

立体几何

## 編輯大意

一本書備中學校幾何學教科之用。

一按中學校課程標準。幾何學之教科。始於第二學年。至第四學年而畢。每年與代數三角。同時並授。是三年內幾何學所佔之時間。適得數學全科之半。本書之分量。即依此標準以定之。俾得於規定年限以內。從容畢業。

一本書共分六篇。第四篇以前。屬於平面。第五篇以後。屬於立體。即依此分別。訂成兩冊。然平面與立體。仍必循序而進。故書中篇數節數。皆蟬聯一貫。並不各冊獨立。

一幾何學理。必經推勘。始能深入顯出。本書於推勘處。措詞達意。務取明爽。俾易領解。

一幾何學雖係獨具真理。無藉他種科學援引證明。然推勘時關於緊要及終結處。以代數式顯之。反較專用文詞傳達者。更為明朗。日本長澤氏所撰幾何。輒以算術代數兩科。相為印證。以示會通。本書亦間以代數式相錯為用。蓋即循其先例也。

一本書於每節綱要。及證明處有應特別注意者。均加黑線為誌。以便學者隨時注重。

一本書於名詞之下。各注明英字原名。蓋幾何名詞。初未畫一。以英字為指歸。庶可免紛歧之誤。

一本書期學者之易悟。處處力求簡明。倘有未妥。仍希海內宏達。不吝指教為幸。

## 中學校教科書

### 立體幾何目次

|     |               |       |
|-----|---------------|-------|
| 第五篇 | 空間之平面及直線..... | 1-45  |
| 第一章 | 平行之平面及直線..... | 1-12  |
| 第二章 | 垂線.....       | 12-25 |
| 第三章 | 二面角及立體角.....  | 25-29 |
| 第四章 | 多面體.....      | 30-37 |
| 第五章 | 多面體之體積.....   | 38-45 |
| 第六篇 | 球,圓柱,圓錐.....  | 46-65 |
| 第一章 | 球.....        | 46-59 |
| 第二章 | 圓柱圓錐.....     | 60-65 |

# 中學校教科書

## 五體幾何

### 第五篇 空間之平面及直線

#### 第一章 平行之平面及直線

294. 定義 凡平面。Plane 任於其上取兩點。聯成直線。此直線必全在於其面上。(此定義既詳於緒論。在本篇尤爲緊要。故重揭之。)

故若一直線上有兩點在一平面上。則其直線必全在於其平面上。

直線全在平面上。則此直線爲此平面所含云。

平面之廣無制限。(本書以平行四邊形示其位置。)

295. 公理 於平面上定一直線爲軸。而令平面旋轉。則此平面必從其旋轉所周。得凡經過一切之點。

296. 定理 凡有合於下列諸要件之一者。必能成一平面。惟祇以一平面爲限。

(a) 含有一直線及不在此直線上之一點。

(b) 含有三點。而此三點不同在一直線上。

(c) 含相交兩直線。

(d) 含平行兩直線。

(a)  $AB$  爲一直線。 $C$  爲不在此直線上之一點。此  $AB$  及  $C$  必可成一平面。惟祇以一平面爲限。



試將含有  $AB$  之平面。以  $AB$  爲軸旋轉之。必過  $C$  點。(295) 而其旋轉中適與  $C$  點相值時之平面。即爲  $AB$  及  $C$  所成之平面。然  $AB$  及  $C$  祇能成此一平面爲限。如謂此平面外。尚有彼平面亦能含有  $AB$  及  $C$ 。則試於彼平面  $AB$  上任取  $A$  點。聯成  $CA$  直線。此  $CA$  直線。雖在彼平面上。(294) 然依同理。此平面上亦必含有  $CA$  直線。(294) 一直線不能分貼於兩平面。故知所謂彼平面者。實與此平面合而爲一者也。

