普通高等教育"十二五"规划教材

大学物理导学

张晓春　张晓燕　华玲玲　主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

大学物理导学

主编　张晓春　张晓燕　华玲玲
编写　胡德志　蔡莉莉　李赞佳
主审　任敦亮

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。

本书是根据教育部高等学校物理基础课程教学指导委员会制订的《理工科类大学物理课程教学基本要求》（2008年版）编写的。本书每章均包括基本要求、知识要点、问题讨论、典型例题和本章测试五部分内容。另外，书中配有对应各知识体系的整体测试题和综合模拟试题，书末提供了所有测试题答案，以便于读者进行自我检查。本书编写遵循学生的认知规律，注重理论联系实际，激发学习兴趣，引导自主学习，注意加强培养学生的知识、能力和素质的协调发展。

本书可作为普通高等院校理、工、农、林、医等各专业等各类学生学习大学物理的辅助教材，还可作为其他在职人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理导学/张晓春，张晓燕，华玲玲主编. —北京：中国电力出版社，2012.8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-3433-5

Ⅰ.①大… Ⅱ.①张…②张…③华… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第200482号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http：//www.cepp.sgcc.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2012年10月第一版 2012年10月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 14印张 341千字

定价 **26.00** 元

前　言

大学物理课程是高等学校理工科各专业学生一门重要的通识性必修基础课程。该课程的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分，是科技工作者必备的。它对于培养学生独立获取知识的能力、科学观察和思维的能力、分析问题和解决问题的能力等方面都起着重要作用。在培养学生求实精神、创新意识和科学美感等方面是其他课程不可代替的。对于大学低年级学生来说，由于教学进度快，大学物理与中学物理的差别较大，学习过程中会遇到许多困难。多数学生对物理规律的理解，应用高等数学知识解决物理问题，应用物理原理综合分析解决问题的能力，通过分析、综合、演绎归纳、科学抽象等方法发现问题和提出问题的能力，根据物理问题的特征、性质以及实际情况进行合理简化、建立物理模型的能力等诸多方面，一时难以适应。为了解决上述问题，帮助学生加深对物理基本概念和物理基本规律的理解，掌握解题思路、解题方法、解题的基本步骤，强化科学思维训练，培养学生提出、分析、解决问题的能力。编者在总结多年教学经验的基础上，根据国家制订的教学基本要求和教学大纲，编写了本书，作为学生学习大学物理的辅助教材。

本书每章均包括基本要求、知识要点、问题讨论、典型例题和本章测试五部分内容。每一知识体系配套有一定深度和广度的测试题，最后附有两套综合模拟试题，所有题目均给出答案，以便于读者进行自我检查。本书编写遵循学生的认知规律，注重理论联系实际，激发学习兴趣，引导自主学习，注意加强培养学生的知识、能力和素质的协调发展。

本书由华北科技学院张晓春、张晓燕、华玲玲主编。各章节的具体分工为：张晓春编写了热学测试题、波动与波动光学测试题、近代物理测试题、综合模拟试题和测试题答案，张晓燕编写了第九、十章，华玲玲编写了第十一、十二章，胡德志编写了第一章至第五章、第十四章及力学测试题，蔡莉莉编写了第六章至第八章、第十五章及电磁学测试题，李赞佳编写了第十三章。全书由张晓春、张晓燕、华玲玲统稿。

本书由黑龙江科技学院任敦亮主审。本书在编写过程中得到华北科技学院物理教研室全体教师的支持和帮助，还参阅了许多专家学者的文献资料。在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2012 年 6 月

目　录

第一章　质点运动学

一、基本要求

教学基本要求分为三级：掌握、理解、了解。

（1）理解质点模型和参考系、惯性系等概念。

（2）掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动和运动变化的物理量。理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性。

（3）理解运动方程的物理意义及作用。掌握运用运动方程确定质点的位置、位移、速度和加速度的方法，以及已知质点运动的加速度和初始条件求速度、运动方程的方法。

（4）能计算质点在平面内运动时的速度和加速度，以及质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

二、知识要点

1. 描述质点运动的基本物理量

位移：$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$

速度：$\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}(t)$

加速度：$\boldsymbol{a} = \lim \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

2. 速度、加速度在不同坐标系下的表示

直角坐标系：

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{jk},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}$$

或

$$= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{k},$$

$$= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_y^2}$$

自然坐标系：$s = s(t)$ 为 t 时刻质点的自然坐标值。

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n}$$

$$a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}\ \text{或}=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$$

