大学自修教材

经济管理数学

赵德滋 编

（上 册）

南京大学经济学系

前　言

本教材是专门为自修大学经济管理专业的学员编写的。他们已经学了高等数学，现在要求在这个基础上，继续学习广泛应用于经济管理工作的有关数学内容。

经济管理中所要用到的数学工具很多，不可能全讲。我们只选择了最常用的一些经济数学方法以及学好这些内容所必备的基础，力求在较短的时间内，能取得较大的收效。本教材包括线性代数、数理统计、经济数学方法三部分。

在编写中得到南京大学经济系领导的关心和支持；数学系唐述钊副教授给予热情的指导和帮助，提出了许多宝贵的意见；赵锦华同志帮助抄写和校对；对此，作者表示衷心的感谢。

南京大学经济学系　赵德滋

一九八四年一月

第 一 部 分

线 性 代 数

目　录

（上册）

第一部分　线性代数

第二部分　数 理 统 计

第一章 行列式

行列式是解线性方程组的重要工具。本章首先通过求解二元一次方程组和三元一次方程组引出二阶和三阶行列式，然后推广到 n 阶行列式，并讨论它的性质，最后介绍求解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

§1 二阶行列式和三阶行列式

首先讨论二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1}$$

用中学里学过的加减消去法，容易得到它的解为：

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{2}$$

这里当然应该要求 $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$

现在我们引进一个符号：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

以它来代表 $a_1b_2-a_2b_1$，也就是说

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1 \tag{4}$$

我们称（3）式为一个二阶行列式，而把 $a_1b_2-a_2b_1$ 称为它的展开式。行列式中的横排称行，纵排称列。展开式正好是行列式中左上角与右下角两数之积减去左下角与右上角的两数之积。于是，类似地有：

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1,\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

这样一来，方程组（1）的解——公式（2）便可写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq c \qquad (5)$$

下面再来讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad (6)$$

分别用 $b_2c_3-b_3c_2$，$-(b_1c_3-b_3c_1)$ 和 $b_1c_2-b_2c_1$ 乘方程组（6）的第一式，第二式和第三式，然后相加，便消去 y，z 而得：

$$(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1)x$$
$$=d_1b_2c_3+b_1c_2d_3+c_1d_2b_3-d_3b_2c_1-b_3c_2d_1-c_3d_2b_1 \qquad (7)$$

同理可得：

$$(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1)y$$
$$=a_1d_2c_3+d_1c_2a_3+c_1a_2d_3-a_3d_2c_1-d_3c_2a_1-c_3a_2d_1 \qquad (8)$$

$$(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1)z$$
$$=a_1b_2d_3+b_1d_2a_3+d_1a_2b_3-a_3b_2d_1-b_3d_2a_1-d_3a_2b_1 \tag{9}$$

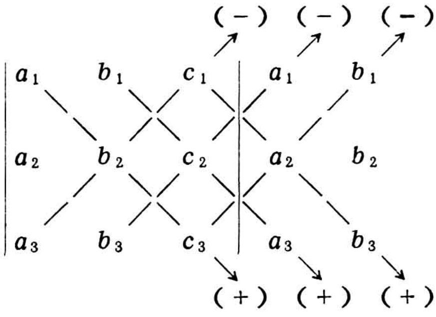
现在引入记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

代表$a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$，称它为三阶行列式。

那么如何来记忆它的计算规律呢？我们可以将三阶行列式的左边两列重写于行列式的右侧，然后用计算二阶行列式的类似方法求对角线上之数的积，从左上角到右下角的对角线上取正号，从左下角到右上角的对角线上取负号，从而求出三阶行列式所代表的代数和。

具体计算方法如下：



$$=a_1b_1c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$$

但要注意，这仅仅是计算三阶行列式的一种记忆方法，真正地从三阶行列式的意义上来说，还是应该写成：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \qquad (11)$$

同时，为了叙述的方便，我们将它简记为$\boldsymbol{D}$；类似地可以定义：

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

不难从（7），（8），（9）式看出

$$x = \frac{D_x}{D},\quad y = \frac{D_y}{D},\quad z = \frac{D_z}{D} \qquad (12)$$

（12）式就是三元一次联立方程组（6）的解，这里当然要求$D \neq 0$。

举两个例子以说明用行列式解线性方程组的方法，并熟悉行列式的计算。顺便指出，线性方程组是指方程中所出现的未知数都只有一次方。

例 1　解线性方程

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 3 \end{cases}$$

解：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$$

故方程组有一个解

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-1} = 0$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + y - 4z = 8 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\times2\times(-4) + 1\times1\times3 + (-1)\times1\times1 - 3\times2\times(-1) - 1\times1\times2 - (-4)\times1\times1$$

$$= -16 + 3 - 1 + 6 - 2 + 4 = -6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 6\times2\times(-4) + 1\times1\times8 + (-1)\times4\times1 - 8\times2\times(-1) - 1\times1\times6 - (-4)\times4\times1$$

$$= -48 + 8 - 4 + 16 - 6 + 16 = -18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 2\times4\times(-4) + 6\times1\times3 + (-1)\times1\times8 - 3\times4\times(-1) - 8\times1\times2 - (-4)\times1\times6$$

$$= -32 + 18 - 8 + 12 - 16 + 24 = -2$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&1&6\\1&2&4\\3&1&8\end{vmatrix}=2\times2\times8+1\times4\times3+6\times1\times1\\-3\times2\times6-1\times4\times2-8\times1\times1$$

$$=32+12+6-36-8-8=-2$$

故方程组有一个解

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-6}=3\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

