刘朝荣 黄养新

线性模型及其统计推断

武汉工业大学出版社

线性模型及其统计推断

刘朝荣　　黄养新

武汉工业大学出版社

鄂新登字13号

线性模型及其统计推断

刘朝荣　黄养新
责任编辑　韩瑞根
武汉工业大学出版社出版发行
（武昌珞狮路14号　邮政编码430070）
各地新华书店经销
武汉大学印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：6　字数：150 千字
1992年8月第1版　　1992年8月第1次印刷
印数：1—1000册
ISBN 7-5629-0658-0/O·29　　定价：1.90元

代　序

线性模型一直是统计学科中很活跃的一个分支，恐怕很难有别的分支象它那样既古老又不断萌发出新的问题、新的想法和新的工具。因此要介绍这一分支的理论和方法是一件不容易办好的事。无论是在中国还是外国，除了一般的教科书外，这一分支的专著是相当的少，因为很难把这种书写好。

本书的特点是对于实际工作中经常遇到的、一些与线性模型的统计推断有关的问题，给以系统而清晰的处理，使得读者能了解它的模型、理论背景和应用范围，所以对一般的理论工作者、应用统计的专家、研究生和大学生，将是一本有益的教材和参考书。作者近十年来，在这一分支做了不少实际的应用课题，在理论研究方面也发表了多篇论文，尤其难得的是，作者曾给实际工作部门的技术人员、研究生多次讲授这一内容，因此我想这本书一定会受到读者的欢迎。

张尧庭

1991年9月于武汉大学

前　言

线性模型是数理统计的一个重要分支。它涉及试验设计、回归分析和多元分析。这些在工农业、经济管理、地质气象、医药卫生和教育心理等方面有着广泛应用。这一领域理论研究也相当活跃。本书以较小的篇幅，系统介绍了线性模型及其统计推断的基本内容。许多材料是新近的，有的则是作者的研究成果。它能引导读者尽快接近研究的前沿。作者曾以此作为讲义在武汉工业大学和华中理工大学为研究生班讲过多次，反映较好。此书可作数学、经济、管理专业研究生和高年级学生教材，也可供应用统计、科技工作者和工程技术人员参考。

编写过程中，得到华中理工大学林少宫教授和武汉大学张尧庭教授鼓励、指导与帮助；张尧庭老师还仔细审阅了全书原稿，并为之作序；武汉工业大学教务处的钱芝宇同志和出版社的朱家万同志对本书的出版给予了大力支持，作者谨向他们表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

作　者

1991年8月于武汉工业大学

目　　录

第一章　矩阵知识

假定读者已经熟悉普通线性代数的内容。这里仅介绍一些用于线性模型统计推断的广义逆矩阵及有关知识。

我们只讨论实数域上的向量和矩阵。一般，用小写字母 a, b, c, …表示向量和数；用大写字母 A, B, C, …表示矩阵。$A_{n\times m}$ 表示矩阵 A 是 n 行 m 列。$A_{n\times m}$ 的元素用 a_{ij} 表示，它的列向量用 a_1, a_2, …, a_m 表示，它的行向量用 $a'_{(1)}$, $a'_{(2)}$, …, $a'_{(n)}$表示，即

$$A_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)=\begin{pmatrix} a'_{(1)} \\ a'_{(2)} \\ \vdots \\ a'_{(n)} \end{pmatrix}$$

其余记号和普通教科书中相同。A' 表示 A 的转置矩阵，$\mathrm{rk}(A)$ 表示 A 的秩、A^{-1} 表示 n 阶矩阵 $A_{n\times n}$ 的逆矩阵，$|A|$表示 n阶矩阵 $A_{n\times n}$ 的行列式，$\mathrm{tr}(A)$表示 n 阶矩阵 $A_{n\times n}$ 的迹，即 A 的主对角元素之和，I_n 表示 n 阶单位矩阵。另外，以后还常用到记号$\mathbf{1}_n$ 和 J_n，它们分别表示全由 1 组成的 n 维向量和全由 1 组成的 n 阶矩阵。

