{n+1}}}{a^{x_n}}=a^{x_{n+1}-x_n}=a^{x_2-x_1}$$

此即 $y_n\ (n=1,\ 2\cdots)$组成等比级数。

例 9 证明函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 分别在区间 $[\frac{1}{2},\ 1]$与$[1,\ +\infty)$上有界。

证明： 欲证函数$f(x)$在某一区间$[a,\ b]$上有界，只须找到一个正数M，使得对于一切 $x\in[a,\ b]$，有$|f(x)|\leqslant M$成立；或者找到两个数m，M(其中$m<M$)，使得对于一切$x\in$

$[a, b]$，有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立．m，M 分别称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的下界与上界．

$\because$ $\lg x$ 与 x 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单增．

$\therefore$ $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$，$1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 2$； $\lg\frac{1}{2} \leqslant \lg x \leqslant \lg 1 = 0$，注意到 $\lg x \leqslant 0$，于是有

$$2\lg\frac{1}{2} \leqslant 2\lg x \leqslant \frac{\lg x}{x} \leqslant \lg x \leqslant 0.$$

这就证明了 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上有界，$2\lg\frac{1}{2}$ 与 0 分别是它的下界与上界．

对于 $x \in [1, +\infty)$，显然 0 是 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 的下界，因 $\frac{\lg x}{x} \geqslant 0$．为了证明它有上界，从左图可见，$\lg x \leqslant x$ 显然成立，即 $\frac{\lg x}{x} \leqslant 1$．这点也可分析证明如下：

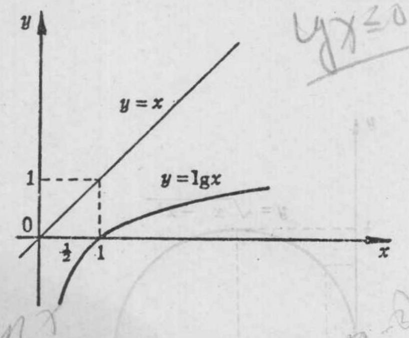
对于任一 $x \in [1, +\infty)$，必存在一个自然数 n，使 $n \leqslant x < n+1$，因此有

$$10^x \geqslant 10^n = (1+9)^n > 1+9n > 1+n > x,$$

取对数有 $\qquad \lg x < x$，

即 $\qquad \frac{\lg x}{x} < 1$，

此即证明了 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界．



例 9 图

例10 一下水道的截面是矩形上加半圆形(图1－5)．截面积为 A，A 是一常量．这常量取决于预定的排水量．这截面的周长为 S，底宽为 x，试建立 S 与 x 的函数关系．

解： 设矩形高为 h．

① 根据等量关系写出自变量与因变量之间关系式；

周长 $S = x + 2h + \frac{1}{2}\pi x$ （1）

显见，在关系式（1）中有两个变量 x 及 h，此处我们应把 S 表成 x 的一元函数．为此，需把变量 h 也表成与 x 有关的量．

② 根据题中所给限制条件——截面积为 A，建立 x 与 h 的关系：

$$A = xh + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

即 $$h = \frac{A}{x} - \frac{1}{8}\pi x \qquad (2)$$

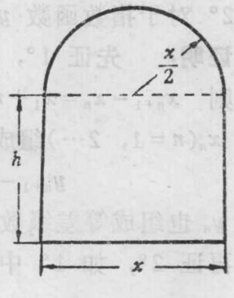


图 1－5

将（2）代入（1）得

$$S = \left(1+\frac{\pi}{4}\right)x + \frac{2A}{x} \qquad (3)$$

此式即为我们所要找的周长 S 与底宽 x 的函数关系．

③ 还必须指出函数的定义域：本题是 $x > 0$，因为 x 不是正值在这个问题中是没有意

义的。

待我们学了最大值及最小值求法后，就可以根据(3)所表示的函数关系来选择最恰当的x使S的值为最小，因下水道的材料费和周长S成正比，S最小时，材料费就可最省。

小结： 建立函数关系的题目，大体按上述①、②及③三个步骤来解决，但③经常被学生忘记，教师应特别强调。

这方面的例子很多，教师可视情另择，但应重在分析。

§1·4 问 题 辨 析

考虑到有些学生满足于教材中一般论述，不求甚解，所以教师应通过问题讨论，谬误辨正、列举反例等方式，逐步引导学生积极思维，开发其智力，使他们学得生动活泼，灵活地运用知识。

