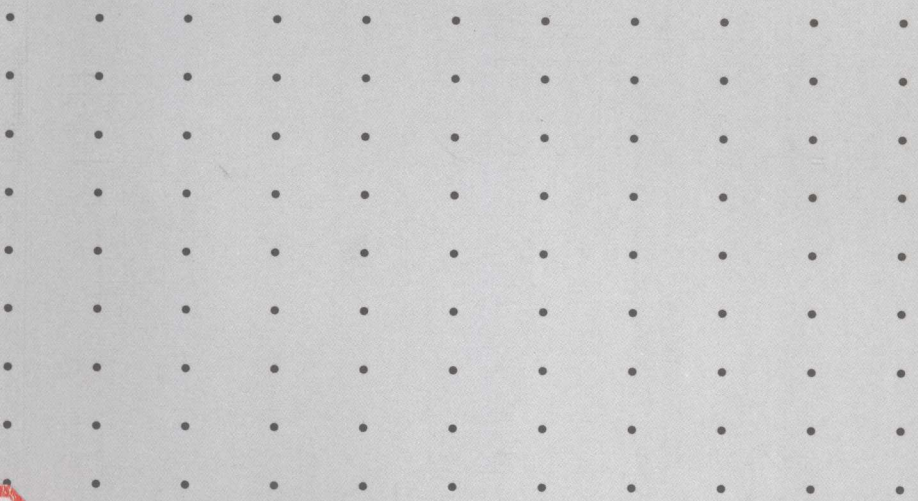


33 现代芬斯勒几何初步

■ 沈一兵 沈忠民



1546270

现代数学基础

33

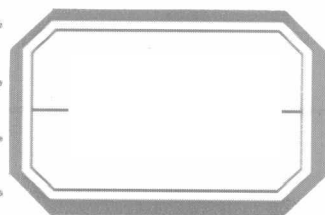
现代芬斯勒几何初步

0186.14

01

■ 沈一兵 沈忠民

XIANDAI FENSILE JIHE CHUBU



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

近些年来, 芬斯勒几何的研究取得了全新的实质性进展。如果说黎曼几何是一幅深刻描述空间形态的黑白图画, 那么芬斯勒几何就是这种描述的绚丽多姿的彩色画卷。芬斯勒几何的观点和方法, 不仅与数学的其他分支, 如微分方程、李群、代数学、拓扑学、非线性分析等密切相关, 而且在数学物理、理论物理、生物数学、控制论、信息论等其他学科中得到越来越广泛的应用。

本书由作者在多年教学实践的基础上编写而成。作者以张量分析为主要工具, 系统介绍了芬斯勒几何的基本概念和方法, 并兼顾经典理论和最新进展的内容, 使读者在阅读本书后能独立从事芬斯勒几何的研究。全书分两大篇: 基础篇和研究篇, 共十一章。内容包括: 微分流形、芬斯勒度量、陈联络和结构方程、S 曲率、芬斯勒度量的黎曼曲率、芬斯勒度量的射影变换、芬斯勒流形的体积比较定理和基本群、芬斯勒子流形和调和映射等。书中还附有 Maple 计算程序。

本书可作为高等院校数学专业本科高年级和研究生的教材, 也可作为数学物理、理论物理、工程控制论等专业的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代芬斯勒几何初步 / 沈一兵, 沈忠民著. -- 北京: 高等教育出版社, 2013. 1
ISBN 978-7-04-034525-4

I. ①现… II. ①沈… ②沈… III. ①芬斯勒空间
IV. ①O186.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 233790 号

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京汇林印务有限公司	网上订购	http://www.landracom.com
开 本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landracom.com.cn
印 张	23.25	版 次	2013 年 1 月第 1 版
字 数	430 千字	印 次	2013 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 34525-00

序 言

“芬斯勒几何 (Finsler Geometry) 就是没有二次型限制的黎曼几何。”这是已故著名几何学大师陈省身先生的话。事实上,早在 1854 年,黎曼 (B. Riemann) 在他的著名就职演说中已提出了后来所称的芬斯勒几何的概念。他看到了度量的二次型情况 (即通常所谓的黎曼度量) 与一般情况的区别,并选择前者为代表进行系统研究。直到 1918 年,芬斯勒 (P. Finsler) 才研究了一般度量情况下曲线与曲面的几何。此后人们就习惯地把一般度量情况的几何称为芬斯勒几何。因此,更确切的称呼应是黎曼-芬斯勒几何。