其中：$\boldsymbol{\tau}$ 为切线方向的单位正矢量；$\boldsymbol{n}$ 为指向曲线凹的一侧的单位法向量；a_τ 表示速度大小的变化率，a_n 表示速度方向的变化率；ρ 为 t 时刻质点所在处的曲线的曲率半径，圆周运动时则为圆周运动的半径。

3. 圆周运动

角位置：$\theta=\theta(t)$，当质点在圆周上运动时位矢与 Ox 轴的夹角。

角位移：$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$

角速度：$\omega=\lim\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：$\alpha=\lim\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$，$\theta$，$\omega$，$\alpha$ 均为逆时针为正，顺时针为负。

角量与线量的关系：$v=\omega r$，$a_\tau=r\alpha$，$a_n=\dfrac{v^2}{r}=\omega^2 r$

4. 基本运动形式

匀变速直线运动：$v=v_0+at$，$x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$，$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$

斜抛运动：$a_x=0$，$\boldsymbol{a}=a_y\mathbf{j}=-g\mathbf{j}$

$v_x=v_0\cos\theta$，$v_y=v_0\sin\theta-gt$

$\boldsymbol{r}=(v_0t\cos\theta)\mathbf{i}+\left(v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}$

匀速率圆周运动：$a_\tau=0$，$a_n=\dfrac{v^2}{r}=\omega^2 r$

匀变速圆周运动：$\omega=\omega_0+\alpha t$，$\theta=\theta_0+\omega t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$，$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)$

5. 相对运动

$$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_e,\quad \boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e$$

其中：$\boldsymbol{v}_a$、$\boldsymbol{a}_a$ 为质点相对于定坐标系的速度和加速度；$\boldsymbol{v}_r$、$\boldsymbol{a}_r$ 为动坐标系相对于定坐标系运动的速度和加速度；$\boldsymbol{v}_e$、$\boldsymbol{a}_e$ 为质点相对于动坐标系的速度和加速度。

三、问题讨论

1. Δs、$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 Δr 三者有何区别？

答 从运动学的观点看，$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 是位移的模，即图 1-1 中 P_1 和 P_2 两点之间的直线距离，可以表示为 $|\Delta\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$，也就是位矢增量的大小；而 Δr 可以表示为 $\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$，即 Δr 代表图 1-1 中 QP_2 之间的距离，是质点位置矢量大小的增量，它反映出质点从 P_1 到 P_2 的空间位矢沿径向方向的变化量。所以，就位移本身的大小而言，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$。

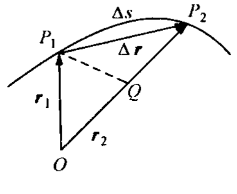

图 1-1 问题讨论 1 图

路程 Δs 是质点在时间 Δt 内运动所经历的实际长度。位移和路程是两个不同的概念，即使在直线运动中也不能混用。在一般情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，只有在 $\Delta t\to 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，或质点始终沿同一方向作直线运动时 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$。

2. 速度与速率有何区别?

答 速度与速率有着严格的区别。速度定义为 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，即单位时间内的位移，它反映质点空间位置变化的快慢和方向，是一个矢量。速率定义为 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，即单位时间内的路程，它反映质点沿轨道移动的快慢，是个标量。

一般来说，位移的大小并不等于相应的曲线路程，故平均速度 $|\bar{\boldsymbol{v}}|=\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|$ 的大小与平均速率 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 通常并不相等。例如质点绕圆周运动一周，平均速度为零，但平均速率却不为零。对于微小位移来说，其大小 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 与相应的曲线运动路程 $\mathrm{d}s$ 趋于相等，所以瞬时速度的大小总是等于瞬时速率，但从概念上来讲，速度与速率的关系并非矢量与它的模的关系。

3. 已知质点的运动方程为 $r=x(t)\mathbf{i}+y(t)\ \mathbf{j}$，有人说其速度和加速度大小分别为 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，$a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，你说对吗?

