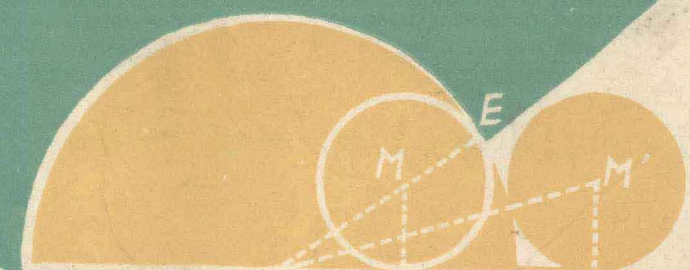
初等数学习题解答

平面几何



盐城师范专科学校数学科

前　　言

这本“习题解答”共选编了平面几何300题，主要供初、高中学生复习平面几何时作为练习用的，也可供中学数学教学参考。同时，它也是本校学生学习“平面几何复习与研究”的补充材料。

本书分习题及解答两大部分，按平面几何的主要内容，把习题分成六个部分，每部分以难度适中的题目为主，也有些难度较大的题目。凡难度较大的题目，都加上了星号，初中生对打星号的题目及第五部分的杂题可以不做。为节约篇幅，前五部分的题目有些只作了简略的证明或提示，第六部分的作图题，多数只写了作法，省略了证明与讨论两部分。

由于水平有限，加之时间仓促，缺点与错误难免，敬请读者批评指正。

盐城师专数学科“初等数学习题解答”编写组

一九七九年八月

目　　录

（一）习　　题

一、直　线　形

1．O为△ABC的∠A平分线上任一点，$AB>AC$，则　$AB-AC>OB-OC$。

2．在四边形ABCD中，AB为最大边，CD为最小边，则　$\angle ADC>\angle ABC$，$\angle BCD>\angle BAD$。

3．O为△ABC形内任一点，则

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<OA+OB+OC<AB+BC+CA.$$

4．延长△ABC边BC的两端，使 $CE=AB$、$BD=AC$ 若$AB>AC$，则　$AD>AE$

5．在△ABC的CA、BA延长线上任取D、E两点，连DE，作∠E、∠C的平分线，使交于F，则

$$\angle F=\frac{1}{2}(\angle B+\angle D).$$

6．在△ABC的BA延长线上取一点E，AC边上取一一点D，连ED，作∠E、∠C的平分线交于F，求证

$$\angle CFE=\frac{1}{2}(\angle B+\angle EDC).$$

7．在四边形ABCD中，$\angle D>\angle B$、OA、OC为∠A、∠C的平分线，则　$\angle AOC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle D-\angle B)$。

8．四边形ABCD的AD、BC交于E，AB、DC交于

F，OE、OF为$\angle E$、$\angle F$的平分线，则

$$\angle EOF=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C).$$

*9．在正方形ABCD的边AB上取一点E，向形外作EF⊥AB，且$EF=\frac{1}{2}AB$，以EF为对角线作正方形EGFH，连DG、CH，并以DG、CH为边向形外作正方形DMNG、CPQH，则N、F、Q在一条直线上．

10．C为线段AB的中点，以AC及BC为对角线任作平行四边形ADCE及BFCG，又作平行四边形CDHF及CEKG，则 H、C、K三点共线．

11．在平行四边形ABCD中，E、F为AD、BC中点，AF、CE交BD于G、H，则G、H三等分BD．

12．从平行四边形ABCD各顶点向形外一直线作垂线AE、BF、CH、DG，则 $AE+CH=BF+DG$．

13．D、E、F为△ABC三边BC、AB、AC的中点，向形外作EG⊥AB、FH⊥AC，且取$EG=\frac{1}{2}AB$，$FH=\frac{1}{2}AC$，则 $DG=DH$．