近二十多年来,芬斯勒几何的研究取得了全新的实质性进展,发展了像整体黎曼几何那样的整体芬斯勒几何,使芬斯勒几何的面貌大为改观。如果说黎曼几何是一幅深刻描述空间形态的黑白图画,那么芬斯勒几何就是这种描述的绚丽多姿的彩色画卷。芬斯勒几何的观点和方法,不仅与数学的其他分支,如微分方程、李群、拓扑学、非线性分析等密切相关,而且在数学物理、理论物理、生物数学、控制论、信息论、图像处理等其他学科中得到越来越多的应用。因此,无论在基础研究还是在实际应用上,黎曼-芬斯勒几何都日益显示出它的勃勃生机和巨大价值。

为了满足大学高年级学生和研究生的教学需求,在文献 [10, 95] 的影响下,在多年教学实践的基础上,我们编写了这本讲义。全书十一章,可分为两大篇:基础篇和研究篇。基础篇共有五章:第一章简单介绍微分流形,包括流形上的向量丛;第二章介绍芬斯勒度量,包括嘉当挠率和喷射 (spray);第三章介绍联络和结构方程,包括陈联络,各种曲率, Bianchi 恒等式和 Legendre 变换;第四章介绍 S 曲率,这是本书第二位作者在研究芬斯勒流形的体积比较时引进的重要非黎曼

几何量; 第五章介绍芬斯勒度量的黎曼曲率, 包括测地线的第二变分, 数量旗曲率, Ricci 曲率和度量的导航问题. 研究篇共有六章: 第六章介绍芬斯勒度量的射影变换, 包括各种射影平坦的芬斯勒度量; 第七章介绍芬斯勒流形的比较定理, 包括体积比较定理, Berger-Kazdan 比较定理; 第八章介绍芬斯勒流形的基本群, 包括基本群增长和有限性, 第一 Betti 数的估计, Gromov 预紧性定理; 第九章介绍极小浸入与调和映射, 包括芬斯勒体积变分, 极小曲面的 Bernstein 型定理, 能量变分, 调和映射的 Liouville 型定理, 复芬斯勒流形的调和映射; 第十章介绍芬斯勒-爱因斯坦度量, 包括爱因斯坦度量的射影刚性和各种特殊的爱因斯坦度量; 第十一章介绍芬斯勒几何中某些相关的问题, 包括芬斯勒度量的共形变换, 共形向量场, 一类临界芬斯勒度量, 芬斯勒 Laplacian 的第一特征值估计等. 每章最后附有习题, 供读者思考, 其中有些习题是正文的重要补充. 最后的附录介绍了相应的 Maple 计算程序.

本书的特点是以张量分析为主要工具, 系统介绍芬斯勒几何的基本概念和基本方法, 也介绍芬斯勒几何的重要研究方向. 尽可能兼顾到芬斯勒几何的经典理论和最新进展, 使读者在学完本教程后能独立从事芬斯勒几何的研究. 本书可作为大专院校数学科学的高年级选修课教材及研究生教材, 也可作为数学物理、理论物理、固体物理、工程控制、图像处理等专业的参考书. 我们相信, 本书对完善国内的几何学著作具有积极意义.

限于笔者的水平, 书中疵谬和不妥之处在所难免, 恳请读者不吝指教, 以供再版时修正. 借此机会, 谨向被本书引用的文献作者、国家自然科学基金委 (No. 11171297)、浙江大学数学科学中心和浙江大学数学系, 以及帮助笔者的许多几何学研究生深致感谢.

最后, 笔者衷心感谢高等教育出版社对本书出版的大力支持和帮助.

沈一兵 沈忠民

2012 年 5 月

目 录

基 础 篇

第一章 微分流形	3
§1.1 微分流形	3
1.1.1 微分流形	3
1.1.2 微分流形的例子	3
§1.2 向量场与张量场	5
1.2.1 向量丛	5
1.2.2 张量场	7
§1.3 外形式与外微分	8
1.3.1 外微分算子	8
1.3.2 de Rham 定理	9
§1.4 向量丛和联络	10
1.4.1 向量丛的联络	10
1.4.2 联络的曲率	11
习题	12
第二章 芬斯勒度量	14
§2.1 芬斯勒度量	14
2.1.1 芬斯勒度量	14