§1　投影与投影阵

一、$R(A)$与$N(A)$

定义1.1　任给矩阵 $A_{n\times m}$，令

$$R(A)=\{y: y=Ax,\ x\in R_m\}$$

$$N(A)=\{x: Ax=0,\ x\in R_m\}$$

称 $R(A)$为A 的值域，它是由 A 的列向量所张成的线性子空间；称 $N(A)$为 A 的化零子空间，它也是一线性子空间。注意，$R(A)$在 R_n 中，$N(A)$在 R_m 中。

1.1 $\dim R(A)=\mathrm{rk}(A)=\mathrm{rk}(A')=\dim R(A')$

1.2 $R(A)=\{0\}\Longleftrightarrow A=0\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A)=0$

证 $R(A)=\{0\}\Longleftrightarrow Ax=0$对一切 x 成立

$$\Longleftrightarrow A=0\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A)=0$$

1.3 若记 $R^{\perp}(A)=\{z: z'y=0,\ y\in R(A)\}$，则

$$N(A)=R^{\perp}(A'),\ N(A')=R^{\perp}(A)$$

证 因 $R^{\perp}(A)=\{z: z'A=0\}$，故

$x\in N(A)\Longleftrightarrow Ax=0\Longleftrightarrow x'A'=0\Longleftrightarrow x\in R^{\perp}(A')$

$x\in N(A')\Longleftrightarrow A'x=0\Longleftrightarrow x'A=0\Longleftrightarrow x\in R^{\perp}(A)$

1.4 $n=\dim R(A)+\dim N(A')$

$m=\dim R(A')+\dim N(A)$

证 因 $R_n=R(A)+R^{\perp}(A),\ R_m=R(A')+R^{\perp}(A')$

故
$$\dim R_n=\dim R(A)+\dim R^{\perp}(A),$$
$$\dim R_m=\dim R(A')+\dim R^{\perp}(A')$$

$n=\dim R(A)+\dim N(A'),\ m=\dim R(A')+\dim N(A)$

例 设线性方程组 $\underset{n\times m}{A}\ \underset{m\times 1}{x}=\underset{n\times 1}{b}$，则

$$Ax=b\text{ 有解}\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A\,\vdots\,b)=\mathrm{rk}(A)\Longleftrightarrow b\in R(A)$$

若 $Ax=b$ 有解，则

$$Ax=b\text{ 有唯一解}\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A)=m$$

事实上，因 $Ax=b$ 成立 $\Longleftrightarrow b=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i\Longleftrightarrow b\in R(A)$，故

$$Ax=b\text{ 有解}\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A\,\vdots\,b)=\mathrm{rk}(A)\Longleftrightarrow b\in R(A)$$

若 $Ax=b$ 有解，则

$Ax=b$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow Ax=0$ 只有零解

$$\Longleftrightarrow N(A)=0 \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(A)=m$$

1.5 $R(A+B)\subset R(A)+R(B)$, $R(AB)\subset R(A)$

证 因 $(A+B)x=Ax+Bx$，故 $R(A+B)\subset R(A)+R(B)$

因 $(AB)x=A(Bx)$，故 $R(AB)\subset R(A)$

1.6 $\mathrm{rk}(A+B)\leqslant \mathrm{rk}(A)+\mathrm{rk}(B)$, $\mathrm{rk}(AB)\leqslant \mathrm{rk}(A)$

$$\mathrm{rk}(AB)\leqslant \min(\mathrm{rk}(A),\ \mathrm{rk}(B))$$

证 前二式显然。第三式由 $\mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}((AB)')=\mathrm{rk}(B'A')\leqslant \mathrm{rk}(B')=\mathrm{rk}(B)$ 即得。