14．过△ABC的B、C两点作$\angle A$的外角平分线的垂线BE、CF，E、F为垂足，D为BC中点．则

$$DE=DF=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

*15．以四边形ABCD各边为边长向形外作四个正方形，M、N、P、L依次为这些正方形的中心，则 MP⊥NL．

16．△ABC中，$\angle A$为锐角，M为BC中点，则

$AM > \frac{1}{2}BC$。

17. 从△ABC的各顶点及重心G向形外一直线作垂线AA′、BB′、CC′、GG′。则 $3GG' = AA' + BB' + CC'$。

18. 在四边形ABCD内求一点O，使 $OA + OB + OC + OD$ 最小。

二、圆

19. AB、CD为圆O的两平行弦，E为CD中点，过A、E、O三点画一个圆，与圆O交于F，则B、E、F成一直线。

20. BC为半圆的直径，A为半圆上一点，$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC}$，作 $AD \perp BC$，在 $\overset{\frown}{AC}$ 上取一点G，使 $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{AB}$，连BG，交AD、AC于E、F，则 $AE = BE = EF$。

21. △ABC为圆O的内接正三角形，直径DE与AB、AC相交，AP、BQ、CR都垂直DE，P、Q、R为垂足，则 $AP = BQ + CR$。

22. 以△ABC三边为边长，向形外作三个正三角形ABC′、BCA′、CAB′，

则 （1）三个正三角形的外接圆必相交于一点S；

（2）AA′、BB′、CC′相交于一点S；

（3）$AA' = BB' = CC' = AS + BS + CS$。

23. 在圆O上取点C，作 $CD \perp AB$ 弦，则

$\angle ACD = \angle BCO$。

24. 在弦AB的同侧作等圆的两个弓形AC′B、ACB，从B作直线交两弓形于C、C′，则 $AC = AC'$。

25. 在定弦AB的两侧有两个弓形，P、Q为两弓形上任意点，RA、RB分别为$\angle PAQ$、$\angle PBQ$的平分线，则$\angle R$为定值。

26. 在定弦BC上有一定点A，过A任作弦XY，P、M分别为BC、XY的中点，则$\angle AMP$为定值。

27. 在定角BAC的平分线上取定点D，过AD任作一圆交$\angle BAC$的两边于B、C，则$AB+AC$为定值。

28. 从定弧AB上任一点P，作半径OA、OB的垂线PQ、PR，则QR为定长。

*29. ABCD为圆内接四边形，AC、BD交于M，AB、DC交于Q，AD、BC交于R，$\angle Q$、$\angle R$的平分线交于P，MN为$\angle AMD$的平分线，则

(1) $PQ\perp PR$；

(2) $MN\perp PR$；

(3) $\angle BQC+\angle CRD+2\angle BAD=180°$。

30. OA、OB、OC、OD为四条射线，$AB\perp OA$，$BD\perp OB$，A、B、C在一直线上，$\angle AOB=\angle COD$，则$CD\perp OC$。

31. 将$\triangle ABC$绕顶点A旋转至$\triangle AB'C'$，使B'在CA的延长线上，$B'C'$、CB交于P，则AP平分$\angle P$。

32. 以平行四边形ABCD中心O为圆心，AC为直径画圆，交四边于E、F、G、H，则 $EF\parallel GH$。

33. 等圆O与M交于A、B，一圆通过另一圆中心，AC AD分别是这两圆的直径。求证：

(1) $\triangle ACD$为等边三角形。

(2) 过B任作一直线交圆O、圆M于C'、D'，则

$\triangle AC'D'$为等边三角形。

34．圆O与圆M交于A、B，P为圆O上任意一点，连PA、PB交圆M于D、E。则（1）$\overset{\frown}{DE}$为定长。（2）$PO \perp DE$。