2.1.2 芬斯勒度量的例子	16
§2.2 嘉当挠率	21
2.2.1 嘉当挠率	21
2.2.2 Deicke 定理	22
§2.3 希尔伯特形式和喷射	25
2.3.1 希尔伯特形式	25
2.3.2 喷射	27
§2.4 测地线	28
2.4.1 测地线	28
2.4.2 测地系数	29
2.4.3 测地完备性	31
习题	33
第三章 联络与曲率	35
§3.1 联络	35
3.1.1 陈联络	35
3.1.2 Berwald 度量和 Landsberg 度量	38
§3.2 曲率	39
3.2.1 陈联络的曲率形式	39
3.2.2 旗曲率和 Ricci 曲率	41
§3.3 Bianchi 恒等式	42
3.3.1 共变微分	42
3.3.2 Bianchi 恒等式	45
3.3.3 其他公式	47
§3.4 Legendre 变换	48
3.4.1 对偶空间的对偶模	48
3.4.2 Legendre 变换	50
习题	52
第四章 S 曲率	53
§4.1 体积测度	53
4.1.1 Busemann-Hausdorff 体积元	53
4.1.2 射影球丛 SM 诱导的体积元	56

§4.2 S 曲率	58
4.2.1 畸变	58
4.2.2 S 曲率和 E 曲率	59
§4.3 迷向 S 曲率	62
4.3.1 迷向 S 曲率和迷向 E 曲率	62
4.3.2 迷向 S 曲率的 Randers 度量	63
4.3.3 测地流	66
习题	68
第五章 黎曼曲率	70
§5.1 弧长的第二变分	70
5.1.1 第二变分	70
5.1.2 曲率与拓扑初步	73
§5.2 数量旗曲率	75
5.2.1 Schur 定理	76
5.2.2 常数旗曲率	78
§5.3 整体刚性结果	81
5.3.1 特殊旗曲率条件	81
5.3.2 非正旗曲率流形	84
§5.4 导航术	86
5.4.1 导航问题	86
5.4.2 Randers 度量与导航术	91
5.4.3 Ricci 曲率和爱因斯坦度量	96
习题	104

研 究 篇

第六章 射影变换	107
§6.1 射影等价	107
6.1.1 射影等价	107
6.1.2 射影不变量	109

§6.2 射影平坦度量	113
6.2.1 射影平坦度量	113
6.2.2 常旗曲率的射影平坦度量	115
§6.3 具有殆迷向 S 曲率的射影平坦度量	125
6.3.1 具有殆迷向 S 曲率的 Randers 度量	125
6.3.2 具有殆迷向 S 曲率的射影平坦度量	129
§6.4 射影等价的特殊芬斯勒度量	132
6.4.1 射影等价的 Randers 度量	132
6.4.2 (α, β) 度量的射影等价	135
6.4.3 二次 (α, β) 度量的射影等价	139
习题	141
第七章 比较定理	143
§7.1 芬斯勒流形的体积比较定理	143
7.1.1 指数映射的 Jacobi	143
7.1.2 距离函数和比较定理	148
7.1.3 体积比较定理	150
§7.2 Berger-Kazdan 比较定理	160
7.2.1 Kazdan 不等式	160
7.2.2 可反芬斯勒流形的刚性	165
7.2.3 Berger-Kazdan 比较定理	170
习题	174
第八章 芬斯勒流形的基本群	176
§8.1 芬斯勒流形的基本群	176
8.1.1 基本群与覆盖空间	176
8.1.2 代数模和几何模	179
8.1.3 基本群的增长	183
§8.2 基本群的熵和有限性	189
8.2.1 基本群的熵	189
8.2.2 第一 Betti 数	192
8.2.3 基本群的有限性	196

§8.3 Gromov 预紧性定理	202
8.3.1 广义度量空间	202
8.3.2 δ -Gromov-Hausdorff 收敛性	207
8.3.3 芬斯勒流形的预紧性	213
习题	215
第九章 极小浸入与调和映射	216
§9.1 等距浸入	216
9.1.1 芬斯勒子流形	216
9.1.2 体积变分	219
9.1.3 紧致极小子流形的不存在性	223
§9.2 极小子流形的刚性	224
9.2.1 Minkowski 空间的极小曲面	224
9.2.2 (α, β) 空间中的极小曲面	228
9.2.3 特殊 Minkowski- (α, β) 空间的极小曲面	231
§9.3 调和映射	236
9.3.1 散度公式	236
9.3.2 调和映射	239
9.3.3 复合映射	243
§9.4 调和映射的第二变分	246
9.4.1 第二变分	246
9.4.2 应力-能量张量	249
§9.5 复芬斯勒流形的调和映射	251
9.5.1 复芬斯勒流形	251
9.5.2 复芬斯勒流形的调和映射	255
9.5.3 全纯映射	261
习题	263
第十章 爱因斯坦度量	266
§10.1 射影刚性和 m 次根度量	266
10.1.1 爱因斯坦度量的射影刚性	266
10.1.2 m 次根爱因斯坦度量	269