故含有  $AB$  及  $C$  之平面。祇以一平面爲限。

(b)  $A, B, C$  三點。非同在一直線上。含此  $A, B, C$  三點。必成一平面。惟祇以一平面爲限。

試以  $A, B$  聯成直線。

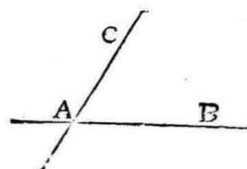
則含有  $A, B$  兩點之平面。即含有  $AB$  直線之平面。

故此理解與 (a) 同。

(c)  $AB, AC$  爲交於  $A$  點之兩直線。含此  $AB, AC$  必成一平面。惟祇以一平面爲限。

任於  $AC$  上取  $C$  點。

含此  $AB$  及  $C$  之平面。即含  $AC$  直線上之  $A, C$  兩點。故含  $AB$  及  $C$  之平面。必兼含  $AC$  直線。



故此理解仍與(a)同。

(d)  $AB, CD$  爲平行兩直線。含此  $AB, CD$  必成一平面。惟祇以一平面爲限。

依第34節。 $AB, CD$  既爲平行。必同在一平面上。而以  $AB$  上任取之點。與  $CD$  合成平面。又祇以一平面爲限。[296 a]

故含  $AB, CD$  之平面。以一平面爲限。

綜此定理。覆述如次。

(a) 含有一直線及不在此直線之一點。(b) 含有三點。而此三點非同在一直線上。(c) 含相交兩直線。(d) 含平行兩直線。凡由是所成之平面。以一平面爲限。

[附誌] 兩直線相對之位置。(i) 相交於同一之平面上。(ii) 平行。(此雖不相交。然亦必在同一之平面上。)(iii) 不在同一之平面上。而不相交。亦不平行。

故證明兩直線之平行。僅證明其爲不相交。於義實爲未足。必兼以其在同一之平面上證明斯可矣。

297. 定義 兩平面相平行。任取所向延長之。必無相遇之時。

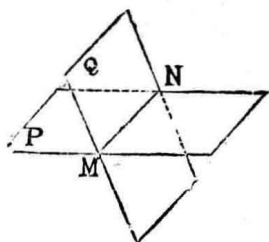
298. 定義 直線與平面相平行。任取所向延長之。必無相遇之時。

[附誌] 一平面與一直線相對之位置。(i) 直線全在平面上。(ii) 直線與平面相交於一點。(iii) 直線與平面平行。

299. 定理 兩平面相交處必爲一直線。

如圖。 $P, Q$  兩平面。其相交處必  
為一直線。

因既為相交。則其相交處。不能  
指為一平面之所獨有。又兩直線  
之相交。僅止一點。亦概可知。



則試以  $N, M$  為其相交處之兩點。

是  $N, M$  兩點。在  $P$  平面上。亦在  $Q$  平面上。

由  $N, M$  兩點聯成  $NM$  直線。

是  $NM$  直線。在  $P$  平面上。亦在  $Q$  平面上。〔294〕

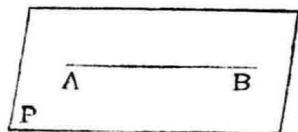
即  $NM$  直線。為  $P, Q$  兩平面之所公有。而為其相交處也。

如謂  $NM$  直線以外。尚有公共之點如  $O$ 。則含有  $NM$  及  $O$ 。  
祇能成一平面為限。〔296 a〕即能成  $P$  平面者。不復能成  $Q$   
平面也。故  $O$  點並非公共之點。如是則  $NM$  直線以外。不能再  
有公共之點。