1.7 $N(A+B)\supset N(A)\cap N(B)$, $N(AB)\supset N(B)$

证 由 $Ax=0$, $Bx=0 \Longrightarrow (A+B)x=0$，知

$$N(A+B)\supset N(A)+N(B)$$

由 $Bx=0 \Longrightarrow ABx=0$，知 $N(AB)\supset N(B)$

1.8 $R(\underset{n\times m}{A}\ \underset{m\times p}{B})=R(A) \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(A)$

$$N(AB)=N(B) \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(B)$$

$$R(A'A)=R(A'),\ \mathrm{rk}(A'A)=\mathrm{rk}(A)$$

证 第一式显然成立．由1.4知

$$\dim R((AB)')+\dim N(AB)=p=\dim R(B')+\dim N(B)$$

故 $\dim N(AB)=\dim N(B) \Longleftrightarrow \dim R((AB)')=\dim R(B')$

$$\mathrm{rk}(N(AB))=\mathrm{rk}(N(B)) \Longleftrightarrow \mathrm{rk}((AB)')=\mathrm{rk}(B')$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(B)$$

再由1.7，$N(AB)\supset N(B)$，因而第二式成立。

又，显然有 $R(A'A)\subset R(A')$；而对任向量 u, $u'A'A=0 \Longrightarrow u'A'Au=0 \Longrightarrow (Au)'(Au)=0 \Longrightarrow Au=0 \Longrightarrow u'A'=0$，即 $u\in R^{\perp}(A'A) \Longrightarrow u\in R^{\perp}(A')$，或 $R^{\perp}(A'A)\subset R^{\perp}(A')$，或 $R(A'A)\supset R(A')$；故 $R(A'A)=R(A')$, $\mathrm{rk}(A'A)=\mathrm{rk}(A')=\mathrm{rk}(A)$。

1.9 若 $\mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(B)$，则

$$ABx_1=ABx_2 \Longleftrightarrow Bx_1=Bx_2$$

若 $\mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(A)$，则

$$x_1AB=x_2AB \Longleftrightarrow x_1A=x_2A$$

特别，$A'Ax_1=A'Ax_2 \Longleftrightarrow Ax_1=Ax_2$，$x_1A'A=x_2A'A \Longleftrightarrow x_1A'=x_2A'$

证 当 $\mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(B)$时，有 $N(AB)=N(B)$，即 $ABx=0 \Longleftrightarrow Bx=0$。取 $x=x_1-x_2$，便得 $ABx_1=ABx_2 \Longleftrightarrow Bx_1=Bx_2$。

当 $\mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(A)$时，因 $\mathrm{rk}(AB)=\mathrm{rk}(A) \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(B'A')=\mathrm{rk}(A')$，故 $B'A'x'_1=B'A'x'_2 \Longleftrightarrow A'x'_1=A'x'_2$，即 $x_1AB=x_2AB \Longleftrightarrow x_1A=x_2A$。

1.10 $A'Ax_1A'A=A'Ax_2A'A \Longleftrightarrow Ax_1A'A=Ax_2A'A$

$$\Longleftrightarrow A'Ax_1A'=A'Ax_2A' \Longleftrightarrow Ax_1A'=Ax_2A'$$

证 由1.9即得。

二、投影与投影阵

设 $\mathscr{U}=R(A)$、$\mathscr{V}=R(B)$是 R_n 的两个子空间。如果对任 $x\in R_n$，有唯一的 $u\in\mathscr{U}$、$v\in\mathscr{V}$，使得 $x=u+v$，那末称 R_n 是 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 的直接和，记为 $R_n=\mathscr{U}\oplus\mathscr{V}$；如果不要求表示唯一，则称为 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 的和，记为 $R_n=\mathscr{U}+\mathscr{V}$；如果 $\mathscr{V}=\mathscr{U}^{\perp}$，则称为正交和，记为 $R_n=\mathscr{U}\dot{+}\mathscr{V}$。

1.11 设 $\mathscr{U}=R(\underset{n\times k}{A})$，$\mathscr{V}=R(\underset{n\times l}{B})$，$D=(A \mid B)$，则

$$R_n=\mathscr{U}+\mathscr{V} \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(D)=n$$

$$R_n=\mathscr{U}\oplus\mathscr{V} \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(D)=n=k+l$$

$$R_n = \mathscr{U} \dot{+} \mathscr{V} \Longleftrightarrow \mathrm{rk}(D) = n = k + l,\ A'B = 0$$

