卫生部规划教材

全国成人
高等医学学历（专科）教育教材

供药学专业用

高等数学

卫生部教材办公室组织编写
马湘玲　主编

Y

人民卫生出版社

全国成人高等医学学历（专科）教育教材

供药学专业用

高等数学

卫生部教材办公室组织　编写

马 湘 玲　主编

编者（以姓氏笔画为序）

马湘玲（河南医科大学）

吕　同（山东医科大学）

刘早清（同济医科大学）

刘学宗（首都医科大学）

刘启贵（大连医科大学）

陈铁生（河南医科大学）

金建文（沈阳药科大学）

人 民 卫 生 出 版 社

高 等 数 学

主　　编：马 湘 玲
出版发行：人民卫生出版社(中继线 67616688)
地　　址：(100078)北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
网　　址：http://www.pmph.com
E - mail：pmph@pmph.com
印　　刷：北京人卫印刷厂
经　　销：新华书店
开　　本：850×1168 1/16　　印张：18.25
字　　数：376 千字
版　　次：2000 年 6 月第 1 版　2000 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：00 001—6 000
标准书号：ISBN 7-117-03971-X/R·3972
定　　价：24.00 元

出 版 说 明

成人医学教育是我国医学教育的重要组成部分，为加强成人医学教育教学管理，完善教学基础建设，保证教育质量，卫生部、教育部联合颁发了《全国成人高等医学学历教育主要课程目录及课程基本要求(试行)》，这是国家为实现成人医学教育培养目标和要求，根据各门课程在某一专业中地位和作用而确定的，是该专业学生在学习课程时必须达到的基本合格标准，是编审规划教材、组织对教学水平进行监督检查和评价的重要依据，是规范我国成人高等医学学历教育的重要指导性文件。为了配合这一要求的顺利实施，卫生部教材办公室成立了全国成人高等医学教育教材评审委员会，组织编写全国成人高等医学学历(专科)教育规划教材。本套教材的主编、编者从全国推荐的600名候选人中选出，均为一线教学人员，具有丰富的成人医学学历教育教学经验；教材内容根据《全国成人高等医学学历教育主要课程目录及课程基本要求(试行)》确定，由全国成人高等医学教育教材评审委员会审定，突出成教学员在一定工作经验基础上学习的特点，篇幅适中，针对性强。

本套教材包括4个专业(临床医学、预防医学、护理学、药学)，共38种，均由人民卫生出版社出版。

临床医学、预防医学、护理学、药学专业共用

人体解剖学	孙荣鑫主编	生物化学	查锡良主编
生理学	倪　江主编	卫生法学概论	樊立华主编
药理学	李元建主编		

临床医学、预防医学、护理学专业共用

病理学	李玉林主编

临床医学、预防医学、药学专业共用

医学微生物学与免疫学	刘晶星主编

临床医学、预防医学专业共用

内科学	吕卓人主编	儿科学	徐立新主编
外科学	孙靖中主编	诊断学	汤美安主编
妇产科学	李荷莲主编		

临床医学专业用

预防医学	仲来福主编	全科医学概论	顾　湲主编

预防医学专业用

卫生化学	计时华主编	环境卫生学	王振刚主编
卫生统计学	马　燕主编	营养与食品卫生学	凌文华主编
卫生毒理学	石　年主编	劳动卫生与职业病学	陈自强主编
儿童少年卫生学	孙江平主编	社会医学	肖水源主编
流行病学	王建华主编		

护理学专业用

护理学基础	张景龙主编	儿科护理学	童秀珍主编
内科护理学	李改焕主编	护理管理学	成翼娟主编
外科护理学	鲁连桂主编	护理心理学	张树森主编
妇产科护理学	何　仲主编		

药学专业用

高等数学	马湘玲主编	天然药物化学	吴立军主编
有机化学	田昌荣主编	药物化学	徐文芳主编
物理化学	曹宗顺主编	药剂学	梁文权主编
分析化学	李发美主编	药物分析	晁若冰主编

全国成人高等医学教育教材评审委员会

主任委员：唐建武

委员：（以姓氏笔画为序）

王怀良　冯美丽　白继荣　朱立华　汤恢焕　吴仁友　吴　坤
张爱珍　张　鹏　李守国　李继坪　沈　彬　陈金华　梁万年
董崇田　樊小力

秘书：郭　明

前　言

全国成人高等医学学历（专科）教育规划教材是由卫生部规划、卫生部教材办公室组织编写的。受卫生部教材办委托，我们编写了药学专业的《高等数学》这本教材。在编写过程中，我们努力做到以下几点：