答 速度大小为 $v=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$，题中的解法错在对位置矢量先取模值，再求导数。由于 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\neq\mathrm{d}r$，所以求出的 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 并不是速度的大小。同理，$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ 也不是加速度的大小。

正确的计算速度和加速度大小的方法为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$a=\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{j}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

4. 运动方程、轨道（轨迹）方程和路程公式的比较

答 质点的位置坐标随时间变化的函数关系称为质点的运动方程。在不同的坐标系中，同一质点的位置用不同的坐标来表示。显然，同一质点的同一运动在不同坐标系中将具有不同形式的运动方程。在直角坐标系中，运动方程的矢量式为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$，其分量式为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

质点运动时所经历的空间轨迹的数学方程称为质点的轨道方程。在直角坐标系中，轨道方程为

$$f(x,y,z)=0$$

物体运动时所通过的实际路径的长度称为路程。曲线路程要通过速率对时间的积分来求出。这是因为速率就是路程对时间的变化率，即 $v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$。由此得路程微元为 $\mathrm{d}s=v(t)\mathrm{d}t$，故质点在 $t_1\to t_2$ 时间内所经历的路程为 $s_2-s_1=\int\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t$。

综上所述，运动方程不是位移公式，也不是路程公式。运动方程在力学中占据很重要的

地位。知道了运动方程，就能确定质点在任意时刻的位置，通过求导可得出质点在任意时刻的速度和加速度。从运动方程中消去参数 t，就可得到运动的轨道方程。由此可见，知道了运动方程，也就掌握了质点运动的全貌。故探讨运动方程是力学中的中心课题。

5. 如图 1-2 所示，湖中有一小船，在离水面高为 h 的岸边，一人以匀速率 v_0 拉着船靠岸，不考虑水流速度，你认为小船的运动是匀速的吗？若小船不是匀速运动那么做何种运动？

答 想要知道小船是否匀速运动和作何种运动，可先求出质点的运动方程，然后求导即可求出速度和加速度来进行判断，千万不可主观认定小船的运动为匀速。

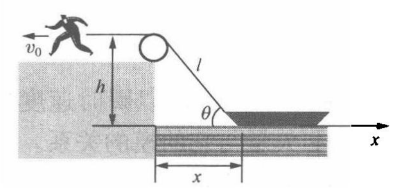

图 1-2 问题讨论 5 图

解法一：建立坐标系如图 1-2 所示。设 $t=0$ 时，滑轮与小船之间的绳长为 l_0，则在 t 时刻绳长为 $l=l_0-v_0t$，此时小船的位置坐标为

$$x=\sqrt{l^2-h^2}=\sqrt{(l_0-v_0t)^2-h^2}$$

则小船运动的速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-(l_0-v_0t)v_0}{\sqrt{(l_0-v_0t)^2-h^2}}=\frac{-lv_0}{x}\left(=-\frac{v_0}{\cos\theta}\right)$$

加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0^2h^2}{[(l_0-v_0t)^2-h^2]^{3/2}}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

式中的负号表示小船做沿 x 轴负方向的变加速直线运动。

解法二：由几何约束关系知 $l^2=x^2+h^2$，将其左右两边关于 t 求导，得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$，注意到 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=-v_0$，所以小船的运动速度为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{x}v_0\left(=-\frac{v_0}{\cos\theta}\right)$$

加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-v_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{l}{x}\right)=-v_0\frac{x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2}=-\frac{v_0^2h^2}{x^3}$$

运动学中求速度、加速度的一般方法是先写出位置坐标与时间的关系式，然后通过求导得出速度与加速度。但对于有几何约束的问题，常常由几何约束条件通过求导得出速度，进而求出加速度更为简捷。

6. 如果有两个质点分别以初速度 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 抛出，则 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 在同一平面内且与水平面的夹角分别为 θ_1 和 θ_2。有人说，在任一时刻，两质点的相对速度是一常量。你说对吗？

答 对。若取 $\boldsymbol{v}_{10}$ 的质点为参考系，则速度为 $\boldsymbol{v}_{20}$ 的质点，相对于它的速度变为 $\boldsymbol{v}_2'=\boldsymbol{v}_{20}-\boldsymbol{v}_{10}$ 显然是一个恒矢量。也可以说两质点都受重力作用，那么取其中一个作为参考系，则重力作用就没有影响。若取地面为参考系，则有

$$v_x=v_0\cos\theta,\quad v_y=v_0\sin\theta-gt$$

任意时刻 t

$$\boldsymbol{v}=v_0\cos\theta\mathbf{i}+(v_0\sin\theta-gt)\mathbf{j}$$

两质点相对速度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = (v_{x2} - v_{x1})\mathbf{i} + (v_{y2} - v_{y1})\mathbf{j} \\ &= (v_{20}\cos\theta_2 - v_{10}\cos\theta_1)\mathbf{i} + (v_{20}\sin\theta_2 - v_{10}\sin\theta_1)\mathbf{j} \\ &= (v_{20}\cos\theta_2\mathbf{i} + v_{20}\sin\theta_2\mathbf{j}) - (v_{10}\cos\theta_1\mathbf{i} + v_{10}\sin\theta_1\mathbf{j}) \\ &= \boldsymbol{v}_{20} - \boldsymbol{v}_{10} \end{aligned}$$