1. 诡辩：$y=c$（常数）不是函数，因为在这个分析表达式中无两个变量，且看不出x在哪个范围内变化，即没有定义域，与函数定义不符，所以不是函数！

你对这种看法有何见解？相同还是不同？望辨正。

2. 假如 $y=c$（常数）是函数的话，那末 $x=c$（常数）也是函数了！你认为这种看法对还是不对？道理何在。

3. 从我看到的例题与做过的习题可以说："函数的定义域都是区间，所以我认为，在函数定义中的一句话——变量x在数轴上某一部分$\mathscr{X}$上取某一数值，可以改为——变量x在某一区间上取某一数值…"，你认为这种说法是否有道理？

是全对、全错、不全面，望研究。

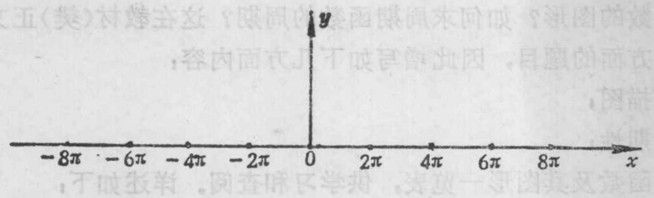
提示：请研究函数 $y=\sqrt{\cos x-1}$，找出定义域与值域，并绘图，从而对函数的定义域能有正确的理解。

答案：到下面第4个问题中找。

4. 有人认为："函数的图形都是连续曲线，特别是用分析表达式给出的函数，其图形一定是连续曲线！"

我们给出如下两个函数及图形，希你能对函数的图形情况有一全面了解。

例 1 $\qquad y=\sqrt{\cos x-1}$

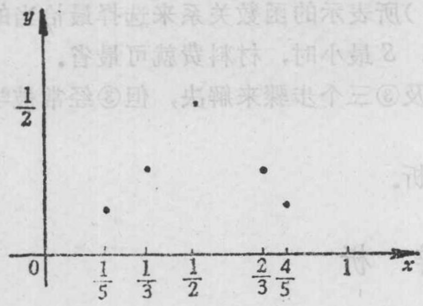


函数y的图形是一串孤立的点$(2K\pi,\ 0)$($K=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$)。

例 2 黎曼（Riemann，1826～1866）函数。定义域D是$[0,\ 1]$，f是如下对应关系：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}，当\ x=\dfrac{p}{q}，p\ 与\ q\ 互质，q>0\ 时；\\ 0\ ，当\ x\ 为无理数时。\end{cases}$$

这函数称为黎曼函数。它的图形无法精确地画出来，下面给出的是示意图。



黎曼函数的图形是一些不连贯的点。

5. 下列每组中的函数是否相同？

A组： $y=\frac{1}{2}x$， $S=\frac{1}{2}t$，

$u=\frac{1}{2}v$， $x=\frac{1}{2}y$；

B组： $y=\varphi(x)$， $S=\varphi(t)$，

$u=\varphi(v)$， $x=\varphi(y)$。

大家争论不下，你的看法如何？说明理由。

6. 有同学对求由几个函数之和的函数的定义域，到底取各个函数定义域的交集还是并集搞不清楚。这仍需从函数定义去解决。试指出下面解法的错误：

例 1 求 $y_1=\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域。

解： $x^2-x-6\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$，

即
$$\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ x+2\geqslant 0. \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x-3\leqslant 0, \\ x+2\leqslant 0. \end{cases}$$