1. 以应用为目的、基础理论为必需，注重能力的培养。在保证必须理论知识的同时，减少了不必要的理论推导。使学生有针对性的获得较为系统的基础知识，以达到学用结合、学以致用的目的。

2. 本教材在努力实现教学内容的完整性和整体优化的同时，加强了与医药学专业其它教材之间的紧密联系，为学生专业课的学习奠定了坚实的理论基础。

3. 本教材内容包括一元函数微积分、微分方程、概率论及数理统计等七章内容。文字通俗易懂，注重与入学前教育内容的衔接。书后附有习题答案，便于自学。参考教学 108 学时。

4. 在编写过程中，我们充分注意到目前高等专科教育中有全日制教育、函授教育等多种办学形式，力求使本教材能适合不同办学形式的教学要求。

参加本书编写的有金建文（第一章）、马湘玲和陈铁生（第二、三章）、刘早清（第四章）、刘学宗（第五章）、吕同（第六章）、刘启贵（第七章）。全书由金建文（第一至四章）、马湘玲（第五章）、吕同（第六、七章）作第一次审定，并由马湘玲统稿，吕同、刘早清、刘学宗、刘启贵、陈铁生、金建文分别作全书的第二次审定，最后由马湘玲统一定稿。中国医科大学王怀良教授提出了宝贵意见。

本书的编写始终得到卫生部教材办和各有关院校领导的关心和支持，河南医科大学成教院给予了鼎力相助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编写时间仓促，加之编者的经验和水平有限，难免有缺点及漏误，敬请各位同仁多提宝贵意见。

编　者

二〇〇〇年二月

目　　录

第一章　函数与极限论初步 …… 1
第一节　从初等数学向微积分的过渡 …… 1
一、面积的计算 …… 1
二、变速运动的速度 …… 2
三、小结——与初等数学的比较 …… 3
第二节　函数 …… 4
一、函数的概念 …… 4
二、反函数 …… 6
三、分段函数 …… 6
四、初等函数 …… 7
五、函数尺与曲线的直线化 …… 10
第三节　函数的极限 …… 14
一、极限的概念 …… 14
二、无穷小量与无穷大量 …… 17
三、极限的四则运算 …… 19
四、两个重要极限 …… 21
五、极限在医药学上的应用 …… 23
第四节　函数的连续性 …… 23
一、连续函数的概念 …… 23
二、函数的间断性 …… 25
三、初等函数的连续性 …… 27
习题一 …… 29

第二章　导数与微分 …… 32
第一节　导数的概念 …… 32
一、两个实例 …… 32
二、导数的定义 …… 33
三、导数的几何意义 …… 35
四、函数的连续性与可导性的关系 …… 35
五、基本初等函数的导数 …… 36
第二节　求导法则 …… 39
一、导数的四则运算 …… 39

二、复合函数的导数 …… 42
三、反函数的求导法则 …… 44
四、隐函数及其求导法 …… 45
五、对数求导法 …… 46
六、参数方程确定的函数求导法则 …… 47
七、高阶导数 …… 48
第三节 导数的应用 …… 49
一、中值定理 …… 49
二、不定式的定值法 …… 52
三、函数的单调性和极值 …… 56
四、最大值与最小值 …… 61
五、函数的凹凸及拐点 …… 63
六、函数的作图 …… 65
七、导数在医药学上的应用 …… 68
第四节 微分及其应用 …… 69
一、微分的概念 …… 69
二、微分的计算 …… 72
习题二 …… 76
第三章 不定积分 …… 81
第一节 不定积分的概念与性质 …… 81
一、原函数与不定积分 …… 81
二、不定积分的几何意义（原函数的几何意义） …… 83
三、不定积分的性质 …… 84
四、基本积分表 …… 85
第二节 换元积分法 …… 87
一、第一换元法 …… 87
二、第二换元法 …… 91
第三节 分部积分法 …… 94
第四节 有理函数的积分 …… 97
一、有理函数 …… 97
二、真分式的部分分式法 …… 98
三、有理函数的积分 …… 99
四、关于不定积分的几点说明 …… 101
第五节 积分表的使用 …… 103
一、直接查表 …… 103
二、先代换后查表 …… 104