故  $P, Q$  兩平面相交。為  $NM$  一直線。

**300. 定理** 若此直線與彼直線平行。則含此不含彼之  
平面。亦必與彼直線平行。

如圖。 $AB, CD$  為平行兩直線。若  
 $P$  為含  $AB$  不含  $CD$  之一平面。則  
 $P$  必與  $CD$  平行。



因  $AB, CD$  既係平行。必同在一  
平面上。而  $AB$  在此平面。又在  $P$  平面上。即  $AB$  為兩平面之

交也。

$CD$ 上各點除與 $AB$ 相交之交點外。其餘均為 $AB$ 直線以外之點。故不與 $P$ 平面相屬。〔299〕

而 $CD$ 與 $AB$ 。原係平行。並無交點。

故 $CD$ 與 $P$ 平面。遂無相交之時。

即 $P$ 平面與 $CD$ 直線相平行。

此定理亦得述之如下。

**301. 系** 一直線與不含此直線之平面上所有之直線相平行者。亦必與其平面平行。

**302. 系** 兩直線平行。則各含其一之兩平面相交之一直線。必與平行之兩直線。皆為平行。

如圖。 $AB, CD$ 為平行兩直線。而一含 $AB$ 一含 $CD$ 之兩平面。相交於 $LM$ 直線。

如是則 $AM$ 平面。平行於 $CD$ 。

故 $CD$ 不與 $AM$ 平面相交。

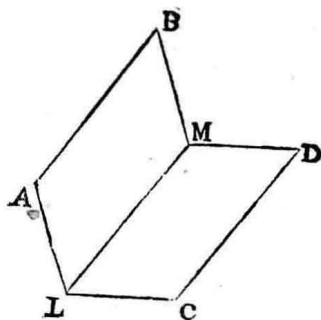
即不與 $LM$ 直線相交。

又 $CD$ 與 $LM$ 同在一平面上。

(必兼證及此。方為完足。)

故 $CD$ 與 $LM$ 平行。

依同理。 $AB$ 與 $LM$ 亦為平行。

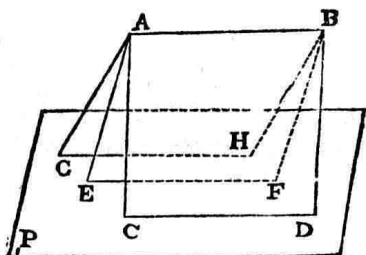


**303. 定理** 某直線平行於某平面。則某平面與含某直線之平面相交處所顯之直線。必與某直線平行。又凡相交



處所顯之直線必互相平行。

如圖。 $AB$  爲平行於  $P$  平面之直線。若含有  $AB$  之平面如  $AD, AF, AH, \dots$  與  $P$  平面相交於  $CD, EF, GH, \dots$  各直線。如是則  $CD, EF, GH,$



$\dots$  各直線必平行於  $AB$ 。又必互相平行。

此因  $AB$  不與  $P$  平面相交。即不能與  $CD$  相交。

而  $AB$  與  $CD$  同在一平面上。

故  $AB$  與  $CD$  平行。

依同理。 $EF, GH, \dots$  各直線各與  $AB$  平行。

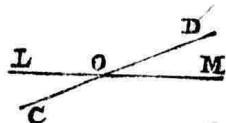
又若  $CD, EF$  非互相平行。則由其一交點能與  $AB$  平行成兩直線矣。是與第三十五節不合。

故  $CD$  必與  $EF$  平行。

又  $EF, GH, \dots$  各直線之互相平行。類推可也。

**304. 系** 兩平面與平行於其交線之平面相交。成兩直線。必與兩平面之交線平行。

**305 系** 彼此不相交不平行之兩直線。使含此而與彼平行。成一平面。此祇能成一平面爲限。



如圖。 $AB, CD$  爲不相交又不平行之兩直線。任於  $CD$  上取  $O$  點。由其含  $AB$

及  $O$  之平面上。準與  $AB$  平行。過  $O$  點作  $LM$  直線。則含  $CD$  及  $LM$  之平面。即係含  $CD$  而平行於  $AB$ 。(300)

又含  $AB$  及  $CD$  上一點之平面。與平行於  $AB$  之平面。其相交之一直線。必即為平行於  $AB$  之直線。(303)

故此平面之外。不能再有含  $CD$  而平行於  $AB$  之平面。

**306. 系** 由一定點。準與不相平行之兩直線平行。作一平面。此祇能作一平面為限。

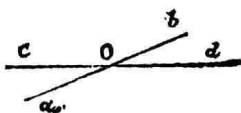
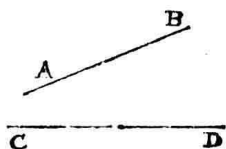
如圖。 $AB, CD$  為不相平行之兩直線。 $O$  為定點。

於其含  $AB$  及  $O$  之平面上。由  $O$  點準與  $AB$  平行。作  $ab$  直線。

又於其含  $CD$  及  $O$  之平面上。由  $O$  點準與  $CD$  平行。作  $cd$  直線。

如是則含  $ab$  及  $cd$  之平面。必與  $AB, CD$  兩直線平行。(300)