解这两个不等组得 $x\geqslant 3$， $x\leqslant -2$。

所以函数 y_1 的定义域 $D_1=\{x: x\geqslant 3\}\cap\{x: x\leqslant -2\}$。

例 2 求 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域。

解： 函数 $\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域，由例 1 为 D_1，

函数 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域： $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，

即 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，即 $-3\leqslant x\leqslant 4$， $\therefore$ $D_2=\{x: -3\leqslant x\leqslant 4\}$，

所以函数 y 的定义域为

$$D=D_1\cup D_2=\{x: x\geqslant 3\}\cap\{x: x\leqslant -2\}\cup\{x: -3\leqslant x\leqslant 4\}.$$

§1·5 教 材 增 补

如何作复合函数的图形？如何求周期函数的周期？这在教材(樊)正文中都没有论述，但在习题集上又有这方面的题目，因此增写如下几方面内容：

1. 初等函数描图；

2. 函数的周期性；

3. 基本初等函数及其图形一览表，供学习和查阅。详述如下：

1. 初等函数描图

第六章学完以后，学生将会掌握研究函数及描绘它的图形的更有效方法，但在学习本章时，我们仅以基本初等函数的性质及其图形为基础，对如何作初等函数的图形，介绍以下四种方法：

（一） 平移

已知函数 $y=f(x)$的图象时。

（1） $y=f(x+a)$的图象为，将 $y=f(x)$的图象向左(右)平移 $|a|$ 个单位，$a>0$ 时向左移动，$a<0$ 时向右移动；

（2） $y=f(x)+b$ 的图象为，将 $y=f(x)$的图象向上(下)平移 $|b|$ 个单位，$b>0$ 时向上移动，$b<0$ 时向下移动。

（二） 伸缩

已知函数 $y=f(x)$ 的图象时。

（1） $y_1=Kf(x)$ 的图象可以这样作出：将曲线 $y=f(x)$ 上的点$M_0(x_0, y_0)$的纵坐标乘以K。就可得到曲线$Ky=Kf(x)$上横坐标为 x_0(与M_0 的横标相同)点的M的纵坐标 Ky_0，再由这些点 $M(x_0, Ky_0)$ 描绘 $y_1=Kf(x)$ 的图象。

（2） $y=f(Kx)$ 的图象可以这样作出：将曲线 $y=f(x)$ 上的点$M_0(x_0, y_0)$ 的横坐标乘以K，就得到曲线 $y=f(Kx)$ 上纵标为 y.（与M_0 纵坐标相同）的点M的横坐标 Kx_0，由这些点 $M(Kx_0, y_0)$即可描出 $y=f(Kx)$ 的图象。

例1 描 $y=\arcsin\dfrac{1-x}{4}$的图形。

解： 令$X=\dfrac{-(x-1)}{4}$，则 $x=-(4X-1)$。

作图步骤如下：

（1） 先作出 $y=\arcsin X$ 的图象(图1－6)；

（2） 把这个图象的横坐标放大4倍，并向右移一个单位，得到 $y=\arcsin(4X-1)$的图象；

（3） $\therefore y=\arcsin[-(4X-1)]=-\arcsin(4X-1)$，$\therefore$将(2)所得到的曲线的纵坐标乘以 -1，即得 $y=\arcsin\dfrac{1-x}{4}$的图象(图1－7)。