§10.2 Ricci 刚性和 Douglas 爱因斯坦度量	271
10.2.1 Ricci 刚性	271
10.2.2 Douglas (α, β) 度量	272
§10.3 爱因斯坦 (α, β) 度量	276
10.3.1 多项式 (α, β) 度量	276
10.3.2 Kropina 度量	278
习题	287
第十一章 其他有关论题	289
§11.1 共形变换	289
11.1.1 共形变换	289
11.1.2 共形平坦度量	292
11.1.3 共形平坦 (α, β) 度量	297
§11.2 共形向量场	299
11.2.1 共形向量场	299
11.2.2 Randers 流形的共形向量场	306
§11.3 一类临界芬斯勒度量	312
11.3.1 爱因斯坦-希尔伯特泛函	312
11.3.2 某些特殊的 $\mathcal{E}$ 临界度量	316
§11.4 芬斯勒 Laplacian 的第一特征值	318
11.4.1 芬斯勒 Laplacian 和带权 Ricci 曲率	318
11.4.2 Lichnerowicz-Obata 型估计	321
11.4.3 Li-Yau-杨-钟型估计	326
11.4.4 McKean 型估计	330
习题	331
附录 Maple 计算程序	332
参考文献	343
索引	353

基 础 篇

第一章 微分流形

§1.1 微分流形

1.1.1 微分流形

定义 1.1 一个 n 维微分流形由一个具有可数基的 Hausdorff 拓扑空间 M 和一族满足下列条件的同胚映射 $\phi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ 构成:

- (i) $\{U_\alpha\}$ 是 M 的开覆盖, 即 U_α 是开集且 $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$;
- (ii) 若 $U_\alpha \cap U_\beta = V \neq \emptyset$, 则 $\phi_\alpha(V)$ 和 $\phi_\beta(V)$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(V)}$ 是可微的;
- (iii) 集合 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 关于 (i), (ii) 是极大的.

若 $p \in U_\alpha$, 则 (U_α, ϕ_α) 称为点 p 的一个坐标邻域. 可将 $\phi_\alpha(q) \in \phi_\alpha(U_\alpha)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标视为 $q \in U_\alpha \subset M$ 的坐标. 满足 (i), (ii) 的集合 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 称为 M 的一个微分结构. 条件 (iii) 纯粹是为了技术上的原因.

1.1.2 微分流形的例子

例 1.1 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

例 1.2 欧氏单位球面

$$\mathbb{S}^n = \left\{ (y^1, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \left| \sum_{\alpha=1}^{n+1} (y^\alpha)^2 = 1 \right. \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

取 $\mathbb{S}^n$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的子拓扑, 即 $U \subset \mathbb{S}^n$ 为开集的充要条件是存在开集 $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 使得 $U = \tilde{U} \cap \mathbb{S}^n$. 从而, $\mathbb{S}^n$ 是一个具有可数基的 Hausdorff 空间. 下面在 $\mathbb{S}^n$ 上引入一个微分结构. 对所有的 $1 \leq \alpha \leq n+1$, 令

$$\tilde{U}_\alpha^+ = \{(y^1, \dots, y^{n+1}) | y^\alpha > 0\}, \quad \tilde{U}_\alpha^- = \{(y^1, \dots, y^{n+1}) | y^\alpha < 0\}.$$

$\tilde{U}_\alpha^\pm$ 正是超平面 $y^\alpha = 0$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中割出的两个开集. 于是, 开集族 $\{U_\alpha^\pm = \tilde{U}_\alpha^\pm \cap \mathbb{S}^n\}$ 覆盖 $\mathbb{S}^n$. 利用正投影定义映射 $\phi_\alpha^\pm: U_\alpha^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\phi_\alpha^\pm(y^1, \dots, y^{n+1}) = (y^1, \dots, \widehat{y^\alpha}, \dots, y^{n+1}),$$

