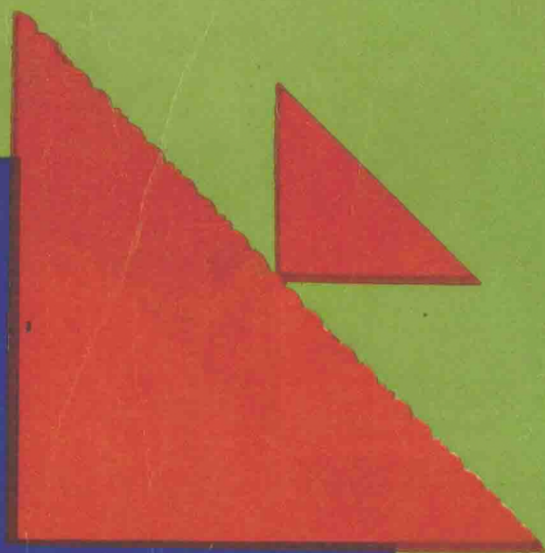


北京四中高中数学讲义

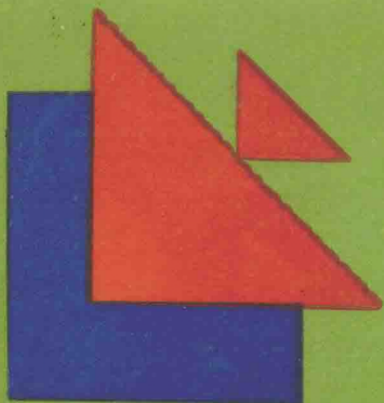
立体几何

北京四中教学处 编

教育科学出版社



LITIJIE



ISBN 7-5041-1513-4



9 787504 115133 >

☐ 责任编辑:刘 进

☐ 封面设计:王四海

ISBN 7-5041-1513-4/G ·

定价:5.80 元



北京四中高中数学讲义

立体几何

北京四中教学处

教育科学出版社

(京)新登字第111号

北京四中高中数学讲义

立体几何

北京四中教学处

责任编辑：刘进

教育科学出版社出版、发行

(北京·北太平庄·北三环中路46号)

各地新华书店经销

北京顺义燕华印刷厂印装

开本：787毫米×1092毫米 1/32 印张：9.5 字数：205千

1995年5月第1版 1995年5月第1次印刷

印数：00,001—11,000册

ISBN 7-5041-1513-4/G·1490

定价：5.80元

编写组成员

领导小组：田佣(副校长)、赵康(教学处主任)

主 编：刘 坤

成 员：刘 坤 常相舜 王汉华

傅以伟 田 佣 赵 康

凌文伟

出版说明

当前，中学教学改革已经深入到课程设计和教材改革领域。我校数学教材的改革，以发展学生的数学思维为目标，以不改变现行教学大纲规定的教学内容为前提，试图通过对知识结构及其展开方式的统盘考虑，实现整体优化。经多年反复探索、实验，编成了这套尝试融教材与教法、学法于一体的《北京四中高中数学讲义》。

这套讲义的产生可以上溯到1982年。从那时起，为了发展学生智能，提高数学素养，我校部分同志就开始对高中数学教学进行以教材改革为龙头，以学法教育为重点的“整体优化实验研究”。正是在这项研究的基础上，逐步形成了这套讲义编写的特色和风格。这就是：

1. 为形成学生良好的认知结构，讲义的知识结构力求脉络分明，使学生能从整体上理解教材。

2. 为了提高学生的数学素养，本讲义把数学思想的阐述放到了重要位置。数学思想既包含对数学知识点（概念、定理、公式、法则和方法）的本质认识，也包含对问题解决的数学基本观点。它是数学中的精华，对形成和发展学生的数学能力具有特别重要的意义。为此，讲义注重展现思维过程（概念、法则被概括的过程，数学关系被抽象的过程，解题思路探索形成的过程），在过程中认识知识点的本质，在过程中总