此外更無能由  $O$  點作平行於  $AB, CD$  之平面。

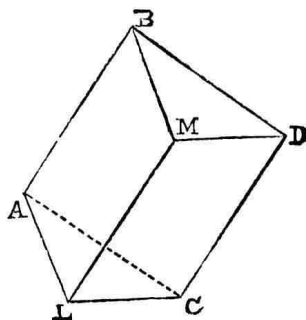


**307. 定理** 各平行於一直線之直線。必互相平行。

其在一平面上者。已於第四十一節證明。茲所論蓋不在一平面上者也。

如圖。 $AB, CD$  兩直線。各與  $LM$  平行。則  $AB, CD$  必互相平行。

此因以  $CD$  上一點與  $AB$  直



線合成平面。與含  $CD$  及  $LM$  之平面。其相交之一直線。必平行於  $LM$ 。〔302〕

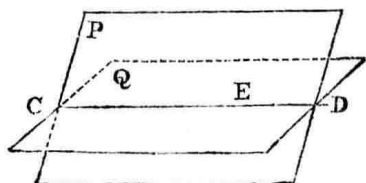
故其相交之一直線。即係  $CD$ 。又此交線。必更與  $AB$  相平行。〔302〕

故  $CD$  平行於  $AB$ 。

**308. 定理** 兩平面平行於一直線。則其交線。亦必與之平行。

如圖。 $P, Q$  兩平面。各與  $AB$  直線平行。則其交線  $CD$ 。亦必與  $AB$  平行。

$A$  —————  $B$



試任於  $CD$  上取  $E$  點。其含  $AB$  及  $E$  之平面。與

$P$  平面相交之一直線。必平行於  $AB$ 。〔303〕

又其與  $Q$  平面相交之一直線。亦必平行於  $AB$ 。〔303〕

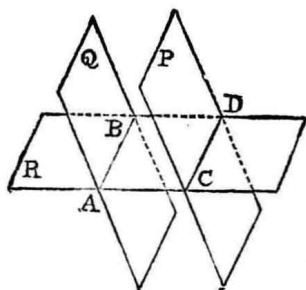
然由  $E$  點作平行於  $AB$  之直線。祇能以一直線為限。

故  $P, Q$  兩平面。與含  $AB$  及  $E$  之平面。祇同交於一直線。

故此直線。即係  $P, Q$  之交線  $CD$ 。

即  $CD$  平行於  $AB$ 。

**309. 定理** 以一平面與平行之兩平面相交。所成兩交線。必互相平行。



如圖。 $P, Q$  為平行兩平面。與  $R$

平面相交於 $AB, CD$ 兩直線。此 $AB, CD$ 兩直線。必互相平行。

因 $P, Q$ 兩平面。既平行不相交。故 $AB, CD$ 兩直線。決不相交而又同在一平面上。

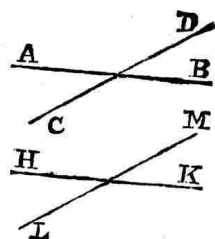
故 $BA, CD$ 互相平行。

**310. 定理** 此相交兩直線。若與彼相交兩直線。兩兩平行。則由此兩直線所成平面。與由彼兩直線所成平面。亦必互相平行。

如圖。 $AB, CD$ 相交兩直線。與 $HK, LM$ 相交兩直線。兩兩平行。即 $AB$ 平行於 $HK$ 。 $CD$ 平行於 $LM$ 。如是。則含 $AB, CD$ 之平面必與含 $HK, LM$ 之平面。互相平行。

此因含 $AB$ 之平面。與含 $HK$ 之平面相交。其交線必平行於 $AB$ 及 $HK$ 。(302)

依同理。含 $CD$ 之平面。與含 $LM$ 之平面相交。其交線必平行於 $CD$ 及 $LM$ 。(302)