其中 $\widehat{y^\alpha}$ 表示除去相应的项. 易知 $\phi_\alpha^\pm$ 是从 $U_\alpha^\pm$ 到开集 $W_\alpha = \{(y^1, \dots, \widehat{y^\alpha}, \dots, y^{n+1}) \in \mathbb{R}^n | \sum_{\beta \neq \alpha} (y^\beta)^2 < 1\}$ 的同胚. 因此, $\mathbb{S}^n$ 为局部欧氏空间. 进一步, 容易验证坐标变换是光滑的. 比如 $U_2^- \cap U_1^+$ 上的变换 $\phi_2^- \circ (\phi_1^+)^{-1}$ 为

$$\begin{aligned} (y^2, \dots, y^{n+1}) &\xrightarrow{(\phi_1^+)^{-1}} \left(\sqrt{1 - \sum_{\alpha=2}^{n+1} (y^\alpha)^2}, y^2, \dots, y^{n+1} \right) \\ &\xrightarrow{\phi_2^-} \left(\sqrt{1 - \sum_{\alpha=2}^{n+1} (y^\alpha)^2}, y^3, \dots, y^{n+1} \right). \end{aligned}$$

用 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 与 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ 分别替代 U_1^+ 和 U_2^- 上原有的坐标 $(y^2, \dots, y^{n+1})$ 与 $(y^1, y^3, \dots, y^{n+1})$, 则有

$$\bar{x}^1 = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (x^i)^2}, \quad \bar{x}^j = x^j, \quad j = 2, \dots, n.$$

因此, $\mathbb{S}^n$ 是 n 维光滑流形.

例 1.3 实射影空间 RP^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有过原点 $O = (0, \dots, 0)$ 的直线的集合; 即 RP^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的“方向”集. 因此, RP^n 可视为球面 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 通过黏合对径点而得到的商空间 $\mathbb{S}^n/A$, 其中映射 A 为 $A(p) = -p, p \in \mathbb{R}^{n+1}$. 事实上, 每条过原点 O 的直线唯一决定了球面上的一组对径点, 因此 RP^n 与 $\mathbb{S}^n/A$ 是一一对应的.

设 $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow RP^n$ 为正则投影, 即 $\pi(p) = \{p, -p\}$. 利用例 1.2 中所构造的 $\mathbb{S}^n$ 的微分结构, 可知 $\pi(U_\alpha^+) = \pi(U_\alpha^-)$ 且 $\{\pi(U_\alpha^\pm)\}$ 覆盖 RP^n . 显然, $\phi_\alpha = \phi_\alpha^\pm \circ \pi^{-1}$ 是从 $\pi(U_\alpha^\pm)$ 到 $W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ 的同胚, 因此类似例 1.2, RP^n 具有一个微分结构. 于是, RP^n 是一个光滑流形, 而 $\mathbb{S}^n$ 可以看作 RP^n 的二重覆盖.

设 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标为 $(x^1, \dots, x^{n+1})$. 在 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中定义如下一种等价关系 $\sim$: 如果对于两个点 $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n+1})$ 和 $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$, 存在实数 $\lambda \neq 0$

使得 $\bar{x} = \lambda x$, 则 $\bar{x} \sim x$. 那么, 实射影空间 RP^n 就是商空间 $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. 这时 $(x^1, \dots, x^{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$ 称为 RP^n 的齐次坐标.

例 1.4 Grassmann 流形 $G_{k,n} = \{\mathbb{R}^n \text{ 中所有过原点的 } k \text{ 平面}\}$. 取定 $\mathbb{R}^n$ 上的一组么正基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 则正交群 $O(n)$ 通过自然的矩阵乘法作用于 $\mathbb{R}^n$; 另一方面, 非奇异线性变换将 k 平面映为 k 平面, 因此有映射

$$A: O(n) \times G_{k,n} \rightarrow G_{k,n}.$$

注意到, 对于任意的 k 平面 P 和 Q , 存在 $\sigma \in O(n)$ 使得 $A(\sigma, P) = Q$. 设 P_0 为由 $e_1, \dots, e_k$ 张成的 k 平面, 记 $H \subset O(n)$ 为保持 P_0 不变的子群. 则

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in O(n) \mid \alpha \in O(k), \beta \in O(n-k) \right\},$$

因此 H 是 $O(n)$ 的闭子群, 并且同构于 $O(k) \times O(n-k)$. 从而, $\sigma(O(k) \times O(n-k)) \mapsto A(\sigma, P_0)$ 是从商空间 $O(n)/O(k) \times O(n-k)$ 到 $G_{k,n}$ 的一个双射. 令该映射为微分同胚, 则 $G_{k,n}$ 成为一个 $k(n-k)$ 维微分流形. 容易验证 $G_{k,n}$ 的流形结构不依赖 $\mathbb{R}^n$ 中基的选取. 注意, $G_{1,n+1}$ 即为 RP^n .