结思维规律，在过程中揭示数学思想的指导作用。力图使学生能深刻领悟教材。

3. “再创造，再发现”在数学学习中对培养创造思维能力至关重要。为引导学生积极参与“发现”，讲义在设计上做了某些尝试。

4. 例习题的选配，力求典型、适量、成龙配套。习题分为A组（基本题）、B组（提高题）、和C组（研究题）。教师可根据学生不同的学习水平适当选用。

5. 教材是学生学习的依据。应有利于培养自学能力。本书注重启迪学法，并在书末附有全部习题的答案或提示，以供学习时参考。

这套讲义在研究、试教和成书的过程中，始终得到了北京市和西城区教育部门有关领导的关怀和帮助，得到了北京师范大学数学系钟善基教授、曹才翰教授的热情指导，清华附中的瞿宁远老师也积极参与了我们的实验研究，并对这套教材做出了贡献，在此一并致以诚挚的谢意。

在编写过程中，北京四中数学组的教师们积极参加研讨，对他们的热情支持表示感谢。

这套讲义包括六册：高中代数第一、二、三册，三角、立体几何、解析几何各一册。

编写适应素质教育的教材，对我们来说是个尝试。由于水平所限，书中不当之处在所难免，诚恳希望专家、同行和同学们提出宝贵意见。

北京四中教学处

1994年11月

绪 论

一 立体几何研究的对象

几何学是研究几何图形的性质及其应用的一门学科。

在初中我们学过平面几何。在那里研究的是平面图形（即所有的点都在同一平面内的图形）的性质（即形状、大小和位置关系）和应用。可是在实际问题中，大量的几何图形并不是平面图形，如房屋、机器、堤坝、桌椅、橡皮等等，它们都可看成几何体。它们是空间图形。

空间图形由空间的点，线，面构成，也可以看做是空间点的集合。平面图形是空间图形的一部分。有些空间图形就是由平面图形围成的。例如六个正方形围成了一个正方体。有些空间图形不是由平面图形围成，例如球。

立体几何研究的对象就是空间图形。

二 立体几何课的内容

空间图形是千姿百态的，从哪儿入手研究它们呢？我们不能今天研究桌子，明天研究凳子，…那样不是科学的研究方法。

我们要首先研究构成空间图形的基本元素：点，线，面。主要是点，直线和平面。弄清了它们的性质及其相互关

系，我们就可驾驭简单的图形，进而可以研究较为复杂的图形。

点，直线和平面之间的位置关系可分为六种：（1）点与点；（2）点与直线；（3）点与平面；（4）直线与直线；（5）直线与平面；（6）平面与平面。

研究上述这六种关系，就构成了立体几何最基本的内容，即本书第一章的内容。在这个基础上再研究一些简单体的几何性质，就是本书第二章的内容。在本书第三章，研究一类特殊的几何体——正多面体。

三 立体几何的研究方法

研究立体几何的方法与研究平面几何的方法类似，不是依靠观察和试验，而是依据公理，运用逻辑推理方法，即：

（1）先给出一些最初的、不予定义的基本概念；（2）再逐步建立一些能较直观地反映这些基本概念性质的公理；（3）然后用这些基本概念去定义新的概念；（4）再根据基本概念、公理以及定义的新概念去证明定理，并在此基础上再证明新的定理。

需要指出的是，作为中学数学课程的平面几何与立体几何，限于读者的认识水平和接受能力，不可能也没有必要完全依照严格的公理体系处理。为了便于接受，保证读者能集中精力学好主要内容，我们省略了某些定理的繁复的证明，有些定理直接以公理的形式出现，中学的几何体系只是粗略的公理体系。因为平面图形是空间图形的一部分，是在同一平面内的特殊的空间图形。所以平面几何的基本概念和公理体系，也就自然地包含在更一般的立体几何的基本概念和公理