证 因 $\mathscr{U} + \mathscr{V} = \{y:\ y = Ax_1 + Bx_2 \triangleq Dx\} = R(D)$，故

$$n = \mathrm{rk}(D) \Longleftrightarrow n = \dim R(D) \Longleftrightarrow R_n = R(D)$$

$$\Longleftrightarrow R_n = \mathscr{U} + \mathscr{V}$$

$$R_n = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V} \Longleftrightarrow R_n = \mathscr{U} + \mathscr{V},\ N(D) = \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(D) = n = k + l$$

$$R_n = \mathscr{U} \dot{+} \mathscr{V} \Longleftrightarrow R_n = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V},\ A'B = 0$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{rk}(D) = n = k + l,\ A'B = 0$$

定义1.2 设 $\mathscr{U}$、$\mathscr{V}$ 的 R_n 的两个子空间。若 $R_n = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$，则对 $x \in R_n$，可唯一表示 $x = u + v$，$u \in \mathscr{U}$，$v \in \mathscr{V}$。规定

$$Px = u,\ x \in R_n,\ u \in \mathscr{U}$$

我们把从 R_n 到 $\mathscr{U}$ 的变换 P 称为从 R_n 沿子空间 $\mathscr{V}$ 到子空间 $\mathscr{U}$ 的投影。若 $\mathscr{V} = \mathscr{U}^{\perp}$，则称 P 是一正投影。

1.12 投影变换 P 是线性变换。

证 设 $x, y \in R_n$，λ, μ 为任二实数，则

$$x = u_1 + v_1,\ u_1 \in \mathscr{U},\ v_1 \in \mathscr{V},\ Px = u_1$$

$$y = u_2 + v_2,\ u_2 \in \mathscr{U},\ v_2 \in \mathscr{V},\ Py = u_2$$

$$P(\lambda x + \mu y) = P((\lambda u_1 + \mu u_2) + \lambda v_1 + \mu v_2))$$

$$= \lambda u_1 + \mu u_2 = \lambda Px + \mu Py$$

故 P 是一线性变换。

在一组基下，线性变换对应一个矩阵。投影变换 P 所对应的矩阵称为投影阵，仍记为 P。正交投影变换所对应的矩阵称为

正投影阵。

1.13 投影 P 具有幂等性，即 $P^2=P$.

证 因对任 $x\in R_n$，有 $x=u+v$，$u\in\mathscr{U}$，$v\in\mathscr{V}$；$P^2x=P(Px)=Pu=u=Px$，由 x 的任意性知 $P^2=P$.

1.14 若 $P^2=P$，则 P 的特征根非 0 即 1.

证 设 λ 为 P 的特征根，z 为对应的特征向量，则

$$\lambda z=P^2z=P(Pz)=P(\lambda z)=\lambda(Pz)=\lambda(\lambda z)=\lambda^2 z$$

$$\lambda(1-\lambda)z=0$$

但 $z\neq 0$，故 $\lambda(1-\lambda)=0$，因而 $\lambda=0$ 或 1.

1.15 若 $P^2=P$，则 $\mathrm{tr}(P)=\mathrm{rk}(P)$.

证 将 P 满秩分解为 $\underset{n\times n}{P}=\underset{n\times r}{F}\ \underset{r\times n}{G}$，$\mathrm{rk}(P)=r$（见1.21(2)）。由 $P^2=P$ 有，$FGFG=FG$. 因 F 有左逆，G 有右逆，故 $GF=I_r$. 因而

$$\mathrm{tr}(P)=\mathrm{tr}(FG)=\mathrm{tr}(GF)=\mathrm{tr}(I_r)=r=\mathrm{rk}(P)$$