由此可见，物理问题的实质与所选参考系无关，只是解题过程的繁易程度受影响。

四、典型例题

【例 1 - 1】 一质点自原点开始沿抛物线 $2y=x^2$ 运动，它在 Ox 轴上的分速度为一恒量，其值为 $v_x=4.0\text{m/s}$，求质点位于 $x=2.0\text{m}$ 处的速度和加速度。

解 质点在 x 方向作匀速直线运动，则有 $x=v_xt$

又由质点的轨道方程有 $y=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}v_x^2t^2$，对此式求导数，可得

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_x^2t,\quad a_y = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = v_x^2$$

当质点位于 $x=2.0\text{m}$ 处时，代入以上式子，可得

$$v = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}(\text{m/s}),\quad a = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = 16\mathbf{j}(\text{m/s}^2)$$

【例 1 - 2】 质点在 xOy 平面内运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\mathbf{i}+(19-2t^2)\mathbf{j}$（SI 制）。求：

（1）质点的轨迹方程。

（2）在 $t_1=1\text{s}$ 到 $t_2=2\text{s}$ 的平均速度。

（3）$t_1=1\text{s}$ 时的速度及切向和法向加速度。

解 （1）由质点的运动方程得 $x=2t$，$y=19-2t^2$

消去参数 t 得质点的轨迹方程 $y = 19 - \frac{x^2}{2}$

（2）$\boldsymbol{r}|_{t=1}=2\mathbf{i}+17\mathbf{j}$，$\boldsymbol{r}|_{t=2}=4\mathbf{i}+11\mathbf{j}$，$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=2\mathbf{i}-6\mathbf{j}$（m/s）

（3）$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}=2\mathbf{i}-4t\mathbf{j}$，$\boldsymbol{v}|_{t=1}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}$（m/s）

$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4+16t^2}$，$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{j}=4\mathbf{j}$（m/s²）

$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=3.58\boldsymbol{\tau}$（m/s²），$\boldsymbol{a}_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}\boldsymbol{n}=1.79\boldsymbol{n}$（m/s²）

【例 1 - 3】 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$，在 $t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=10\mathbf{i}$。求在任意时刻质点的速度和位置矢量（SI 制）。

解 已知速度或加速度，经过积分，利用起始条件，便可得到运动方程，这是运动学的第二类问题。

由已知条件有 $a_x=6\text{m/s}^2$，$a_y=4\text{m/s}^2$

即 $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=6$，$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=4$

将上两式左右两侧积分 $\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x = \int_0^t 6\mathrm{d}t$，$\int_0^{v_y}\mathrm{d}v_y = \int_0^t 4\mathrm{d}x$

得 $v_x=6t$，$v_y=4t$

$$\frac{dx}{dt}=6t,\ \frac{dy}{dt}=4t$$

$$\int_{10}^{x}dx=\int_{0}^{t}6t\,dt,\quad \int_{0}^{y}dy=\int_{0}^{t}4t\,dt$$

$$x-10=3t^2,\ y=2t^2$$

所以 $$\boldsymbol{v}=6t\mathbf{i}+4t\mathbf{j},\ \boldsymbol{r}=(10-3t^2)\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}$$

【例 1-4】 一个正在行驶的快艇在发动机关闭后，有一个与它速度方向相反的加速度，其大小与它的速度平方成正比，即$\frac{dv}{dt}=-kv^2$，式中 k 为常数。试求快艇在关闭发动机后又行驶距离 x 与速度的函数关系及与时间的函数关系。

解 已知$\frac{dv}{dt}=-kv^2$，分离变量再积分得$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\int_{0}^{t}-k\,dt$

所以$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+kt$，即 $v=\frac{v_0}{1+kv_0t}$，又 $v=\frac{dx}{dt}$

由$\int_{0}^{x}dx=\int_{0}^{t}\frac{v_0}{1+kv_0t}dt$，得 $x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$

消去 x 及 v 表达式中的 t，可得 $x=\frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v}$，即 $v=v_0e^{-kx}$

说明：若只求 x 与 v 的函数关系，可以利用 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=-kv^2$