三、用递推公式…… 104
习题三…… 105

第四章 定积分及其应用…… 108
第一节 定积分的概念…… 108
一、举例…… 108
二、定积分的定义…… 110
三、定积分的性质…… 113
第二节 牛顿—莱布尼兹公式…… 114
一、积分上限的函数及其导数…… 114
二、牛顿—莱布尼兹公式…… 116
第三节 定积分的计算…… 117
一、定积分的换元积分法…… 118
二、定积分的分部积分法…… 120
三、定积分的近似计算…… 121
四、广义积分…… 125
第四节 定积分的应用…… 129
一、微元法…… 129
二、平面图形的面积…… 130
三、旋转体的体积…… 133
四、连续函数的平均值…… 135
五、变力所作的功…… 136
六、定积分在医药学上的应用…… 137
习题四…… 139

第五章 常微分方程基础…… 143
第一节 微分方程的基本概念…… 143
第二节 一阶微分方程…… 145
一、可分离变量的微分方程…… 145
二、可化成可分离变量的微分方程…… 148
三、一阶线性微分方程…… 151
第三节 二阶常系数线性齐次微分方程…… 153
一、解的性质…… 154
二、通解的类型…… 155
第四节 拉普拉斯变换…… 158
一、拉普拉斯变换的定义…… 158
二、拉普拉斯变换的性质…… 160

三、举例…………………………………………………………………………… 163
第五节　微分方程在医药学中的应用…………………………………………… 165
习题五……………………………………………………………………………… 171

第六章　概率论基础…………………………………………………………… 173
第一节　随机事件及其运算……………………………………………………… 173
一、随机事件………………………………………………………………………… 173
二、事件之间的关系……………………………………………………………… 174
三、事件之间的运算……………………………………………………………… 175
第二节　概率的定义……………………………………………………………… 177
一、概率的统计定义……………………………………………………………… 177
二、概率的古典定义……………………………………………………………… 179
第三节　概率计算的基本公式…………………………………………………… 181
一、概率的加法公式……………………………………………………………… 181
二、条件概率和乘法公式………………………………………………………… 182
三、全概率公式和逆概率公式…………………………………………………… 185
第四节　随机变量及其分布……………………………………………………… 190
一、随机变量的概念……………………………………………………………… 190
二、离散型随机变量及其分布…………………………………………………… 191
三、连续型随机变量及其分布…………………………………………………… 195
第五节　随机变量的数字特征…………………………………………………… 201
一、随机变量的数学期望及性质………………………………………………… 202
二、随机变量的方差及性质……………………………………………………… 204
第六节　大数定律与中心极限定理……………………………………………… 208
一、大数定律………………………………………………………………………… 208
二、中心极限定理………………………………………………………………… 209
习题六……………………………………………………………………………… 211

第七章　数理统计初步………………………………………………………… 215
第一节　基本概念………………………………………………………………… 215
一、数理统计的基本概念………………………………………………………… 215
二、常用的分布……………………………………………………………………… 217
第二节　参数估计………………………………………………………………… 221
一、点估计…………………………………………………………………………… 222
二、区间估计………………………………………………………………………… 222
第三节　假设检验………………………………………………………………… 224
一、假设检验的基本思想………………………………………………………… 224

二、两样本均数的假设检验…………………………………………………………………… 228
三、单因素方差分析……………………………………………………………………………… 231
第四节　正交实验设计…………………………………………………………………………… 235
一、正交表的原理………………………………………………………………………………… 235
二、表头的设计及其结果分析…………………………………………………………………… 237
第五节　线性相关与回归………………………………………………………………………… 241
一、线性相关分析………………………………………………………………………………… 241
二、直线回归……………………………………………………………………………………… 245
第六节　计算器的使用与统计软件包的简介…………………………………………………… 248
一、计算器的作用………………………………………………………………………………… 248
二、常用统计软件包简介………………………………………………………………………… 249
习题七……………………………………………………………………………………………… 252