故含 $AB, CD$ 之平面。與含 $HK, LM$ 之平面相交。其交線不得不與 $AB, CD$ 及 $HK, LM$ 相平行。

然兩平面相交祇一直線。不能與相交兩直線平行。

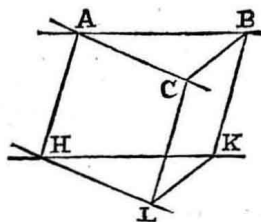
故含 $AB, CD$ 之平面。不能與含 $HK, LM$ 之平面相交。

即兩平面互相平行。

**311. 定理** 此相交兩直線。若與彼相交兩直線。兩兩平行。則由此兩直線所成之夾角。與由彼兩直線所成之夾角必相等。

如圖。 $AB, AC$  爲交於  $A$  點之兩直線。所夾之角爲  $\angle BAC$  又  $HK, HL$  爲交於  $H$  點之兩直線。所夾之角爲  $\angle KHL$ 。若  $AB$  平行於  $HK$ 。 $AC$  平行於  $HL$ 。則  $\angle BAC$  必等於  $\angle KHL$ 。

試以  $\angle BAC$  與  $\angle KHL$  兩角同向。  
其  $B, K$  兩點。在  $AB, HK$  兩平行線之平面上  $AH$  之同側。 $C, L$  兩點。在  $AC, HL$  兩平行線之平面上  $AH$  之同側。



聯結  $AH$ 。於其含  $AB, HK$  之平面上作  $BK$ 。平行於  $AH$ 。

則  $ABKH$  爲平行四邊形。

故  $AB$  等於  $HK$ 。 $AH$  等於  $BK$ 。

依同理。於其含  $AC, HL$  之平面上作  $CL$ 。平行於  $AH$ 。則  $AC$  等於  $HL$ 。 $AH$  等於  $CL$ 。

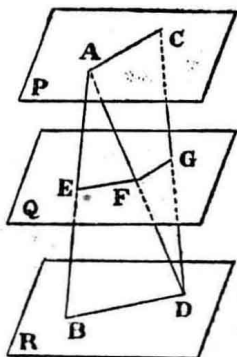
聯結  $BC, KL$  兩直線。

$BK, CL$  既各等於  $AH$ 。且與  $AH$  平行。故互等且互相平行。  
即  $CB$  等於  $KL$ 。

故  $\triangle ABC$  與  $\triangle HKL$  兩三角形全相等。[76]

**312. 定理** 兩直線若與平行之各面相交。則由其交點截分之各段。其比必相等。

如圖。 $AB, CD$  兩直線。若與  $P, Q, R$  平行三平面相交於  $A, E, B$  及  $C, G, D$  各點。如是則  $AE : EB :: CG : GD$ 。



試聯結  $AD$  與  $Q$  平面相交於  $F$  點。又聯結  $EF, FG$  兩直線。  
則  $EF$  平行於  $BD$ 。  $FG$  平行於  $AC$ 。(309)

故  $AE : EB :: AF : FD$ 。(249)

又  $CG : GD :: AF : FD$ 。(249)

故  $AE : EB :: CG : GD$ 。(245 a)