35．圆O与圆M交于A、B，O在圆M上，C为圆M上一点，CA、CB交圆O于D、E，则 $AE \parallel DB$。

36．两圆交于A、B，在一圆上取C、E两点，连CA、CB、EA、EB交另一圆于D、G及H、F，则$GH \parallel DF$、$GD = HF$。

37．两圆交于A、B，过A、B任作两射线交两圆于C、D，E、F，则 $CE \parallel DF$。

38．一直线交两圆于A、B；C、D，另一直线交两圆于E、F；G、H，若B、F、G、C四点共圆，则A、E、H、D也共圆。

*39．P为正方形ABCD对角线AC上一点，求证：

（1）四圆ABP、BCP、CDP、DAP为等圆；

（2）若E、F、G、H分别在四等圆上，且A、B、C、D在四边形EFGH的四边上，则EFGH必为圆内接四边形。

（3）EG与FH垂直且相等。

40．延长一圆的弦BC、DE交另一圆于B'、C'，D'、E'，$E'C'$、$B'D'$的延长线交BD延长线于M、N，CE延长线交$E'M$、$B'N$于P、Q，则MNQP必内接于圆。

41．两圆交于A、B，过A作$CD \perp AB$交两圆于C、D，延长DB、CB交两圆于E、F，则AB平分$\angle EAF$。

*42．过弦BC中点A，任作二弦PQ、RS，连PS、RQ交BC于M、N，则 $AM = AN$。

43．两圆O_1、O_2交于A、B，圆O_1的弦BC交圆O_2于E，圆O_2的弦BD交圆O_1于F，证明：

（1）若$\angle DBA = \angle CBA$　则$DF = CE$；

（2）若$DF = CE$　则$\angle DBA = \angle CBA$。

44．在直角三角形ABC的直角边AC上取D点，使以AD为直径的圆与斜边BC相切于E，连DE与AB延长线交于F，则$AB = BF$。

45．ME垂直直径AC于M，E在圆外，ED为圆的切线，连AD交ME于B，则　$BE = DE$。

46．AC为半圆O的直径，$OB \perp AC$，连AB交半圆O于F，连CF交OB于D，切线FE交BD于E，则　$BE = ED$。

47．AC为半圆的直径，$MB \perp AC$于M，连AB交半圆于F，连CF交BM于D、切线FE交BD于E，则　$BE = ED$。

48．AC为半圆直径，B为圆外一点，BA、BC交半圆于G、F，AF、CG交于D，连BD，过G、F作圆的切线交于E，则$BE = ED$。

49．在四分之一圆AOC中，以半径OA为直径向形内画半圆，E为$\overset{\frown}{AC}$上任一点，OE交半圆于B，$DA \perp OA$，$ED \perp DA$，则　$EB = ED$。

50．两等圆交于A、B，过B作直线CD交两圆于C、D，在$\overset{\frown}{AC}$上取$\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{BD}$。则

（1）EB为另一圆的切线；

（2）$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB}$。

51．圆O′过圆O的中心O，在圆O′上取一点A，作圆O的切线AE，交圆O′于B，过B作圆O的切线交圆O′于C，过C作圆O的切线交圆O′于D，连AD，则AD为圆O的切线。

52. 两圆相交于A、B，过A任作直线交两圆于C、D，过C、D作所在圆的切线交于P，则

(1)P、C、B、D四点共圆；

(2)∠CPD为定角。

53. AB为半圆的直径，BE⊥AB，以E为圆心，EB为半径画圆交AE于C、AE交半圆于D，则∠ABC＝∠CBD。

54. 在半圆直径AB的延长线上任取一点P，作半圆切线PC，∠P的平分线交AC于D，则 ∠PDC＝45°。

55. 自圆外一点Q作割线QPA和切线QB，若BP＝PQ则 $\overset{\frown}{PB}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{PBA}$。

56. 在半圆O直径AB延长线上取一点C，作割线CDE，若CD＝OA，则 $\angle ACE=\frac{1}{3}\angle AOE$.