附录一　不定积分表……………………………………………………………………………… 256
附录二　标准正态分布函数值表………………………………………………………………… 264
附录三　正态分布的双侧分位数表……………………………………………………………… 265
附录四　t 界值表………………………………………………………………………………… 266
附录五　F 界值表………………………………………………………………………………… 267
附录六　χ^2 界值表……………………………………………………………………………… 271
附录七　r 界值表………………………………………………………………………………… 272
附录八　习题答案………………………………………………………………………………… 273

第一章　函数与极限论初步

我们这门课程的前四章讲的是一元函数的微积分。微积分研究的对象是什么?研究的方法是什么?它同初等数学有什么联系和区别?所有这些都是大家开始学习这门课程时所关心的问题。这一章作为整个课程的一个引论，目的是初步说明这些问题，同时也要引入一些基本概念，简要地复习一下某些已在中学学过，而又为本课程必不可少的内容，为以后的学习作准备。

第一节　从初等数学向微积分的过渡

一、面积的计算

在初等几何里，计算多边形的面积的办法是：把多边形分解成许多三角形，算出这些三角形的面积，然后相加，就得到多边形的面积。

特别，对正多边形，我们有如下的面积公式：

$$S=\frac{1}{2}lh \tag{1-1}$$

其中 l 是多边形的周长，h 是边心距。

圆的面积如何求呢?由于圆的周界是弯曲的，它就不能像周界是一些直线段的多边形那样，把它分解成许多三角形。问题的困难在一个“曲”字上。

虽然整个圆周是曲的，但每一小段圆弧却可以近似地看成直的。就是说，在很小的一段上，可以近似地“以直代曲”，即以弦代替圆弧。这样可以把圆周分成许许多多小段。比如说，分成 n 个等长小段，代替圆而先去考虑它的内接正 n 边形，根据公式(1-1)，这个正 n 边形的面积为：

$$S_n=\frac{1}{2}l_nR_n \tag{1-2}$$

其中 l_n 和 R_n 分别是正 n 边形的周长和边心距。当 n 很大时，内接正 n 边形的面积 S_n 就很近似于圆的面积 S；n 越大，近似程度越高。

但是不论 n 多么大，它一旦确定，这样算出来的总还只是多边形的面积，它只是圆面积的近似值，而不是圆面积的精确值。

为了从近似值过渡到精确值，我们自然让 n 无限地增大，记成 $n\to\infty$，很明显，当 $n\to\infty$ 时，内接正 n 边形的面积 S_n 将趋近于圆的面积 S，我们记成

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

其中 lim 表示极限的意思。

当 $n \to \infty$ 时，内接正 n 边形的周长 l_n 趋近于圆周长 $l = 2\pi R$；边心距 R_n 趋近于圆的半径 R，即

$$\lim_{n\to\infty} l_n = l \qquad \lim_{n\to\infty} R_n = R$$

因此，如果在(1-2)式中令 $n \to \infty$，这叫做取极限，就得到

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} l_n R_n\right) = \frac{1}{2} l R$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\pi R) R = \pi R^2$$

这就导出了圆的面积公式。

上面介绍的面积计算问题及其它许多类似的问题，正是微积分学基本概念——极限思想在几何学上的应用。

二、变速运动的速度

运动有两种，一种是匀速运动，快慢始终保持不变；一种是变速运动，时而快，时而慢。客观实际中的运动常常是变速的，例如，飞机的飞行，汽车的行驶，物体的降落等，就都是变速运动。

现在我们着重研究如何求变速运动的速度。

以自由落体运动为例，若忽略空气阻力，则在时间 t 内下落的路程 S 由下列公式给出

$$S = \frac{1}{2} g t^2 \tag{1-3}$$

其中 $g = 9.81$ 米 / 秒^2 是重力加速度，现在要计算它在每一时刻的速度，即瞬时速度。

对于速度保持不变的匀速运动，我们可用简单的公式

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}} = \frac{S}{t} \tag{1-4}$$

将走过的路程除以经历的时间就得出各个时刻的速度。而现在考察的自由落体运动，其速度是随时间而变的，这时公式(1-4)就不能用了，路程除以时间只能得出这段时间内的平均速度，而不能得出这段时间内每个时刻的速度，这里的困难在于速度是变的。

在整段时间内，速度是变的，但在很小的一段时间内，速度可以近似地看成不变的，或说可以近似地“以匀速代变速”。

按照这种想法，为了求自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 v_0，我们考察从时刻 t_0 到时刻 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内(这里 Δt 代表从 t_0 开始所经过的时间)，自由落体所走过的路程为：

$$\Delta S = \frac{1}{2} g (t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2 = g t_0 \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