1.16（1）P 是投影阵 $\Longleftrightarrow P^2=P$

（2）P 是正投影阵 $\Longleftrightarrow P^2=P$，$P'=P$

证 （1）$\Rightarrow$· 由1.13得。$\Leftarrow$· 由 $P^2=P$ 知 $(I_n-P)^2=I_n-P$。又由

$$R_n=R(I_n)\subset R(P)+R(I_n-P)\subset R_n$$

得 $$R_n=R(P)+R(I_n-P)$$

故 $$n=\mathrm{tr}(I_n)=\mathrm{tr}(I_n-P)=\mathrm{rk}(P)+\mathrm{rk}(I_n-P)$$

因由1.11有 $$R_n=R(P)\oplus R(I_n-P)$$

因此，P 是从 R_n 沿 $R(I_n-P)$ 到 $R(P)$ 上的投影。

（2）因 $P^2=P$，$P'=P\Longleftrightarrow P^2=P$，$P'(I_n-P)=0$，故由

(1)及1.11知(2)成立。

1.17 若 P 为从 R_n 沿 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{U}$ 的投影，则 I_n-P 为从 R_n 沿 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{V}$ 的投影。

证 因 I_n-P 是 I_n 与 P 的线性组合，仍为一线性变换，且 $(I_n-P)^2=I_n-P$，故由1.16(1)知 I_n-P 为一投影变换。又因 $(I_n-P)x=I_nx-Px=x-u=v$，故 I_n-P 是从 R_n 沿 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{V}$ 的投影。

1.18(1)若 P 是从 R_n 沿 $\mathscr{V}$ 到 $\mathscr{U}$ 的投影，A 和 B 分别为 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 的基所构成的矩阵，则 $P=(A\,\vdots\,O)(A\,\vdots\,B)^{-1}$。

(2)若 P 是从 R_n 到 $\mathscr{U}$ 的正投影，A 是 $\mathscr{U}$ 的基所构成的矩阵，则 $P=A(A'A)^{-1}A'$。

证 (1)因 $PA=A$，$PB=0$，$P(A\,\vdots\,B)=(PA\,\vdots\,PB)=(A\,\vdots\,O)$，显然 $(A\,\vdots\,B)^{-1}$ 存在，故 $P=(A\,\vdots\,O)(A\,\vdots\,B)^{-1}$。

(2)因 P 为正投影，故 $A'B=0$。由于

$$(A\,\vdots\,B)^{-1}((A\,\vdots\,B)')^{-1}=((A\,\vdots\,B)'(A\,\vdots\,B))^{-1}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}A'\\B'\end{pmatrix}(A\,\vdots\,B)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}A'A & 0\\0 & B'B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}(A'A)^{-1} & 0\\0 & (B'B)^{-1}\end{pmatrix}$$

所以 $$(A\,\vdots\,B)^{-1}=\begin{pmatrix}(A'A)^{-1} & 0\\0 & (B'B)^{-1}\end{pmatrix}(A\,\vdots\,B)'=\begin{pmatrix}(A'A)^{-1}A'\\(B'B)^{-1}B'\end{pmatrix}$$

将其代入(1)便得

$$P=(A\,\vdots\,O)\begin{pmatrix}(A'A)^{-1}A'\\(B'B)^{-1}B\end{pmatrix}=A(A'A)^{-1}A'$$

1.19(1)若 $P_1^2=P_1$，$P_2^2=P_2$，则

$$(P_1+P_2)^2=P_1+P_2\Longleftrightarrow P_1P_2=P_2P_1=0$$

(2)若 $P_1^2=P_1$，$P_2^2=P_2$，则

$$(P_1-P_2)^2=P_1-P_2 \Longleftrightarrow P_1P_2=P_2P_1=P_2$$

证 （1）$\Leftarrow$· 因 $(P_1+P_2)^2=P_1^2+P_1P_2+P_2P_1+P_2^2=P_1+P_1P_2+P_2P_1+P_2$，故当 $P_1P_2=P_2P_1=0$ 时，有 $(P_1+P_2)^2=P_1+P_2$。