分离变量再积分$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_{0}^{x}-k\,dx$，可得 $\ln\frac{v}{v_0}=-kx$，即 $v=v_0e^{-kx}$

【例 1-5】 半径为 R 的圆周运动上运动的质点，其速率与时间关系为 $v=ct^2$（c 为常量)，求从 $t=0$ 到 t 时刻质点走过的路程以及 t 时刻质点的切向加速度和法向加速度。

解 此题属于质点曲线运动问题，可用自然坐标系中的相应公式求解。

由 $v=\frac{ds}{dt}$，可得 $ds=ct^2dt$，两侧同时积分可得$\int_{0}^{s}ds=\int_{0}^{t}ct^2dt$，所以 $s=\frac{1}{3}ct^3$

切向加速度 $a_\tau=\frac{dv}{dt}=2ct$，法向加速度 $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{c^2t^4}{R}$。

【例 1-6】 一半径为 0.50m 的飞轮在启动时的短时间内，其角速度与时间的平方成正比。在 $t=2.0$s 时测得轮缘一点的速度值为 4.0m/s。求：

(1) 该轮在 $t=0.5$s 的角速度，轮缘一点的切向加速度和总加速度。

(2) 该点在 2.0s 内所转过的角度 θ。

解 此题为运动学第一类问题和第二类问题的综合问题。根据已知条件，可以确定角速度随时间变化的函数关系。用求导的方法可求得角加速度。然后由角量和线量的关系，可以求得切向加速度和总加速度。

(1) 设飞轮角速度与时间平方成正比的比例系数为 k，则有 $\omega=kt^2$，得

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{Rt^2}=\frac{4}{0.5\times2^2}=2(\text{rad/s}^3)$$

所以 $\omega=2t^2$，求导可得 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=4t$，$a_\tau=R\alpha=2t$，$a_n=R\omega^2=2t^4$

将 $t=0.5$s 代入以上式子，可得 $\boldsymbol{\alpha}=2\text{rad/s}^2$，$a_\tau=1\text{m/s}^2$，$a_n=0.125\text{m/s}^2$

总加速度　　$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=1.01\ (\mathrm{m/s^2})$

(2) 由 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，可得 $\mathrm{d}\theta=2t^2\mathrm{d}t$，两边同时积分 $\int_0^\theta \mathrm{d}\theta=\int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$

得 $\theta=\dfrac{2}{3}t^3$，代入 $t=2.0\mathrm{s}$，得 $\theta=5.33\mathrm{rad}$。

【例 1-7】 一汽车在雨中沿直线行驶，其速率为 v_1，下落雨滴的速度方向偏于竖直方向之前 θ 角，速率为 v_2。若车后有一长方形物体沿车前进方向的长为 l，物体顶部距车顶的距离为 h，如图 1-3 所示，问车速 v_1 为多大以上时，此物体不会被雨水淋湿？

解 本题为相对运动问题。以雨点为研究对象，地面为静止参考系，汽车为运动参考系。如图 1-3 所示，要使车后的长方形物体不被淋湿，雨点相对于汽车的速度 v_2'的方向应满足 $\tan\alpha\geqslant\dfrac{l}{h}$。

由 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_2'+\boldsymbol{v}_1$，作图 1-4。由图可知，$\tan\alpha=\dfrac{v_1-v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta}$

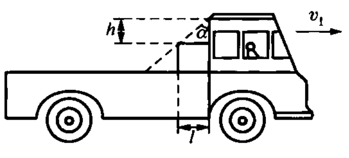

图 1-3 ［例 1-7］图 (1)

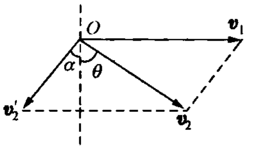

图 1-4 ［例 1-7］图 (2)

要使物体不被淋湿，则有　　$\tan\alpha=\dfrac{v_1-v_2\sin\theta}{v_2\cos\theta}\geqslant\dfrac{l}{h}$

即　　$v_1\geqslant v_2\left(\dfrac{l\cos\theta}{h}+\sin\theta\right)$

五、本章测试

1. 根据加速度的定义及其用直角坐标和自然坐标的表示形式，加速度的大小可表示为（　　）。

(A) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a$　　(B) $\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=a$　　(C) $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=a$　　(D) $\left|\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|=|\boldsymbol{a}|$