## 第一章之問題

\* 225. 兩兩相交於三點之三直線。必同在一平面上。

\* 226. 任於平行兩直線上取一點。聯成直線。此直線必在含平行兩直線之平面上。

\* 227. 以一直線與平行三直線相交。則共凡四直線。必同在一平面上。

228. 彼此兩直線平行。則與此相交之各平面。必兼與彼相交。

229. 一直線平行於一平面。則由平面上一點。引一平行於直線之直線。必在此平面上。

230. 與一平面相交之直線。必兼與平行於平面之各平面相交。

231. 平行兩直線。截分於平行兩平面間之兩段必相等。

232. 相交兩直線。平行於某平面。則含此相交兩直線之平面。亦必與某平面平行。

\* 233. 不同在一平面上之兩直線。各由其一準與某平

面平行。各作一平面。則所作兩平面。必互相平行。

234 不同在一平面上之四直線。令作四邊形。則聯結各邊之中點。必成一平行四邊形。

凡似此四邊形之邊不同在一平面上之多角形。稱爲哥休多角形 *Gauche polygon*。

235. 準所設之一點。作一直線。令與所設兩直線相交。求所作直線之位置。

236. 由所設之點。作直線。令與所設之平面相平行。則所作直線之軌跡。必成平面。而與所設之平面相平行。

此所謂軌迹。雖較平面幾何學所述軌迹之意義爲廣。然固無須別爲說明焉。

## 第二章 垂線

313. 定義 一直線交於一平面。若此直線與由平面上交點所引一切直線皆成正交。則此直線稱爲平面之垂線。又此直線與平面互成正交。

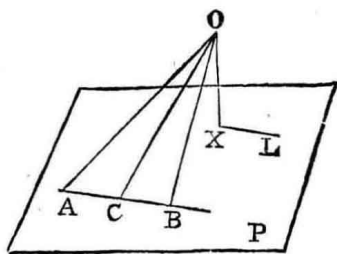
314. 定義 一直線交於一平面不成正交者。稱此直線爲平面之斜線。

315. 定義 兩不相交之兩直線所成之角。即與兩直線相平行之兩直線。於一平面上。相交所成之角也。

316. 定理 由平面外設一點。其距平面上各點之中。必有最近之一點。惟祇能得一點爲限。而由平面外所設之點。

與其距平面上最近之點。聯成直線。即爲平面之垂線。

如圖。 $O$  爲  $P$  平面外所設之點。由  $O$  距  $P$  平面上各點。必有最近之一點。惟祇能得一點爲限。



因  $O$  在  $P$  平面外。故自  $O$  至  $P$  平面上之距離。不能至於無限小。而惟以最近爲斷。如  $P$  平面上。 $A, B$  兩點。距  $O$  相等。則由  $AB$  直線上。 $A$  與  $B$  之間如  $C$  點。其距  $O$  必比  $A, B$  兩點爲近。(70)

故距  $O$  最近之點。惟限於一。

設以  $X$  爲距  $O$  最近之點。

則  $OX$  即  $P$  平面之垂線。

試於  $P$  平面上  $X$  點。任引  $XL$  直線。因  $OX$  爲自  $O$  距  $XL$  最短之直線。

故即爲  $XL$  之垂線。(70)

依同理。 $OX$  爲由  $P$  平面上  $X$  點所引各直線之垂線。(必兼證及此。方爲完足。)

即爲  $P$  平面之垂線。

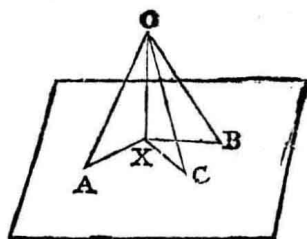
**317. 系** 由平面外所設之點。得引一平面之垂線。惟祇能引一垂線爲限。

**318. 系** 由平面外所設之點。向平面引垂線。及各斜線。若各斜線俱相等。則各斜線交平面之點。距垂線交平面之



點。必皆等。

如圖。 $OA, OB, OC$  各斜線相等。  
依第七十七節。 $XA, XB, XC$  皆相等。



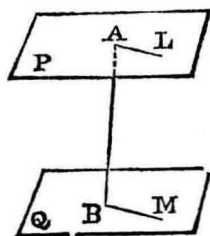
319. 系 上節之逆證。亦必真確。

320. 定義 凡由平面外之點距平面。稱為距離云者。係專指其最短之距離言也。

321. 定理 一直線與一平面成正交。必兼與其平行各平面成正交。

如圖。 $P, Q$  為平行兩平面。若  $AB$  直線與  $P$  平面正交於  $A$ 。則其與  $Q$  平面交於  $B$ 。亦必係成正交。

試於  $Q$  平面上  $B$  點。任引  $BM$  直線。則含  $AB, BM$  之平面。與  $P$  平面交於  $AL$  直線。此  $AL$  直線。必與  $BM$  平行。(309)



而  $\angle LAB$  既為直角。

故  $\angle ABM$  亦為直角。

依同理。 $AB$  為在  $Q$  平面上由  $B$  點所引各直線之垂線。(必兼證及此。方為完足。)

即  $AB$  為  $Q$  平面之垂線。

322. 定義 平行兩平面之距離云者。即係公共垂線截分於平行兩平面間之一段是也。