$\Rightarrow$· 当 $(P_1+P_2)^2=P_1+P_2$ 时，有 $P_1P_2+P_2P_1=0$，$P_1P_2=-P_2P_1$，$P_2P_1=-P_1P_2$，从而 $P_1P_2=P_1P_1P_2=-P_1(P_2P_1)=-(P_1P_2)P_1=(P_2P_1)P_1=P_2P_1$，$2P_1P_2=0$，$P_1P_2=P_2P_1=0$。

（2）$\Rightarrow$· 因 $P_1=P_2+(P_1-P_2)$，由（1）知 $P_2(P_1-P_2)=(P_1-P_2)P_2=0$，即 $P_1P_2=P_2P_1=P_2$。

$\Leftarrow$· $(P_1-P_2)^2=P_1^2-P_1P_2-P_2P_1+P_2^2=P_1-P_2-P_2+P_2=P_1-P_2$。

1.20 若 $\underset{n\times n}{P}=\underset{n\times r}{F}\ \underset{r\times n}{G'}$，$\mathrm{rk}(P)=\mathrm{rk}(F)=\mathrm{rk}(G)=r$，则

$$P^2=P \longleftrightarrow G'F=I_r$$

证 $\Rightarrow$· 由 $P^2=P$ 知，$FG'FG'=FG'$. 再由 $\mathrm{r}(\mathrm{k}F)=\mathrm{rk}(G)=r$ 知，$(F'F)^{-1}$、$(G'G)^{-1}$ 存在。因而

$$F'FG'FG'G=F'FG'G$$

$$(F'F)^{-1}F'FG'FG'G(G'G)^{-1}=(F'F)^{-1}F'FG'G(G'G)^{-1}$$

$$G'F=I_r$$

$\Leftarrow$· $P^2=FG'FG'=FI_rG'=FG'=P$。

三、矩阵的分解

1.21（秩分解）（1）若 $\mathrm{rk}(A_{n\times m})=r$，则存在满秩矩阵 $P_{n\times n}$ 和 $Q_{m\times m}$，使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

(2)若 $\mathrm{rk}(A_{n\times m})=r$，则存在列满秩矩阵 $F_{n\times r}$ 和 $G_{m\times r}$，使得

$$A=FG', \ \mathrm{rk}(F)=\mathrm{rk}(G)=r$$

证 (1)证明见一般线性代数书。

(2)
$$A=\left(P\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}\right)((I_r\ 0)Q)\xlongequal{\Delta}FG'$$

1.22(谱分解)(1)若 $A_{n\times n}$ 为实对称矩阵，则存在正交矩阵 Γ，使得

$$A=\Gamma\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\Gamma'$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征根。

(2)若 $A_{n\times n}$ 为实对称矩阵，$\mathrm{rk}(A)=r$，则存在 $n\times r$ 正交矩阵 Γ_1，使得

$$A=\Gamma_1\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\Gamma'_1, \ \lambda_1,\cdots,\lambda_r\neq 0$$

证 (1)当 $A_{n\times n}$ 为实对称矩阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda$ 为其特征根时，利用相似正交变换可将 A 变成主对角线元素为 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ 的上三角形矩阵。即存在正交矩阵 Γ，使得

$$\Gamma'A\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

因
$$(\Gamma'A\Gamma)'=\Gamma'A'\Gamma=\Gamma'A\Gamma$$

故
$$\Gamma'A\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$A=\Gamma\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\Gamma'$$

(2)当 $\mathrm{rk}(A)=r$ 时，A 有 r 个非零特征根，设为 $\lambda_1,\cdots,$

λ_r。记 $\Gamma = (\underset{n\times r}{\Gamma_1}\Gamma_2)$，则有

$$A = (\Gamma_1\Gamma_2)\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r 0\cdots 0)\begin{pmatrix}\Gamma'_1 \\ \Gamma'_2\end{pmatrix} = \Gamma_1 \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)\Gamma'_1$$

1.23（奇异值分解） 若 $\mathrm{rk}(A_{n\times m}) = r$，则存在正交矩阵 $U_{n\times n}$、$V_{n\times n}$，使得

$$A = V \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_r\ 0\cdots 0)U'$$

证 因 $A'A$ 对称，$\mathrm{rk}(A'A) = \mathrm{rk}(A) = r$，故存在正交矩阵 U，使得

$$A = U \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_r^2\ 0\cdots 0)U'$$