57. 延长半径OB至A，使BA＝OB，P为圆O上任一点，PM是切线，作AM⊥PM，连BM，则

$$\angle AMB=\frac{1}{3}\angle OBM.$$

58. ABCD是圆O的外切四边形，在AB的延长线上取一点E，作圆O的切线EH，交BC、CD、AD于F、G、H

则 $\angle EOF=\frac{1}{2}\angle EBF$， $\angle GOH=\frac{1}{2}\angle GDH$。

59. 在线段AB上取一点C，向AB的同侧作正三角形ACD、BCE，BD、AE交于P，则AD、BE为圆APB的切线。

60. AB、AC是圆O的切线，任作割线AQR，弦BD∥AQR，DC交AR于M，则M平分弦RQ。

61．AB、AC为圆O的切线，在AB延长线上取一点R，作直线RS交圆O于P、Q；BC于M，AC于S，若$MP=MQ$则$PR=QS$。

62．两定圆O′、O交于D、E，O在圆O′上，在圆O′上任意取一点A作圆O的切线AB、AC交圆O′于P、Q，则PQ的方向一定。

63．若$AB\parallel CD$．AD、BC交于E；CA、DB交于F，则 （1）两圆AEB、CED外切；

（2）两圆AFB、CFD内切。

*64．圆O与圆M外切于C，连OM并延长交两圆于A、B，以AB中点D为圆心，任作一圆交圆O、圆M于E、F，G、H，则E、C、G共线；F、C、H共线。

65．两圆外切于C，外公切线为AB、A′B′，则四边形AA′B′B为圆外切四边形。

66．两圆内切于A，大圆的弦BC与小圆切于P，则

$\angle BAP=\angle CAP$

67．两圆外切于A，一直线交两圆于B、C，D、E．则 $\angle BAE+\angle CAD=180°$．

68．以半圆上一点D作直径AB的垂线DC，以AC、BC为直径作两个半圆，交AD、BD于E、F，则EF为这两个半圆的公切线。

69．以圆O的半径OA为直径画圆交半径OB、OC于M、N，$CD\perp OB$于D，则$CD=MN$。

70．圆O与圆M为相离两等圆，作圆M的切线OA，若OA等于直径，则两圆的内公切线PQ等于半径。

71．在圆M上任取一点N，作圆N与圆M交于B、C，在

圆N上取一点P，圆P与BC相切，过B、C作圆P的切线BD、CE，若BD、EC延长线交于F，则F必在圆M上。

*72.圆O、O′交于A、B，圆M过B且交圆O、O′于C、D，过C、A、D三点作圆M′，若CD与AB相交，则

$$\angle OAO' = \angle MCM'.$$

73. △ABC和△A′B′C′是同一圆的内接正三角形，则各边相交成等边六边形。

*74.AB为圆O的直径，圆A与圆O相交于C、D，在圆A上任取一点M，CM、DM交圆O于P、Q、求证：

（1）连BC、BD，则BC、BD都是圆A的切线；

（2）连BP、BQ，则MPBQ是平行四边形；

（3）连BM交圆O于N，则$MN^2 = MC \cdot MD$。

*75. 已知A、B两点及与直线AB平行且等距的两直线l_1、l_2，过A、B作圆O与l_1相交于P，过P作圆O的切线与l_2相交于P′，求证：

（1）PP′是圆P′AB的切线；

（2）A、B到直线PP′距离的积为定值。

76. H、M为△ABC的垂心与外心，MP⊥BC于P，求证：（1）$AH = 2MP$；

（2）$\angle BHC + \angle A = 180°$。

77. H为△ABC的垂心，则△ABH、△BCH、△CAH、△ABC的外接圆半径相等。

78. H为△ABC的垂心，延长中线AM交△BCH的外接圆于A′，则$AM = MA'$。

79. △ABC的外心为M，重心为G、垂心为H，则M、G、H共线，且$GH = 2GM$。

80. 锐角$\triangle ABC$的高AD、BE、CF必平分垂足三角形DEF各角。

81. 垂足三角形DEF以原三角形ABC垂心H为内心，A、B、C为旁心。

82. $\triangle DEF$为$\triangle ABC$的垂足三角形，P为BC中点，$PK \perp EF$，则 (1) $KE = KF$；

(2) $\angle EPF = \angle EDF$。

83. $\triangle ABC$的外接圆半径OA、OB、OC分别垂直垂足$\triangle DEF$的三条边EF、FD、DE。

84. 过$\triangle ABC$的B点，作它的垂足三角形边ED的延长线的垂线BK，则$\angle DBK = \angle ABE$。

