微分學问题详解

微分學問題詳解

松室隆光著
儲眞譯

中華書局印行

民國二十八年八月印刷
民國二十八年八月發行

微分學問題詳解（全一冊）

實價國幣八角

（郵運匯費另加）

版權所有

原著者　松室隆光
譯者　儲眞
發行者　中華書局有限公司　代表人路錫三
印刷者　上海澳門路　美商永寧有限公司
總發行處　昆明　中華書局發行所
分發行處　各埠　中華書局

（一一三四二）

序

算書之有題解，所以助理解而便自修也．大別之可分爲二類：一隸屬於一書，即就其書中問題爲範圍而爲之解證者；一非隸屬於一書，乃博採羣籍較艱深之問題而爲之解證者．前者西文稱之曰key，直以鑰之於鍵況之，命名之妙，實獲我心，其有功於初學，固不待言．後者吾則以智之鑰視之，蓋善讀之，觸類旁通，足以肆應無窮，而能使人巧，視前者爲用尤勝也．先哲華蘅芳氏所譯代數難題，實其嚆矢，膾炙人口，無俟贅述；時賢譯著，汗牛充棟，佳構實繁．顧其範圍所及，乃自算術以至三角而止，解析幾何與夫微積分學則絕無僅有．習高等算學者，除請益師友外，祇有擿埴索途，苦思冥搜而已．僕嗜算，嘗置日人松室隆光氏所著高等算學叢書之微積分學問題詳解二種，以備參考．各書蒐集重要問題多至二百或三百數十則，固非隸屬於一書，而吾視之爲智之鑰者．解證詳明，並附圖說．而附錄一種，舉凡關於微積分學上之重要定理及公式，亦羅列無遺．僕既珍視之，不揣譾陋，輒取而迻譯之，以公同好．惟人事卒卒，時譯時輟，率爾之譏，疵

謬之處，知所不免，尚祈博雅宏達有以教而正之！

譯者識

民國二十五年十月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

中華書局
出版

〔大學用書之一〕

微積分學

W. M. Baker原著

張季信・黃守中・程綸合譯　精裝一册實售一元

本書爲微積分學之大意，其材料分配，經著者試教後而定，乃學者獲得此科實用知識之捷徑也。凡微分及積分標準形式之較簡者，務使早日能應用於面積，弧長，旋轉體積，及極大極小值之決定，與力學中及物理學中問題之解法，以及簡單之三角函數之展開式等，均爲本書討論之重心。書中所包括之習題及復習題共有七百五十則之多，其選擇與分配均經過極愼重之考慮，而後決定。爲大學數學科最適當之用書。

全書目次

全書共分十七章：㊀函數・極限值・微分係數　㊁$\frac{dy}{dx}$之幾何解釋・切線方程式・縱坐標之極大與極小・轉向點・連續函數・折向點　㊂積及商之微分係數・函數之函數・變數之更換・三角比之微分係數・近似值　㊃微分係數視爲速度量數　㊄極大與極小之例題　㊅$\sin^{-1}x$等之微分係數・e^x之微分係數・e^{ax},a^x, $\log_e x$之微分係數・$\log_a x$之微分係數・對數法微分　㊆積分視爲微分之還原　㊇微分・變數之更換・用分項分數於積分　㊈有定積分　㊉簡單微分方程式・微積分之應用　⑪部分積分法　⑫面積・用極坐標求面積・弧之長度・體積　⑬重心・葛丁或巴卜氏定理・壓力中心・工作與能・霍克氏定律　⑭惰性力勢　⑮掛線・擺線・對數螺線或等角螺線　⑯$\sin\theta$及$\cos\theta$之級數・$\tan^{-1}x$之級數・單和運動　⑰積分之雜例・復習題　〔附〕常數表

中2495〔全〕26,7.

中華書局出版

微分學

段子燮
何魯　編著　一冊　一元

本書著者爲吾國教育界素負盛名之算學專家，因鑒於近今各學校所用算學教本，大都采取西文原本，難免程度不合及前後不相銜接之弊；爰本多年研究心得，與平日教授經驗，著成是書，以供國內各大學教學之用。全書分上下兩編：上編十二章，述微分原理，包括一切；下編五章，論微分應用，詳備無遺。選材審愼，編制完善，凡已習大代數及解析幾何，而欲進習高等分析算學者，當以本書爲必由之途徑。

微積分學初步

李儼著　一冊　四角五分

本書內容計分六章：第一章述微分法公式及其解法；第二章述微分法之應用及其別解；第三章述微分法解義及極大極小問題；第四章述積分法公式及其解法；第五章述積分法之應用；第六章述重積分及其應用。從來初學者對微積分學輒望而生畏，此書則解說詳明，處處引人入勝，卽初中學生曾習代數者，自習此書，亦能領悟，無絲毫困難。

中1923〔仝〕26,8.