体系之中。平面几何的所有定理在立体几何中解决平面问题时都可以直接应用。

四 学习立体几何需要注意的几个问题

由研究平面图形到研究空间图形，开始阶段有些同学会感到困难。主要是画图、识图这两个环节。画图是要把空间的立体图形画在一个平面（如纸面或黑板）上；识图就是要根据画在平面上的“立体”图形想象出原来空间图形的真实形状。再就是研究空间图形，由于对象更加复杂，对抽象思维能力和逻辑思维能力的要求更高了。知道了这些特点，我们就可以采取相应的方法，顺利地进入立体几何这个新的领域，“入了门”就会感到越学越有兴趣了。

1. 为了培养自己的空间想象力，为了能“画图”就要结合对空间图形的观察，想象这些空间图形画在纸上应是什么模样；同时要掌握画直观图的规则，掌握实线、虚线的使用规则。从画简单的图形（如直线和平面的各种位置关系）、简单的几何体（如正方体）画起。对照实物或模型观察各种线线、线面、面面关系，然后过渡到根据直观图来想象这些线线、线面、面面关系（这就是识图的过程），最后在没有模型摆在面前，甚至不看直观图，头脑中都能清晰地想象出用语言文字描述的图形。这就是提高空间想象力的过程，也是提高抽象思维能力的过程。

2. 要重视看起来简单的那些基本概念、公理和定理，不仅要理解它们，还要熟练地记忆它们。要能用图形、符号、语言三种形式来准确地表达它们。对条件和结论要一清二楚，对定理要会证明，并在应用中进一步领会和加深理解。

3. 要注意与平面几何的联系和区别. 立体几何与平面几何是同一个公理体系, 所用的方法都是逻辑推理的方法, 所不同的从表面上看可以说是“部分”和“整体”的问题. 在平面几何中的正确命题在立体几何中有的就不正确了, 有的虽然仍然正确但意义更丰富了, 有的只能类比地推广到立体几何中去…这些我们还将将在第一章的小结中论及, 现在提出这些只是提醒同学们在学习过程中, 若能注意它们的联系和区别, 及时进行比较和总结, 对学好立体几何是非常有益的.

目 录

绪论

第一章 直线和平面	(1)
一 平面	(1)
1.1 平面	(1)
1.2 平面的基本性质	(3)
1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法	(10)
二 空间两条直线	(16)
1.4 空间两条直线的位置关系	(16)
1.5 平行直线	(19)
1.6 两条异面直线所成的角及它们的距离	(24)
三 空间直线和平面	(30)
1.7 直线和平面位置关系	(30)
1.8 直线和平面平行的判定和性质	(33)
1.9 直线和平面垂直的判定和性质	(37)
1.10 直线在平面上的射影 直线和平面所成的角	(44)
1.11 三垂线定理	(48)
四 空间两个平面	(58)

1.12	两个平面平行的定义及判定定理	(58)
1.13	两个平面平行的性质	(61)
1.14	二面角	(65)
1.15	两个平面垂直的判定	(71)
1.16	两个平面垂直的性质	(74)
1.17	本章小结	(80)
	复习题一	(84)
第二章	多面体和旋转体	(89)
一	多面体	(89)
2.1	多面体	(89)
2.2	棱柱	(97)
2.3	棱锥和棱台	(114)
二	旋转体	(137)
2.4	旋转面和旋转体的概念	(137)
2.5	圆柱、圆锥、圆台	(139)
2.6	球	(162)
三	多面体和旋转体的体积	(184)
2.7	体积的概念和公理	(185)
2.8	棱柱、圆柱的体积公式	(189)
2.9	棱锥、圆锥的体积公式	(195)
2.10	棱台、圆台的体积公式	(202)
*2.11	拟柱体及其体积公式	(210)
2.12	球的体积公式	(215)
2.13	球缺和球缺的体积公式	(222)
2.14	本章小结	(228)
	复习题二	(238)

第三章 多面角和正多面体	(243)
3.1 多面角	(243)
3.2 多面角的性质	(245)
3.3 欧拉定理	(249)
3.4 正多面体	(254)
3.5 本章小结	(260)
复习题三	(262)