2. 下列说法中，正确的是（　　）。

(A) 一质点在某时刻的瞬时速度是 2m/s，说明它在此后 1s 的时间内一定要经过 2m 的路程

(B) 斜向上抛的物体，在最高点处的速度最小，加速度最大

(C) 物体作曲线运动时，有可能在某时刻的法向加速度为零

(D) 物体加速度越大，则速度越大

3. 一质点的运动学方程为 $\boldsymbol{r}=2t\mathbf{i}+(2-t^2)\mathbf{j}$ (SI 制)，则质点在 $t=2\mathrm{s}$ 时质点的速度 v 大小和加速度 a 大小为（　　）。

(A) $v=6\mathrm{m/s}$，$a=2\mathrm{m/s^2}$　　(B) $v=2\sqrt{5}\mathrm{m/s}$，$a=2\mathrm{m/s^2}$

(C) $v=2\sqrt{5}\mathrm{m/s}$，$a=2\sqrt{2}\mathrm{m/s^2}$　　(D) $v=6\mathrm{m/s}$，$a=2\sqrt{2}\mathrm{m/s^2}$

4. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（θ，v 表示任一时刻质点的角位

置和速度大小）（　　）。

(A) $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$　　(B) $\dfrac{v^2}{R}$　　(C) $\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{v^2}{R}$　　(D) $\sqrt{\left(\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right)^2R^2+\dfrac{v^4}{R^2}}$

5. 一小球沿斜面向上运动，其运动方程为 $s=5+4t-t^2$（SI），则小球运动到最高点的时刻是（　　）。

(A) $t=4$s　　(B) $t=2$s　　(C) $t=8$s　　(D) $t=5$s

6. 质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，运动方程为 $\theta=2+4t^2$，则 $t=2$s 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$__________；角加速度 $\alpha=$__________。

7. 一质点在平面上作曲线运动，其速率 v 与路程 s 的关系为 $v=1+s^2$（SI），则其切向加速度以路程 s 表示的表达式为____________________。

8. 一质点从静止出发，沿半径 $R=3$m 的圆周运动，切向加速度 $a_\tau=3\text{m/s}^2$，当总加速度与半径成 45°时，所经过的时间为__________ s，在上述时间内质点经过的路程为__________ m。

9. 在一个转动的齿轮上，一个齿尖 P 沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间的变化规律为 $s=v_0t+\dfrac{1}{2}bt^2$，其中 v_0 和 b 都是正的常量，则 t 时刻齿尖 P 的速度大小为__________，加速度大小为__________。

10. 两辆车 A 和 B，在笔直的公路上同向行驶，它们从同一起始线上同时出发，并且由出发点开始计时，行驶的距离 x(m) 与行驶时间 t(s) 的函数关系式：A 为 $x_A=4t+t^2$，B 为 $x_B=2t^2+t^3$，则：

(1) 它们刚离开出发点时，行驶在前面的一辆车是____________________。

(2) 出发后，两辆车行驶距离相同的时刻是____________________。

(3) 出发后，B 车相对 A 车速度为零的时刻是____________________。

11. 有一水平飞行的飞机，速度为 $\boldsymbol{v}_0$，在飞机上以水平速度 $\boldsymbol{v}$ 向前发射一颗炮弹，忽略空气阻力并设发炮过程不影响飞机的速度，则以地球为参考系时，炮弹的轨迹方程为____________________；以飞机为参考系时，炮弹的轨迹方程为____________________。

12. 如图 1-5 所示，椭圆规的 AB 杆上，A、B 两点分别沿 OY 槽、OX 槽移动，试证明杆上一点 C 的轨迹为椭圆。又设杆上的 A 点以匀速 v_0 运动，求 B、C 两点的速度。

13. 质点 M 在水平面内运动轨迹如图 1-6 所示，OA 段为直线，AB、BC 段分别为半径不同的两个 1/4 圆周。设 $t=0$ 时，M 在 O 点，已知其运动方程为 $s=30t+5t^2$，求 $t=2$s 时质点 M 的切向加速度和法向加速度。

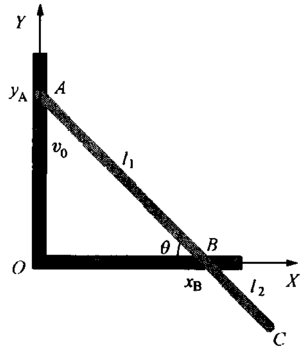

图 1-5　本章测试 12 题图

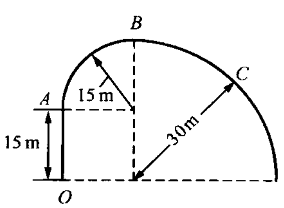

图 1-6　本章测试 13 题图

14. 一石子从空中由静止下落，由于空气阻力，石子并非作自由落体运动。现已知加速度 $a=A-Bv$，式中 A、B 为常量。试求石子的速度和运动方程。

15. 一飞轮绕固定轴转动，其角加速度为 $\alpha=A\cos\theta$，当 $t=0$ 时，$\theta_0=\frac{\pi}{6}$，$\omega_0=0$，求当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，角速度为多少？

16. 设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回到 A 处，飞机相对空气的速率为 v'，而空气相对地面的速率为 u，A、B 间的距离为 l，飞机相对空气的速率保持不变，试求下列三种情形下飞机来回的飞行时间。

（1）空气是静止的（即 $u=0$）。

（2）空气的速度向东。

（3）空气的速度向北。

第二章 牛 顿 运 动 定 律

一、基本要求

(1) 掌握牛顿三定律及其使用条件。

(2) 熟练掌握用整体法和隔离法分析物体的受力情况，能用微积分方法求解变力作用下的质点动力学问题。

二、知识要点

1. 牛顿运动定律

牛顿第一定律：物体所受合外力 $\boldsymbol{F}=\sum \boldsymbol{F}_i=0$ 时，则 $\boldsymbol{v}$ 为恒矢量。

牛顿第二定律：
$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$$

若物体运动速度远小于光速时，m 为常矢量，则 $\boldsymbol{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$或 $F=m\boldsymbol{a}$。

在直角坐标系下的投影式为
$$\begin{cases} F_x=ma_x=m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ F_y=ma_y=m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \\ F_z=ma_z=m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

在自然坐标系下的投影式为
$$\begin{cases} F_\tau=ma_\tau=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_n=ma_n=m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

牛顿第三定律：两物体之间的作用力 $\boldsymbol{F}$ 与反作用力 $\boldsymbol{F}'$ 大小相等、方向相反，沿同一条直线，分别作用在两个物体上，即 $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'$。

2. 几种常见的力

万有引力：$\boldsymbol{F}=-G\dfrac{mM}{r^2}\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}_0$ 表示 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量。

重力：
$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$$
弹性回复力：
$$F=-kx$$
静摩擦力：$0\leqslant f_{静}\leqslant f_{静\max}$，$f_{静\max}=\mu_0 N$，$\mu_0$ 为静摩擦系数。

滑动摩擦力：$f=\mu N$，μ 为滑动摩擦系数，N 为垂直于接触面的正压力。

3. 惯性系与非惯性系

牛顿运动定律成立的参考系称为惯性系，不成立的参考系称为非惯性系。相对于惯性系作匀速直线运动的参考系是惯性系。在所有惯性系中，牛顿力学的规律具有相同的形式。

4. 运动牛顿运动定律解题的基本步骤

选取研究对象、画受力分析图、选取坐标系、根据牛顿运动定律列方程求解。

三、问题讨论

1. 牛顿万有引力定律能用在多大尺度范围内?

答 目前，实验已经证明牛顿万有引力定律适用于从毫米到太阳系半径大小的范围内。如果用到亚毫米级必须对万有引力常数 G 进行修正。对于大的星系团牛顿万有引力是否适用还在探索之中。

2. 将一质量略去不计的轻绳，跨过无摩擦的定滑轮，一只猴子抓住绳的一端，绳的另一端悬挂一个质量和高度均与猴子相等的镜子，开始时，猴子与镜子在同一水平面上，猴子为了不看到镜子中的猴像，作了下面三种尝试:

(1) 向上爬;

(2) 向下爬;

(3) 松开绳子自由下落，这样猴子是否就看不到它在镜中的像了?

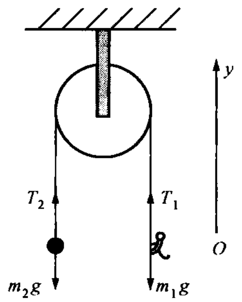

图 2-1 问题讨论 2 图

答 首先进行受力分析，如图 2-1 所示，猴子受绳的拉力 T_1 和重力 m_1g，镜子受绳的拉力 T_2 和重力 m_2g，用牛顿第二定律列方程如下

$$T_1 - m_1 g = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}$$

已知 $m_1 = m_2$，绳子的质量及滑轮摩擦不计，所以 $T_1 = T_2$，则$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2 y_2}{dt^2}$，而且猴子与镜子的初始状态相同，所以积分之后 $y_1 = y_2$，即当猴子上爬或下爬的过程中，猴子与镜子的高度始终相同。

如果猴子自由下落，则没有绳的拉力作用，镜子也只受重力作用自由下落，又因为它们的初始状态相同，所以任意时刻下落高度相同。

因此，当猴子向上爬、向下爬或自由下落时都能在镜子中看到自己的像。

讨论:

(1) 如果绳子的两端是两只质量相等的猴子，从同一高度向上爬，则这两只猴子是否能同时到达滑轮?

因为两只猴子质量相同，初始状态也相同，因此应同时到达。

(2) 如果两只猴子质量不同，分别为 M、m，且 $M>m$，则两只猴子从同一高度同时向上爬，哪一只先到达滑轮?

以地球为参考系，哪只猴子具有较大的向上加速度，哪只猴子就先到达滑轮（因为初始状态相同）。由牛顿第二定律列方程，得

$$T - Mg = Ma_1, \quad T - mg = ma_2$$

$$a_1 = \frac{T}{M} - g, \quad a_2 = \frac{T}{m} - g$$

比较可得，$a_1 < a_2$，即小猴的加速度大，而且初始状态相同，所以小猴先到达滑轮。

3. 如图 2-2 所示，在升降机的天花板上固定一个单摆，当升降机静止时，让摆球从 θ_0

角处摆下。则：

(1) 当摆球摆到最高点时，升降机以重力加速度下落，试问摆球相对于升降机如何运动？

(2) 当摆球摆到最低点时，升降机突然下落，则摆球相对于升降机又将如何运动？

答 (1) 摆球相对于升降机静止。

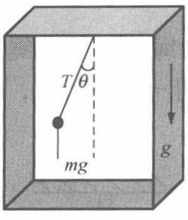

图 2-2 问题讨论 3 图

如图 2-2 所示，摆球到最大位移处时，相对电梯的速度为零，向心加速度 $a_n=\frac{v^2}{l}=0$，又因绳中张力 T 为零，重力 mg 与惯性力 $-mg$ 之和为零。所以摆球相对于升降机静止。

(2) 摆球相对于升降机作匀速圆周运动。

摆球到最低位置时速度为 v，向心加速度 $a_n=\frac{v^2}{l}$，升降机下降，以升降机为参考系，重力与惯性力平衡，合力为绳中张力 T，T 与运动方向垂直，因此摆球以速率 v 作圆周运动，此时绳中张力为 $T=m\frac{v^2}{l}$。

4. 如图 2-3 所示，一半径为 R 的木桶，以角速度 ω 绕其轴转动。有一人紧贴在木桶壁上，人与木桶间的静摩擦系数为 μ_0。问在什么情况下，人会紧贴在木桶壁上而不掉下来？

答 当桶壁对人的摩擦力等于人的重力时不会落下，$f=N\mu_0=mg$，所以正压力 $N=\frac{mg}{\mu_0}$。人对桶的正压力大小等于桶对人的弹力，亦等于人的向心力，$N=m\omega^2R$。

即 $\frac{mg}{\mu_0}=m\omega^2R$，得 $\omega^2R\mu_0=g$，此时人刚好不会掉下来。

所以当 $\omega\geqslant\sqrt{\frac{g}{R\mu_0}}$ 时，人不会掉下来。

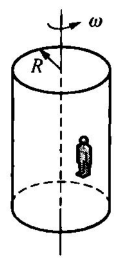

图 2-3 ·问题讨论 4 图

四、典型例题

【例 2-1】 如图 2-4 所示，一斜面倾角为 α，底边长为 2.1m，质量为 m 的物体从斜面顶端由静止开始向下滑动，斜面的摩擦系数为 $\mu=0.14$，试问：当 α 为何值时，物体在斜面上下滑的时间最短？其值为多少？

解 本题是质点动力学与运动学相结合问题。由动力学方程和运动学方程，解出倾角 α 与时间的函数关系，即 $\alpha=f(t)$，然后对 t 求极值。

以物体 m 为研究对象，进行受力分析并建立坐标系，如图 2-5 所示。列方程如下

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - f = ma \\ N - mg\cos\alpha = 0 \\ f = \mu N \\ \dfrac{l}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

解得

$$t=\sqrt{\frac{2l}{g\left(\frac{1}{2}\sin2\alpha-\mu\cos^2\alpha\right)}}$$