85. AD、BE是$\triangle ABC$外接圆O的直径，弦$DF \parallel BC$，EF交BC、AC于G、H，则

(1) $HE = HG = HC$；(2) $OH \parallel DF$。

86. O为$\triangle ABC$的内心，AS为$\angle A$的平分线，

(1) 作$OD \perp BC$，则 $\angle BOS = \angle COD$；

(2) 延长AS交$\triangle ABC$外接圆于E，则$EB = EC = EO$。

87. M为锐角$\triangle ABC$的外心，$\triangle A'B'C'$的边$A'B' \parallel MA$，$B'C' \parallel MB$，$C'A' \parallel MC$，过A'、B'、C'作AC、AB、BC的平行线，则三平行线必交于一点。

三、面　　积

记S_{ABCD}为四边形ABCD的面积。

88. ABCD为平行四边形，P为$\triangle ABD$内一点，则

$$S_{\triangle PBC} - S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PBD}.$$

89. $\triangle ABC$与$\triangle DBC$的面积相等，BC的平行线交AB、AC、DB、DC于E、G、F、H，则 $EG=FH$。

90. BD、CE平分直角三角形ABC的锐角B、C，BD、CE交于F，则 $S_{BFC}=\frac{1}{2}S_{BEDC}$

91. ABCD为平行四边形，E为BC中点，DE、AB延长线交于F，则 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle FCE}$。

92. 在$\triangle ABC$的两边AB、AC上，取$AD=\frac{1}{3}AB$，$AE=\frac{1}{3}AC$，CD、BE交于F，则

(1) $S_{ADEF}=S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CEF}$；

(2) $S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$。

93. 平行四边形ABCD的BC、CD、DA、AB边中点为P、Q、R、S，AP、BQ、CR、DS交成四边形EFGH。则：(1)EFGH为平行四边形；

(2) $S_{\square EFGH}=\frac{1}{5}S_{\square ABCD}$

94. 在$\triangle ABC$中，过C作$\angle A$的平分线的垂线CD，过B作$\angle A$的外角平分线的垂线BE，CD延长线交AB、BE于H、F，则 $S_{\square ADFE}=S_{\triangle ABC}$。

95. $\triangle ABC$和$\triangle A'BC$为同侧同底两三角形，AB、AC，A′B、A′C的中点分别是R、Q、R′、Q′，$S_{\triangle A'BC}>S_{ABC}$，则$S_{\square RQQ'R'}=\frac{1}{2}(S_{A'BC}-S_{ABC})$

96. 在$\triangle ABC$的AB、AC边及其延长线上取$AD=BF$，$AE=CG$，BG、CF交于H，则$S_{\triangle HFG}=S_{\triangle HBC}+S_{\triangle ADE}$。

*97. 正五边形ABCDE各边中点为a、b、c、d、e，CB、EA及BA、DE的延长线分别交于M、N，则

$$S_{\triangle AMN}-S_{\triangle Aae}=S_{五边形abcde}.$$

98. 在平行四边形ABCD的对角线CA延长线上取一点F，作平行四边形BCFE，连DF延长交BE延长线于K，则

$$S_{\triangle KEF}=S_{\triangle FAB}.$$

99. 在平行四边形ABCD的BC、DA延长线上取CF = AE，过F作CA的平行线交BA的延长线于G，则

$$S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AGD}.$$

100. 延长△ABC的三边AB、BC、CA至D、E、F使AB = BD，BC = CE，CA = AF，则 $S_{\triangle DEF}=7S_{\triangle ABC}$.