微分學問題詳解

目　　次

微分學問題詳解

第一章　基礎定理

1. 設 $x\to 0$ 或 $x\to\pm\infty$ 時,求次之各分數之極限值.

$$(1)\quad \frac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5},\qquad (2)\quad \frac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4}.$$

【解】 (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{2-x+4x^2}=\frac{0}{2}=0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}+1}{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+4}=\frac{1}{4}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3-4x^2+4x^4}{x+5x^2-x^3}$$

$$=\frac{3}{(\pm)0}=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x}+4x}{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}-1}$$

$$=\frac{4(\pm\infty)}{-1}=\mp\infty.$$

2. 設 $x\to 0$ 或 $x\to\pm\infty$ 時,求次之有理分數之極限值.但 a_0、a_n、b_0、b_m 決不爲零.

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}.$$

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}=\frac{a_n}{b_m}.$

因 a_n、b_m 決不爲零，故 $x\to 0$ 時，所求之極限値爲 $\frac{a_n}{b_m}$.

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0x^{m-n}+b_1x^{m-n-1}+\cdots\cdots+\frac{b_m}{x^n}}$$

$$=\frac{a_0}{b_0x^{m-n}}.$$

因 a_0、b_0 決不爲零，故 $x\to\infty$ 時，所求之極限値須視 n 與 m 之關係如何而定. 如 $n>m$，則與 $\frac{a_0}{b_0}$ 爲同符號之無限大；如 $n=m$，則爲 $\frac{a_0}{b_0}$；如 $n<m$，則爲零.

又 $x\to-\infty$ 時，如 $n>m$，則爲 $(-1)^{n-m}\infty$. 如 $n<m$，則爲零.

3. 設 $|x|<1$，而 n 爲正整數時，求證 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

【證】 設 $\frac{1}{|x|}=1+k$，則 $\frac{1}{|x|^n}=(1+k)^n>1+nk$，即

$$\frac{1}{1+nk}>|x|^n.$$

由是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+nk}=0$, $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x^n=0.$

4. 設 $a>0$，而變數 x 之値以 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\cdots\cdots$、$\frac{1}{n}$、$\cdots\cdots$

收斂於0時,求證 $\lim_{x\to 0} a^x=1$.

【證】 設 $a^{\frac{1}{n}}=1+k$,則 $a=(1+k)^n>1+nk$,即

$$k<\frac{a-1}{n}.$$

由是
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0,$$

而
$$\lim_{n\to\infty} k=0,$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0} a^x=1.$$

5. 上題結果,一般以 $\lim_{x\to 0} a^x=1(a>0)$ 表之,求證 e^x 在任何變域內,並 $\log x$ 在 $x>0$ 之變域內,均為連續.

【證】 證明本題,原可取任意十分小之正數 ε,復取其適當對應之小正數 δ,而對於 $|x-0|<\delta$ 之 x 一切值,如有 $|a^x-1|<\varepsilon$ 者,以決定 δ;但以如此場合,不免失敗,故宜採用次之特別方法.

設 $x=\frac{1}{z}$,則 $\lim_{x\to 0} a^x=\lim_{z\to\infty} a^{\frac{1}{z}}$.

又設 $a^{\frac{1}{z}}=1+k(k>-1)$,則 $a=(1+k)^z>1+kz$,即

$$k<\frac{a-1}{z}.$$

由是
$$\lim_{z\to\infty}\frac{a-1}{z}=0,$$

而
$$\lim_{z\to\infty} k=0,$$

$$\lim_{z\to\infty} a^{\frac{1}{z}}=1;$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongb

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

其次,欲證明 e^x 爲連續,可證明次式以知之:

$$\lim_{h\to 0} e^{x+h} - e^x = 0.$$

$$\lim_{h\to 0} e^{x+h} - e^x = \lim_{h\to 0} e^x(e^h - 1)$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x \lim_{h\to 0}(e^h - 1)$$

$$= e^x \cdot 0 = 0.$$

故 e^x 在任何變域內爲連續.