其中 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_r^2$ 为 $A'A$ 的非零特征根．记 $U = (\underset{n\times r}{U_1} U_2)$，$D_1 = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_r)$，$d_i = \sqrt{\lambda_i^2}$，$i = 1, \cdots, r$，则有

$$A'A = U_1 \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_r^2)U'_1 \Longrightarrow D_1^{-1}U'_1 A'AU_1D_1^{-1} = I_r$$

记 $V_1 = AU_1D_1^{-1}$，则 V_1 是 $n\times r$ 列正交矩阵，并且

$$AA'V_1 = AA'AU_1D_1^{-1} = AU_1D_1^2U'_1U_1D_1^{-1} = AU_1D_1^{-1}D_1^2 = V_1D_1^2$$

因此，V_1 是由 AA' 的相应于 $\lambda_1^2, \cdots, \lambda_r^2$ 的正交规范特征向量所组成。再将 V_1 扩充成 正交 矩阵 $V = (V_1V_2)$。由 V_1 的定义可得

$$V_1D_1U'_1 = AU_1U'_1 = A(I_n - U_2U_2^{-1}) = A - 0 = A$$

因而有
$$A = (V_1V_2)\begin{pmatrix}D_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U'_1 \\ U'_2\end{pmatrix}$$

$$A = V \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_r\ 0\cdots 0)U'$$

§2 A^- 与 A^+

一、A^-

我们知道，线性方程组可以写成矩阵形式 $Ax = y$。当 A 为

$n\times n$ 矩阵，且$|A|\neq 0$时，A^{-1}存在，这时，方程组的解为 $x=A^{-1}y$。然而，当 A 为 $n\times m(n\neq m)$ 矩阵时，或虽 $n=m$，但 $|A|=0$ 时，A^{-1} 不存在．这时，方程组的解就不能表成上述形式。但是，只要方程组相容，方程组必有解。在一般情况下，我们也希望能用矩阵的某种形式来表示方程组的解，引入矩阵的广义逆概念可以做到这点。

定义1.3 设 A 为任一 $n\times m$ 矩阵，$\mathrm{rk}(A)=r$．我们定义 A 的一个"－"号（广义）逆 A^{-} 为 $m\times n$ 矩阵，它满足条件：当方程组 $Ax=y$ 相容时，$x=A^{-}y$ 为方程组的解。

由于当 A 不是方阵或虽为方阵但 $|A|=0$ 时，相容方程组 $Ax=y$ 的解不唯一，所以由广义逆的定义知，A 的"－"号逆也是不唯一的。只有当 A 为方阵且$|A|\neq 0$时，A^{-} 才是唯一的，此时 $A^{-}=A^{-1}$。

2.1 A^{-} 为 A 的"－"号逆 $\Longleftrightarrow AA^{-}A=A$

证 $\Rightarrow$• 若 A^{-} 为 A 的"－"号逆，则 $x=A^{-}y$ 是相容方程 $Ax=y$ 的解。因 $Ax=y$ 相容，故 $y\in R(A)$。因而，对任意向量 u，有 $y=Au$。从而，$AA^{-}Au=Au$，对任意 u 成立。因此，$AA^{-}A=A$。

$\Leftarrow$• 若 $AA^{-}A=A$，则因相容方程组 $Ax=y$ 必有解，且

$$y=Ax=AA^{-}Ax=A(A^{-}y)$$

故 $x=A^{-}y$ 是方程组 $Ax=y$ 的解。因而，A^{-} 是 A 的"－"号逆。

2.2 对任意矩阵 $A_{n\times m}$，$\mathrm{rk}(A)=r$，A^{-} 必存在。

证 对任意秩为 r 的矩阵 A，必存在两个满秩矩阵 $P_{n\times n}$、$Q_{m\times m}$，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{或} A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$$