101. 在△ABC的两边AB、AC上，任作平行四边形ABDE、ACFG，DE、FG的延长线交于Z，又在BC上作平行四边形BCYX，且使BX $\perp\!\!\!=$ AZ，则

$$S_{\square BCYX}=S_{\square ABDE}+S_{\square ACFG}.$$

102. 以正方形ABCD的各边向形内作正三角形ABE、BCF、CDG、DAH，这四个正三角形的顶点E、F、G、H及其边的交点组成八角星形EPFQGRHS，求证：

$$12S_{\triangle ABE}=5S_{\square ABCD}+S_{八角星形EPFQGRHS}.$$

103. 四边形ABCD的对角线AC、BD中点为M、N，交点为G，则 $4S_{\triangle MNG}=|S_{\triangle ADG}+S_{\triangle BCG}-(S_{\triangle ABG}+S_{\triangle CDG})|$.

*104. 四边形ABCD对角线AC、BD的中点为M、N，边AD、BC延长线交于O，则

$$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

105. 四边形ABCD对角线AC、BD的中点为M、N，边

BC、AD延长线相交于O，BA、CD延长线相交于O′，OO′的中点为T，则M、N、T三点在一直线上。

*106. 外切于圆O的四边形ABCD对角线中点为M、N，则M、O、N在一条直线上。

107. 在Rt△ABC的三边上，向形外作正方形BCDE、ABFG、ACHK，则（1）$S_{BEF}=S_{AGK}=S_{CDH}=S_{ABC}$。（2）AE⊥CF。

108. 在等腰△ABC中，BC为底边，CD⊥AB，DP⊥BC，则 $AB^2=AP^2+DP^2$。

109. 四边形ABCD对角线BD、AC中点为E、F，求证

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2.$$

110. 四边形ABCD对角线AC、BD交于O，AC、BD中点为E、F，EF中点为M，则 $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+4MO^2$。

111. D为△ABC的边BC上一点，M为AD中点，若 $AB^2+BD^2=CA^2+CD^2$，则 MB=MC。

112. △ABC的三中线AP、BQ、CR交于G，则

（1）$PA^2+QB^2+RC^2=\frac{3}{4}(AB^2+BC^2+CA^2)$

（2）$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$。

113. △ABC的重心为G，M为任意一点，则

$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$。

114. P为正方形ABCD外接圆O上任意一点，则

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=8R^2.$$

115. 在半圆O直径AB上取X、Y两点，使XO=YO，P

为圆周上任意一点，则

$$PX^2+PY^2=AX^2+AY^2=BX^2+BY^2.$$

116. AB为半圆O直径，AC、BD、CD为三切线，则

$$S_{ABDC}=\frac{1}{2}AB\times CD.$$

117. 直线l与圆O相离，$OA\perp l$于A，在l上取一点P，PC、AB为圆O切线，则 $PC^2=PA^2+AB^2$.

118. AB、CD为圆O的互相垂直的二直径，E为$\overset{\frown}{AD}$上一点，则：$S_{ACBE}=\frac{1}{2}CE^2$.

119. 三圆相交，则三公共弦AB、CD、EF若不平行，则必交于一点。

120. 两圆相交于D、E，在DE延长线上取一点P，作一圆切线PA，另一圆割线PBC，则PA是圆ABC的切线。

121. P、Q为半圆O的直径AB和半圆周上的点，QT为切线，$PT\perp QT$，则 $PT\cdot AB=AP\cdot BP+PQ^2$.

122. 已知圆O及圆外一直线CD，作$OC\perp CD$，A为圆O上一点，AC、AD交圆O于E、F，则

$$DF\cdot DA=CE\cdot CA+CD^2.$$

*123. △ABC的∠A平分线为AS、高为AD，BC边上中点为M，求证：$MS\cdot MD=\frac{1}{4}(AB-AC)^2$

*124. 设在△ABC中，AB＞AC，AT平分∠A且交BC于T，在BC上有一点S，使$BS=TC$，求证：$AS^2-AT^2=(AB-AC)^2$.

125. AS为△ABC的外角平分线，AD为高，M为BC中