復次,欲證明 $\log x$ 爲連續,可證明次式以知之:

$$\lim_{h\to 0}[\log(x+h) - \log x] = 0.$$

$$\lim_{h\to 0}[\log(x+h) - \log x] = \lim_{h\to 0} \log\frac{x+h}{x}$$

$$= \log \lim_{h\to 0}\frac{x+h}{x} = \log 1 = 0.$$

故 $\log x$ 在 $x>0$ 之變域內,亦爲連續.

6. 設 $n\to\infty$ 時,求 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ 之極限值.

【解】 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

7. 設 $n\to\infty$ 時,求 $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ 之極限值.

【解】 因 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(1+n)}{2}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{2n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

8. 設 $n\to\infty$ 時,求 $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ 之極限值.

【解】 因 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

9. 設 $a>0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$ 之極限值.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

10. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)$ 之極限值.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-x)(\sqrt{1+x+x^2}+x)}{\sqrt{1+x+x^2}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{\sqrt{1+x+x^2}+x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ 之極限值.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$ 之極限值.

【解】 設 $\tan^{-1}x=y$, 則 $x=\tan y$.

參照上題 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=1.$$

13. 設 $a\neq 0$、$b\neq 0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ 之極限值.

【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\dfrac{\sin ax}{ax}}{\dfrac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}.$$

14. 設 x 為第一位之無限小,問函數 $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ 為第幾位之無限小.

【解】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{3x^2-4x^3}}{\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{3-4x}=\sqrt[5]{3}.$$

因 $\sqrt[5]{3}$ 為有限確定值,而 $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ 與 $\sqrt[5]{x^2}$ 屬同位,故與式為第 $\frac{2}{5}$ 位之無限小.

15. 設 x 為第一位之無限小,問函數 $\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{a^3}\,(a>0)$ 為第幾位之無限小.

【解】 因 $\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{a^3}$

$$=\frac{\{\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt{a^3}\}\{\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{a^3}\}}{\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt{a^3}}$$

$$=\frac{3a^2x+3ax^2+x^3}{\sqrt{(a+x)^3}+\sqrt{a^3}},$$

由是 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(a+x)^3}-\sqrt{a^3}}{x}=\frac{3a^2}{2\sqrt{a^3}}=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}.$$

因與與式為同位,故為第一位之無限小.

16. 設 x 為第一位之無限小,問函數 $\tan x-\sin x$

爲第幾位之無限小.

【解】 因 $\tan x-\sin x=\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}$

$$=\frac{4\sin^3\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos x},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{2}}{8\left(\frac{x}{2}\right)^3}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^3\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

即與式與$\left(\dfrac{x}{2}\right)^3$同位,故爲第三位之無限小.

17. 設 x 爲第一位之無限小,問函數 $\log(1+x)$爲第幾位之無限小.

【解】 因 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log e=1.$$

故與式爲第一位之無限小.

18. u_1 對於 v_1 爲第 n 位之無限小,而 u_2 位高於 u_1,如 v_2 之無限小,亦位高於 v_1,則 u_1+u_2 對於 v_1+v_2

仍爲第 n 位之無限小，試證明之.

【證】 由題意

$$\lim_{x\to 0}\frac{u_1}{v_1{}^n}=a\,(\text{常數}),\ \lim_{x\to 0}\frac{u_2}{u_1}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{v_2}{v_1}=0.$$

因
$$\frac{u_1+u_2}{(v_1+v_2)^n}=\frac{u_1+u_2}{v_1{}^n+nv_1{}^{n-1}v_2+\cdots},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{u_1+u_2}{v_1{}^n+nv_1{}^{n-1}v_2+\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{a+\dfrac{u_2}{u_1}}{1+n\dfrac{v_2}{v_1}+\cdots\cdots}=a.$$

故與題符合.

19. 設 u、v 爲同位之無限小，求證 $u\pm v$ 一般仍爲其同位之無限小，並研究其於如何場合則否.

【證】 設 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{v}=a$，則 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u}{v}\pm 1=a\pm 1$，卽

$$\lim_{x\to 0}\frac{u\pm v}{v}=a\pm 1.$$

故 $u\pm v$ 與 u 或 v 爲同位之無限小. 如 $u\pm v$ 與 u 或 v 不同位，須於 $a\pm 1=0$，卽 $a=\mp 1$ 之場合而可.

【例】
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^4}{-x^3-2x^4}=-1.$$

因
$$(x^3+4x^4)+(-x^3-2x^4)=2x^4,$$

故
$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^3+4x^4}{2x^4}=\pm\infty.$$

又
$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{x^3+4x^4}{x^3+2x^4}=1.$$

因
$$x^3+4x^4-(x^3+2x^4)=2x^4,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb