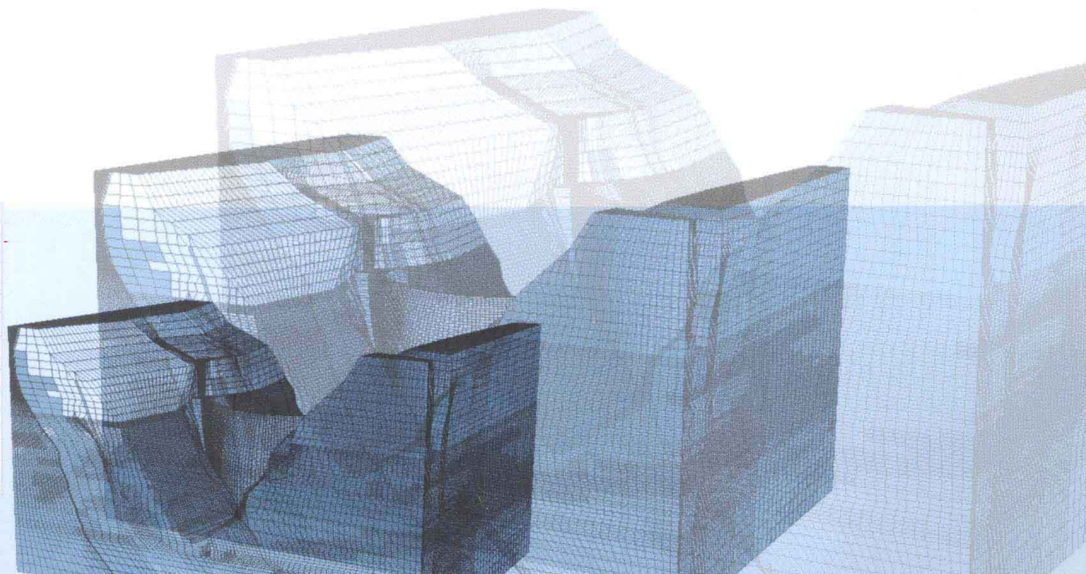
高等学校教材

弹性力学简明教程

第四版

徐芝纶



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

弹性力学简明教程

Tanxing Lixue Jianming Jiaocheng

第四版

徐芝纶

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是在第三版（普通高等教育“十五”国家级规划教材）的基础上，根据2006—2010年教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的“弹性力学教学基本要求”，以及近十年的教学实践经验修订而成的。本书前三版均被国内的工科院校广泛使用。

本书按照由浅入深的原则，安排了平面问题的理论及解答，空间问题的理论及解答和薄板弯曲理论等内容；着重介绍了弹性力学的主要近似方法，即差分法、变分法和有限单元法。

本书作为弹性力学的入门教材，注重基本理论（基本概念、基本方程和基本解法）的阐述，突出解决弹性力学问题的思路、方法和步骤，以使学生在掌握基本理论的基础上能阅读和应用弹性力学文献，并能应用弹性力学的近似解法解决工程实际问题。

本书可作为高等学校工科本科有关专业的弹性力学课程教材，并可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学简明教程/徐芝纶编著．--4版．--北京：高等教育出版社，2013.6
ISBN 978-7-04-037387-5

Ⅰ.①弹…　Ⅱ.①徐…　Ⅲ.①弹性力学-高等学校-教材　Ⅳ.①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第096353号

策划编辑　水　渊　　责任编辑　黄　强　　封面设计　于文燕　　版式设计　马敬茹
责任校对　胡美萍　　责任印制　毛斯璐

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　国防工业出版社印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　16
字　　数　290千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　1980年1月第1版
　　　　　2013年6月第4版
印　　次　2013年6月第1次印刷
定　　价　25.30元

物 料 号　37387-00

第四版前言

弹性力学是固体力学中的一门基础学科，是解决大型、复杂工程结构分析的基础技术课程，因此是现代土木、水利等工程师必须掌握的一门重要知识。学习弹性力学的目的，是掌握弹性力学的基本理论（基本概念、基本方程和基本解法），从而可以理解弹性力学问题的已有解答，应用于实际工程中；并且能够使用弹性力学问题中的近似解法（差分法、变分法和有限单元法），去解决实际工程中的问题。

根据2006—2010年教育部高等学校力学教学指导委员会力学基础课程教学指导分委员会制定的“弹性力学教学基本要求”，以及近十年的教学实践经验，我们在保持前几版《弹性力学简明教程》的体系、基本内容和风格的基础上，做了以下几方面的修订：

（1）对基本理论做了进一步的强调和说明，以使读者能够深入理解和掌握弹性力学的内容。例如关于弹性力学的研究方法、基本假定、两类平面问题，弹性力学的基本方程，以及按位移求解、按应力求解的基本方法，边界条件和圣维南原理的应用，变分解法和有限单元法等都做了进一步阐述。

（2）为提高读者解决实际问题的能力，在本次修订中进一步突出了解题的思路、方法和步骤的阐述。

（3）在各章后增加了内容提要，以利读者理清弹性力学的知识系统，抓住重点，巩固和加深理解所学的知识。每章后给出了习题提示，供读者解题时参考。

（4）对全书的文句及图表做了进一步完善与修订。

修订者衷心地感谢国内许多专家教授及河海大学老师们的帮助、支持和提出的宝贵意见，特别要感谢同济大学吴家龙教授的审稿和宝贵建议。希望今后在专家教授和读者的帮助下，使本教材能继续改进、完善，以适应教学的进步与发展。

本书第四版由河海大学王润富执笔修订。

本书封面插图为锦屏拱坝的有限单元法计算网格图，由河海大学工程力学系提供。

王润富

2012年11月

第三版前言

徐芝纶教授编著的《弹性力学简明教程》，具有内容精炼、深入浅出、易学易懂等特点，被许多工科院校广泛采用。第二版自1983年出版以来，已有相当长的时间了。为了适应科技的发展和贯彻新的国家标准和规范，及时反映教学实践中的经验，第三版在严格地保持原作的特点和风格下，做了少部分的修订。

本书的修订工作是在高等教育出版社的支持下进行的。河海大学弹性力学教研室曾广泛地征求国内许多院校的教授和专家的意见，并经多次讨论研究，又在高等教育出版社组织召开的座谈会上进行讨论，最后才将意见归纳并进行修订的。

修订的具体内容如下：(1) 书中的量和单位的名称、符号及书写规则按1993年发布的GB 3100～3102—1993《量和单位》系列国家标准拟定，科技名词术语按全国自然科学名词审定委员会1993年公布的《力学名词》执行。(2) 为了更便于初学者掌握弹性力学内容，对基本理论（基本概念、基本方程和基本解法）及其应用作了一些强调和说明，如关于边界条件、圣维南原理的应用、按位移求解、按应力求解、有限单元法的概念、差分法的概念、解题的思路和步骤等，都在叙述上补充了少量说明。修订者认为，这对初学者是有益的。此外，第三版中在一些重点内容和结论性的文字下面加排了波纹线。(3) 为加强实践性教学环节，习题量增加了近一倍，这样，任课教师根据教学要求，可有较大的选择余地。这些习题的计算工作量不大，但对巩固基本知识很有好处。(4) 在有限单元法中，由于多数文献是从变分原理导出公式的，因此，书中补充了从最小势能原理导出三角形单元公式的内容。此外，本书主要是使学生建立有限单元法的基本概念，故不再补充其他更多的内容。关于有限单元法程序，由于各校的计算机及使用的语言多不相同，且大都已经有了自己的程序，故也不作提供。(5) 为便于读者阅读弹性力学文献，在附录B中简单地介绍了直角坐标系中的下标记号法。

本书的修订，特别要感谢许多院校教授和专家的支持。张元直编审、姜弘道教授、卓家寿教授等都提出了许多重要意见，徐慰祖教授认真审阅了修订稿，特向他们致以深切的谢意。并希望教师和学生在今后的使用过程中，对修订稿提出宝贵意见，以使徐芝纶教授编著的教科书得到进一步的完善。

本书第三版由河海大学王润富执笔修订。

王润富

2001年8月

第二版前言

本书的第二版，是参照1980年8月教育部审定的《高等工业学校弹性力学教学大纲（草案）》对第一版进行修订而成的。由于第一版的内容超出该大纲所规定的较多，因此，修订时主要是删繁就简，只是对个别章节中的讲解有所补充。

首先，该大纲完全没有涉及温度应力问题和有关任一点形变状态的问题，对薄壳问题则“建议根据专业的需要情况，另设选修课程”。在第二版中，当然就删去了这三方面的内容。其次，在该大纲的说明书中，变分法和薄板的弯曲问题并没有列入“本课程的基本要求”，因此，第二版中对这两部分内容作了较多的删减。

体系和章节次序的安排，都保持或改为和该大纲一致。

在第二版中，仍然有一些章节的内容是该大纲中没有明确包括、或者虽然明确包括但是加了星号的，如全部讲授，总共约需56至60学时。如专业教学计划中配给本课程的学时只有46至50，上述章节就不一定要讲授，其中包括§2-7，§4-7，§6-9，§8-2，§8-4至§8-8，§9-7至§9-9。

某些专业教学计划只给本课程以30至35学时。对这些专业的学生，可以完全不讲授空间问题和薄板的弯曲问题，还可以不讲变分法的内容。这样，仍然可以达到该大纲中对“本课程的基本要求”。

徐芝纶

1983年5月

第一版前言

本书是为高等学校水利、土建类专业编写的弹性力学教材。书中的内容系摘自编者为高等学校工科力学专业编写的《弹性力学》,以及以华东水利学院的名义编写的《弹性力学问题的有限单元法》,在内容的编排上根据水利、土建类专业的需要作了一些变动。

本书全部内容所需的教学时数,可能略多于现行有关专业教学计划中所规定的时数,各专业可根据不同情况对其中部分内容适当取舍。各章之后的习题,数量较多,可按照学生课外学时数的多少,布置其中的一部分。

本书承主审人清华大学龙驭球同志和太原工学院、浙江大学、成都科学技术大学、武汉建筑材料工业学院、北京工业大学、南京工学院、北京建筑工程学院、武汉水利电力学院、华北水利水电学院、西南交通大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见,特此表示衷心的感谢。

姜弘道和李昭银两位同志参加了本书的编写工作。

徐芝纶

1979 年 11 月

主要符号表

弹性力学(方括号内表示其量纲①)

坐标[L或1]　直角坐标 x,y,z; 圆柱坐标 ρ,φ,z; 极坐标 ρ,φ。

体力分量[$L^{-2}MT^{-2}$]　f_x,f_y,f_z(直角坐标系);f_ρ,f_φ,f_z(圆柱坐标系);f_ρ,f_φ(极坐标系)。

面力分量[$L^{-1}MT^{-2}$]　$\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$(直角坐标系);$\bar{f}_\rho,\bar{f}_\varphi,\bar{f}_z$(圆柱坐标系);$\bar{f}_\rho,\bar{f}_\varphi$(极坐标系)。

位移分量[L]　u,v,w(直角坐标系);u_ρ,u_φ,u_z(圆柱坐标系); u_ρ,u_φ(极坐标系)。

边界约束分量[L]　$\bar{u},\bar{v},\bar{w}$(直角坐标系)。

方向余弦[1]　l,m,n(直角坐标系)。

应力分量[$L^{-1}MT^{-2}$]　正应力 σ,切应力 τ;全应力 p;斜面应力分量 p_x,p_y,p_z(直角坐标系);σ_n,τ_n;体积应力 Θ。

应变分量[1]　线应变 ε,切应变 γ;体应变 θ。

势能和功[L^2MT^{-2}]　形变势能 U,外力势能 V,总势能 E_P;功 W。

艾里应力函数 Φ[LMT^{-2}]。

弹性模量 E[$L^{-1}MT^{-2}$],切变模量 G[$L^{-1}MT^{-2}$],体积模量 K[$L^{-1}MT^{-2}$]。

泊松比 μ[1]。

有限单元法(平面直角坐标系,三结点三角形单元)

体力列阵　$\boldsymbol{f}=(f_x \quad f_y)^T$。

面力列阵　$\bar{\boldsymbol{f}}=(\bar{f}_x \quad \bar{f}_y)^T$。

集中力列阵　$\boldsymbol{f}_P=(f_{Px} \quad f_{Py})^T$。

位移函数列阵　$\boldsymbol{d}=(u(x,y) \quad v(x,y))^T$。

单元结点位移列阵　$\boldsymbol{\delta}^e=(\boldsymbol{\delta}_i \quad \boldsymbol{\delta}_j \quad \boldsymbol{\delta}_m)^T$,　$\boldsymbol{\delta}_i=(u_i \quad v_i)^T$　(i,j,m)。

---

① 量纲采用国际单位制(SI)表示,以长度(L)、质量(M)、时间(T)、电流(I)、热力学温度(Θ)、物质的量(N)、发光强度(J)为基本量。量纲一的量以符号"1"表示。

单元结点力列阵　$\boldsymbol{F}^e=(\boldsymbol{F}_i\quad\boldsymbol{F}_j\quad\boldsymbol{F}_m)^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{F}_i=(F_{ix}\quad F_{iy})^{\mathrm{T}}$　　(i,j,m)。

单元结点荷载列阵　$\boldsymbol{F}_L^e=(\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}i}\quad\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}j}\quad\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}m})^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}i}=(F_{\mathrm{L}ix}\quad F_{\mathrm{L}iy})^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)。

单元位移矩阵　$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{N\delta}^e$　（$\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵）。

单元应变矩阵　$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B\delta}^e$。

单元应力矩阵　$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D\varepsilon}=\boldsymbol{S\delta}^e$　（$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为应力转换矩阵，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{DB}$）。

单元结点力矩阵　$\boldsymbol{F}^e=\boldsymbol{k\delta}^e$　（$\boldsymbol{k}$ 为单元劲度矩阵，$\boldsymbol{k}=\int_A\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB}\mathrm{d}x\mathrm{d}yt$）。

单元结点荷载矩阵　$\boldsymbol{F}_L^e=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{P}}t+\int_{s_\sigma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{f}}\mathrm{d}st+\int_A\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}yt$。

结点平衡方程组　$\boldsymbol{K\delta}=\boldsymbol{F}_L$　（$\boldsymbol{K}$ 为整体劲度矩阵，$\boldsymbol{K}_{ij}=\sum\boldsymbol{k}_{ij}$）。

目　录

第一章　绪　论

§1-1　弹性力学的内容

弹性体力学，通常简称为**弹性力学**，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支，其中研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

弹性力学和材料力学、结构力学都是研究结构在弹性阶段的应力、形变和位移，校核它们是否满足强度、刚度和稳定性的要求。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有区别。

从**研究对象**上来看，材料力学主要研究杆状构件，如柱体、梁和轴，在拉压、剪切、弯曲和扭转等作用下的应力、形变和位移。结构力学是在材料力学的基础上，研究杆状构件所组成的杆件系统结构，例如桁架、刚架等。弹性力学研究各种形状的弹性体，除杆件外，还研究平面体、空间体、平板和壳体等。因此，弹性力学的研究对象更为广泛。

从**研究方法**上来看，弹性力学和材料力学，既有相似之处，又有一定的区别。**弹性力学的研究方法**是，在弹性体区域内必须严格地考虑静力学、几何学和物理学三方面的条件，在边界上必须严格地考虑受力条件和约束条件，由此建立微分方程和边界条件并进行求解，得出较精确的解答。而在材料力学中虽然也考虑这几方面的条件，但不是十分严格的。例如，材料力学中求解问题时，常引用近似的计算假设（如平面截面假设）来简化问题，使问题的求解大为简化；并在许多方面进行了近似处理，如在梁中忽略了 σ_y 的作用，且平衡条件和边界条件也不是严格地满足的。一般地说，由于材料力学所建立的是近似理论，因此得出的是近似解答。但是，对于细长的杆状构件而言，材料力学解答的精度是足够的，符合工程上的要求（例如误差在 5% 以下）。对于非杆状构件，用材料力学方法得出的解答，往往具有较大误差，必须用弹性力学方法进行求解。

从数学上来看，弹性力学问题归结为在边界条件下求解微分方程组，属于微分方程的边值问题。在弹性力学中已经得出了许多解答，但是对于实际的工程问题，由于边界形状和受力状况等的复杂性，往往难以求得理论的解答。20 世纪 50 年代发展起来的**有限单元法**，是把连续的弹性体划分为许多有限大小的单

元，并在结点上联结起来，构成所谓“离散化结构”，然后用结构力学解法或变分解法并应用电子计算机进行求解。现在，有限单元法已经发展和应用到弹性力学、固体力学、流体力学等学科，成为解决微分方程边值问题的有力手段，并且由于应用了电子计算机进行计算，其结果可以达到足够的精度。因此，用有限单元法解决工程上的弹性力学和其他固体力学等问题，已经没有什么困难了。

弹性力学是固体力学的一个分支，实际上它也是各门固体力学的基础。因为弹性力学在区域内和边界上所考虑的一些条件，也是其他固体力学必须考虑的基本条件。弹性力学中的许多基本解答也常常供其他固体力学应用或参考。

弹性力学在土木、水利、机械、交通、航空等工程学科中占有重要的地位。这是因为许多工程结构是非杆状的，需要用弹性力学方法进行分析；并且由于近代经济和技术的高速发展，许多大型、复杂的工程结构大量涌现，这些结构的安全性和经济性的矛盾十分突出，既要保证结构的安全运行，又要尽可能地节省投资，因此必须对结构进行严格而精确的分析，这就需要应用弹性力学、其他固体力学的理论及相应的有限单元法。由此可见，对于工科学生而言，弹性力学及其有限单元法是进行工程结构分析的非常重要的一门学科。

§1－2 弹性力学中的几个基本概念

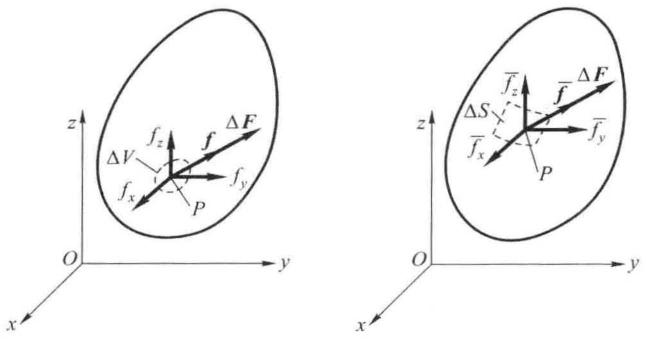
弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。以下说明这些物理量的定义、符号、量纲、正方向及其正负号的规定，以及与材料力学正负号规定的异同。

外力是指其他物体对研究对象（弹性体）的作用力。外力可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为**体力**和**面力**。

所谓体力，是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况，一般是不相同的。为了表示该物体在某一点 P 所受体力的大小与方向，在这一点取物体的一小部分，它包含着 P 点而它的体积为 ΔV（图 1－1a）。设作用于 ΔV 的体力为 $\Delta \boldsymbol{F}$，则体力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$。如果把所取的那一小部分物体不断减小，即 ΔV 不断减小，则 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在命 ΔV 无限减小而趋于 P 点，假定体力为连续分布，则 $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta V$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{f}$，即

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} = \boldsymbol{f}。$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{f}$ 就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量，所以 $\boldsymbol{f}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{F}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{f}$ 在坐标轴 x,y,z 上的投影 f_x,f_y,f_z，称为该物体



(a)　(b)

图 1-1

在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲是 $\mathrm{L}^{-2}\mathrm{MT}^{-2}$。

所谓面力,是分布在物体表面上的力,例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况一般也是不相同的。为了表示该物体在表面上某一点 P 所受面力的大小与方向,在这一点取该物体表面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔS(图 1-1b)。设作用于 ΔS 的面力为 $\Delta \boldsymbol{F}$,则面力的平均集度为 $\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$。与上相似,命 ΔS 无限减小而趋于 P 点,假定面力为连续分布,则 $\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$ 将趋于一定的极限 $\bar{\boldsymbol{f}}$,即

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S} = \bar{\boldsymbol{f}}。$$

这个极限矢量 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量,所以 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{F}$ 的极限方向。矢量 $\bar{\boldsymbol{f}}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ 称为该物体在 P 点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲是 $\mathrm{L}^{-1}\mathrm{MT}^{-2}$。

物体受外力作用以后,其内部将产生**内力**,即物体内部不同部分之间相互作用的力。为了研究物体在某一点 P 处的内力,假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 Ⅰ 和 Ⅱ 两部分,图 1-2,则在切开的两边截面上,物体部分 Ⅰ 和 Ⅱ 就相互作用一对大小相同、方向相反的力,这就是内力。若将 Ⅱ 部分撇开,撇开的部分 Ⅱ 将对 Ⅰ 的截面 mn 上作用一定的内力。取这一截面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔA。设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta \boldsymbol{F}$,则内力的平均集度,

即平均应力为$\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}$。现在命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力连续分布，则$\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}$将趋于一定的极限 $\boldsymbol{p}$，即

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} = \boldsymbol{p}。$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{p}$ 就是物体在截面 mn 上 P 点的**应力**。因为 ΔA 是标量，所以应力 $\boldsymbol{p}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{F}$ 的极限方向。

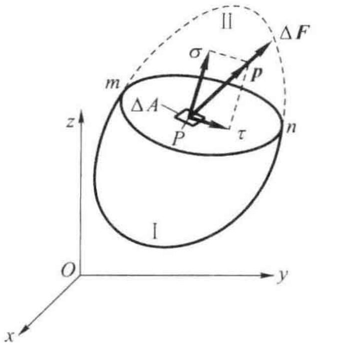


图 1-2

任一截面上的全应力 $\boldsymbol{p}$，可以分解为沿坐标方向的分量 p_x, p_y, p_z；也可以分解为沿截面的法线方向及切线方向的分量，也就是**正应力**σ和**切应力**τ，如图 1-2 所示，后者是与物体的形变和材料的强度直接相关的。应力及其分量的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$。

在物体内的同一点 P，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，首先来表示通过这一点的各直角坐标面上的应力分量。为此，在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体，它的棱边分别平行于三个坐标轴，长度分别为 $PA = \Delta x, PB = \Delta y, PC = \Delta z$，如图 1-3 所示，它的六个面都是"坐标面"，即其外法线都是沿坐标方向的。凡外法线沿坐标轴正方向的，该面称为正坐标面或正面；凡外法线沿坐标轴负方向的，该面称为负坐标面或负面。每一个坐标面上的全应力 $\boldsymbol{p}$，都可以分解为一个正应力和两个切应力（图 1-3）。σ_x 表示作用于 x 面上且沿 x 方向的正应力，余类推；τ_{xy} 表示作用于 x 面上且沿 y 方向的切应力，余类推。

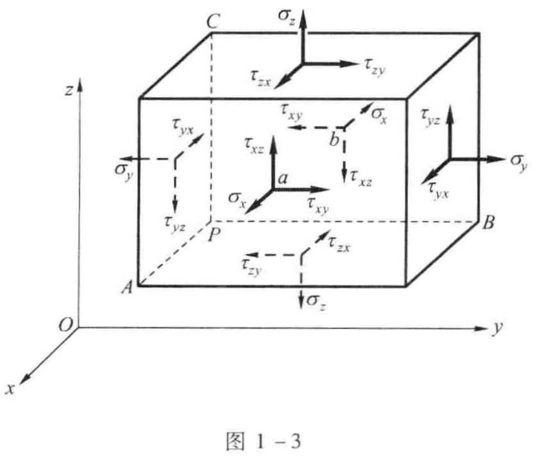


图 1-3