§2 n阶行列式

在很多经济问题中，往往需要讨论含有几十个，几百个未知数的线性方程组。因此有必要将行列式扩充到n阶，我们先讨论由n个n元线性方程所组成的线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{13}$$

从§1的讨论中，我们已经看出，要求解线性方程组，首先要研究它的系数所组成的行列式，对于该方程组来说，其系数行列式是

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots\cdots&a_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\tag{14}$$

这个行列式由 $n\times n$ 个数组成，称为 n 阶行列式，同前一样，横排称行，纵排称列。其中每一个 a_{ij}（i 为其所在的行数，j 为其所在的列数）称为行列式的元素。请注意，行列式一定是方形的，并将自左上角至右下角的对角线称为主对角线，显然，a_{11}，a_{12}，……a_{nn}位于主对角线上。

为了计算 n 阶行列式（14）的值，我们先要介绍代数余子式。取 n 阶行列式中任意一个元素 a_{ij}，将它所在行和所在列的其它元素全部划去，剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 个元素按原来排的次序组成一个 $n-1$ 阶行列式，这个行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；而将它乘上 $(-1)^{i+j}$ 后所得的式子 $(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子数，记为A_{ij}

现在我们可以将 n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{15}$$

（15）式也可称为 n 阶行列式按第一行的展开式。

当我们讨论行列式的性质以后，便可知道，行列式可按其任一行或任一列展开，它的值不变。

有了（15）式，我们能计算 n 阶行列式的值。因为(15)式中每个代数式A_{ij}($j=1$, 2, ……, n)的计算，实质上是一个 $n-1$ 阶行列式的计算问题；而对于每一个 $n-1$ 阶行列式，都可按其第一行展开，而归结为 $n-2$ 阶行列式的计算；如此继续，最后可归结为三阶行列式或二阶行列式的计算，而这是我们会算的。

例 3 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$-1\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3+0+15-20+3-0)-(15-24-3+4-15+18)$$

$$-(0+40-1-0+25+6)-2(0-30+1-0-25-6)$$

$$= -15+5-70+120=40$$

这个例题，当然还可以将四个三阶行列式展开，化成二阶行列式来做，其结果是一样的。

有一种特殊的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其主对角线以上的元素均为 0，容易算出它的值为

$$a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

但对于一般的 n 阶行列式，用（15）式的方法来计算将是很麻烦的。因此，我们需要对行列式的性质加以讨论，这些性质有助于简化行列式的计算。

§3 行列式的性质

为了便于理解和掌握，我们以三阶行列式为例来讨论其性质，这些性质可以无一例外地运用到 n 阶行列式中去

性质 1 将行列式的行列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

只要将行列式展开，便得证明。

由此，在行列式中，凡对“行”所具有的性质，对“列”也一定具有，反之亦然。

性质 2 两行（列）元素互换，行列式的值仅改变符号。例如一、三两行互换，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \qquad (16)$$

证明：将右端展开可得

$$-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

同样，可证互换其它两行（列）的情况。

性质 3 行列式中若有两行（列）相同，则行列式的值为零。

证明：设行列式的值为D，互换相同的两行（列），由性质 2 知，所得的行列式的值为$-D$；但因两行（列）相同，互换后，实际上行列式不变，因此$-D=D$，故得$2D=0$，即行列式的值$D=0$。

性质 4 以数 k 乘行列式的某一行（列）的所有元素，等于以数 k 乘行列式。即如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

直接展开行列式，便可得证。这个性质也可以说成：若行列式中某一行（列）有公因子，可提到行列式外面来。

性质 5 行列式中若有一行（列）全为零，则行列式的值为零。这由性质 4 可直接推论而得。

性质 6 行列式中若有两行（列）元素对应成比例，则行列式的值为零，

证明：不妨设三阶行列式中第一行、第三行对应成比例，用性质 4 和性质 3，便有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

性质 7 若行列式的第 i 行（列）各元素是两项之和(差)则这个行列式等于两个行列式的和（差），而这两个行列式除

了第 i 行（列）分别为原行列式各对应元素的前项和后项外，其余各行（列）与原来行列式相同。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a'_{23}+a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (18)$$

这个性质也可由直接展开行列式而证得。

性质 8 在行列式中，把一行（列）的各元素乘 k 后加到另一行（列）的对应元素上去，则行列式的值不变。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (19)$$

证明：由性质 7 和性质 6 可得：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 9 行列式的值等于它的任何一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式的全部乘积之总和。换句话说，行列