附录：参考答案

第一章 直线和平面

一 平 面

1.1 平面

平面是立体几何中的基本概念。在日常生活中，我们见过一些平面的形象，如桌面、黑板面、地板面、平静的水面等等。几何里所说的平面就是从这样一些面抽象出来的。几何里的平面不仅是平的，而且是无限延展的，正像几何里的直线不仅是直的，而且是无限延伸的一样。

在平面几何中我们学过直线是用画出一条线段来表示的，那么我们在立体几何中用什么图形来表示平面呢？通常画出一个平行四边形来表示一平面（图1-1）。这和我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们很象平行四边形是一致的。

平面在空间的位置有各种可能，可以是水平的，也可以是竖直的，或倾斜的。

当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边的长度画成邻边的两倍（图1-1）。

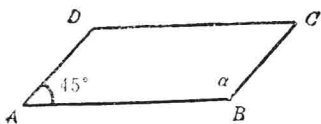
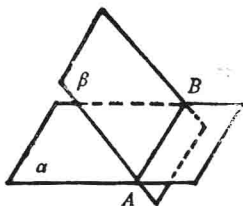


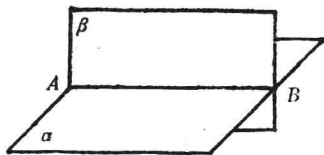
图 1-1

当一个空间图形是由若干个平面组成时，为了增强立体感，对于那些被遮部分的线段画成虚线，或者不画(图1-2)。

为了表示平面，我们常把希腊字母 α 、 β 、 γ 等写在代表平



甲



乙

图 1-2

面的平行四边形的一个角上，如平面 α 、平面 β 、平面 γ ；也可以用代表平面的平行四边形的四个顶点、或者相对的两个顶点的大写英文字母作为这个平面的名称，如图1-1中的平面 α ，平面 $ABCD$ ，平面 AC 或者平面 BD 都表示了一平面。

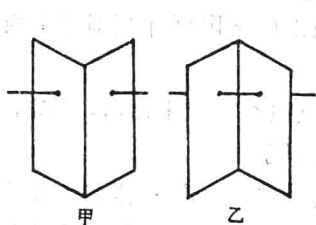
在立体几何里，对于点和直线仍然采用平面几何中常用的表示方法：用一个大写字母 A 、 B 、 C ，…表示点，用一个小写字母，如 a 、 b 、 c ，…或两个大写字母如 AB 、 BC ，…表示直线。

1.1 练习

1. 能不能说一条直线长3米，宽0.01米？为什么？
2. 能不能说一个平面长3米，宽2米？为什么？

3. 观察甲、乙两个图形，用模型来说明它们的区别。

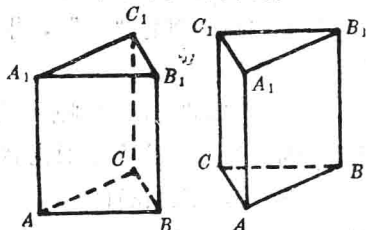
4. 观察甲、乙两个图形，写出它们由哪些面围成？



甲

乙

(第3题)



甲

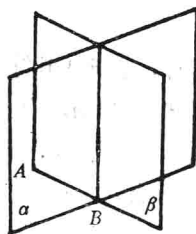
乙

(第4题)

5. 右图是尚未画好的图形，请你根据下面的要求，把被遮住的部分改为虚线。

(1) AB 没有被平面 α 遮挡；

(2) AB 被平面 α 遮挡。



(第5题)

1.2 平面的基本性质

在生产和生活中，人们经过长期的观察和实践，总结出关于平面的三条基本性质，我们把它们作为公理。这些公理和我们在平面几何里已经学过的几个公理一起，构成了进一步推理的基础。

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

这时我们说“直线在平面内”，或者“平面经过直线”。在这种情况下，直线上所有的点都在这个平面内，平面外的