例 1.5 乘积流形 $M \times N$. 设 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ 分别为 M 和 N 上的微分结构. 显然有 $\bigcup_{\alpha, \beta} U_\alpha \times V_\beta = M \times N$. 定义微分同胚 $\phi_\alpha \times \psi_\beta: U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ 如下

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)), \quad \forall (p, q) \in U_\alpha \times V_\beta.$$

易见 $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ 构成 $M \times N$ 的一个微分结构.

乘积流形的一个重要例子是 n 维环面 $T^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$, 即圆周的 n 重笛卡儿积.

设 $f: M \rightarrow N$ 是微分流形间的映射. 对于 $p \in M$, 若存在 p 的坐标邻域 (U, ϕ) 以及 $f(p)$ 的坐标邻域 (V, ψ) , 使得 $f(U) \subset V$, 并且映射 $\hat{f} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ 在 $\phi(p)$ 点可微, 则称 f 在 p 点可微. 若 $f: M \rightarrow N$ 在 M 上点点可微, 则称 f 在 M 上可微. 特别地, 可微映射 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 M 上的可微函数. M 上的一条 (可微) 曲线是指一个可微映射 $\gamma: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$.

§1.2 向量场与张量场

1.2.1 向量丛

设 M 为微分流形, p 为 M 上一点. 考虑一条过 p 的曲线 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$,

$\gamma(0) = p$. 记 $\mathcal{C}(M)$ 为 M 上在 p 点可微的全体函数的集合. 曲线 γ 在 $t = 0$ 处的切向量为映射 $\gamma'(0) : \mathcal{C}(M) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma'(0)f = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad \forall f \in \mathcal{C}(M).$$

流形 M 上 p 点的一个切向量是指某条曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ($\gamma(0) = p$) 在 $t = 0$ 处的切向量. p 点所有切向量构成的集合称为 p 点的切空间, 记为 $T_p M$.

给定 p 的一个坐标邻域 (U, ϕ) , 可在局部坐标 $\{x^i\}$ 下表达函数 f 以及曲线 γ

$$f(q) = f(x^1, \dots, x^n), \quad (x^1, \dots, x^n) = \phi(q) \in \phi(U),$$

$$\phi \circ \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

于是, 将 f 限制于 γ , 有

$$\begin{aligned} \gamma'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_i x'^i(0) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = \left(\sum_i x'^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) f. \end{aligned}$$

这意味着 $\gamma'(0)$ 可以表示为

$$\gamma'(0) = \sum_i x'^i(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (1.2.1)$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ 正是坐标曲线 $x^i \mapsto \phi^{-1}(0, \dots, 0, x^i, 0, \dots, 0)$ 在 p 点的切向量. (1.2.1) 式表明 $T_p M$ 中任意切向量可以由 $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\}$ 线性表出, 即它们构成了 $T_p M$ 的一组基. 给出一个坐标变换 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$, 则 $T_p M$ 中相应的基完全由下式决定

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (1.2.2)$$

从此以后, 我们将采用爱因斯坦求和约定.

作为一个线性空间, $T_p M$ 的对偶空间由 $T_p M$ 上的所有线性泛函构成, 称为 p 点的余切空间, 记为 $T_p^* M$. 显然, $\{dx^i \Big|_p\}$ 是 $T_p^* M$ 的一组基, 称其为 $\{\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\}$ 的对偶基. 类似地, 有

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (1.2.3)$$

集合 $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$ 可以配上一个微分结构, 使之成为 $2n$ 维的微分流形, 称其为 M 的切丛. 事实上, 设 $\{x^i\}$ 是邻域 $U \subset M$ 上的局部坐标, 则任意切向量 $y \in T_p M$ ($p \in U$) 可以表达为 $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 取 $\{x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n\}$ 为 $TU \subset TM$ 中 (p, y) 的坐标, 则可得到 TM 上的一