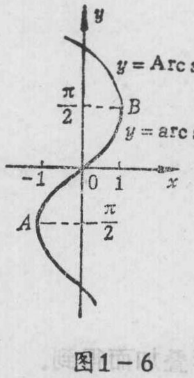


图1－6

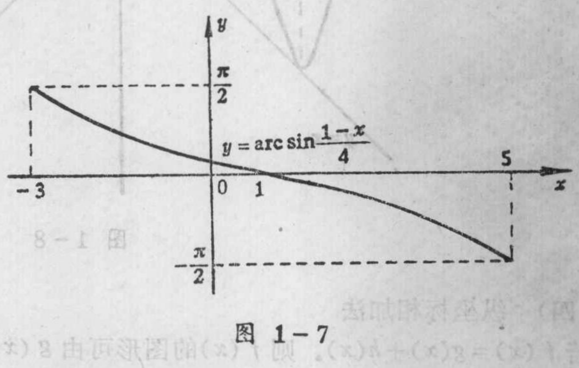


图 1－7

注：本题也可用别的方法作图。如先作其反函数的图形，由关于直线 $y=x$ 的对称性，可得原来函数的图形，请读者完成。

（三） 界线曲线法

讨论函数是否有界，以确定曲线的范围。

例 2　作出 $y = x\sin x$ 的图形。

解：　$\because |\sin x| \leqslant 1$，$\therefore |y| \leqslant |x|$，　即图形界于 $y = x$ 与 $y = -x$ 之间。又该函数为偶函数，图形对称于 y 轴，取 x 的一些特殊值，计算出 $x\sin x$ 的值，列表如下：

x	…，0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π，…
$\sin x$	…，0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0，…
y	…，0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$	0	$-\frac{3}{2}\pi$	0，…

再描点画出图形(图1－8)。

(此题选自张之良编《高等数学》第二分册 P.82例 3)

读者若想看更多的例题，可参看Б·Л·吉米多维奇著《数学分析习题集》第300、302题等.

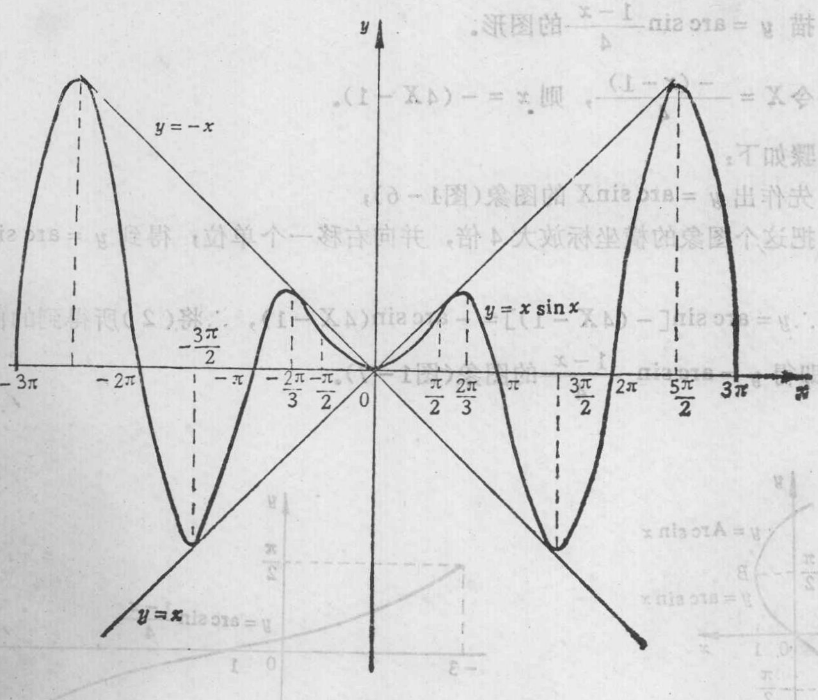


图 1－8

(四)　纵坐标相加法

若 $f(x) = g(x) + h(x)$。则 $f(x)$的图形可由 $g(x)$与 $h(x)$的图形叠加而得到。

例 3　描出 $y = |1-x| - |1+x|$ 的图形。

解：　$y = |1-x| - |1+x|$ 为奇函数，因此它的图形对称于原点。分别作出 $y_1 = |1-x|$ 及 $y_2 = -|1+x|$ 的图形，然后将它们叠加就得 $y = |1-x| - |1+x|$ 的图形(图1－9)。