如果 Δt 很小，在这段时间内，运动就可以近似地看成是匀速的，因而就可以用这段

时间内的平均速度

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t)$$

来近似地代替时刻 t_0 的瞬时速度 v_0，Δt 越小，近似程度越高。但是不论 Δt 多么小，这个平均速度还只是瞬时速度 v_0 的近似值，而不是它的精确值。当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 的极限值就是瞬时速度 v_0，即

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t)=gt_0$$

这就得出了自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度。

微分学基本概念 —— 导数，就是人们从求变速运动的速度及其他许多类似的问题中提练出来的。

三、小结 —— 与初等数学的比较

以上列举了微积分学的两个典型问题，我们力求通过这两个例子说明：微积分学研究的问题以及处理问题所依据的基本观念和基本方法，与初等数学具有哪些不同的特点，现小结如下：

（一）变化的观点，用变化的观点去考察问题：从变化当中去认识事物。

（二）从变化的观点出发，需要引入变量的概念。例如，时间 t 和路程 S，半径 R 与圆面积 S 等等都是变量。

微积分学主要是研究变量的，而初等数学主要是研究常量的。例如算术中研究固定不变的量的运算法则；代数上解方程，所要求的未知数也是固定不变的，只不过具体数值事先不知道就是了；几何学研究的是一些固定的、规则的图形，因此初等数学基本上是常量数学，而微积分则属于变量数学。

在同一问题中，往往同时出现好几个变量，我们不是孤立地研究每一个变量，而是着重研究变量之间的依赖关系。变量之间的这种依赖关系就叫函数。函数是微积分学的又一个基本概念，关于变量与函数的详细讨论见下一节。

（三）极限方法，我们遇到的问题，有的表现为曲与直，有的表现为变与不变的矛盾。解决它们的方法是局部“以直代曲”、以“不变代变”，从而求得问题的近似值，最后归结为近似与精确的矛盾。从近似值过渡到精确值，用的是极限方法。

极限论是微积分的基础理论，它从方法上突出地表现了微积分不同于初等数学的特点。关于极限的详细介绍见本章第三节。

第二节　函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在观察自然现象或研究实际问题时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在变化过程中保持同一数值，称为常量，有的量在变化过程中可以取不同的数值，称为变量。

例如：物体以速度 v 做匀速运动，物体经过的路程 S 和时间 t 之间的关系为 $S = vt$，其中 v 是常量，而 S 与 t 都是变量。

又如：圆的半径 R 变化时，圆的周长 C 也在变化，它们之间的关系为 $C = 2\pi R$，其中 π 是常量，而 R 与 C 为变量。

习惯上用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，z 等表示变量。为讨论方便，常量可视为变化为零的变量。若不加说明，我们认为变量只取实数而不取复数。

2. 函数的概念

例 1　物体在距地面高度 $S_0 = 19.6$ 米的地方自由落下（不考虑空气阻力），则物体与地面的距离 S 随时间 t 的变化规律是

$$S = S_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 19.6 - \frac{1}{2}gt^2$$

其中重力加速度 $g = 9.8$ 米 / 秒^2。

对于某一确定的时间 t，根据上面的关系式就有一个确定的距离 S 与之对应。如取 $t = 1$ 秒，就有 $S = 14.7$ 米；取 $t = 2$ 秒，就有 $S = 0$，即物体落到地面。

例 2　关系式

$$y = x^2$$

给出了抛物线上点 (x, y) 的两个坐标之间的依赖关系。

类似上述关于变量之间相互依赖关系的例子很多，于此不拟多举。但每一例子都具有共同的本质。即参与同一过程的变量是互相联系的，且当其中一个变量取定了某个值时，按照一定的规律，另一变量就有确定的值与它对应。

于是我们可以概括出函数定义：

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，如果变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值，变量 y 按照一定的规律总有确定的数值与它对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y = f(x)$$

称 x 为自变量，y 为因变量。自变量 x 的变化范围称为这个函数的定义域。如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一个点，则与 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$，所有函数值的集合称为这个函数的值域。

函数 $y = f(x)$ 中的“f”表示 x 与 y 的对应规律，$f(x)$ 是一个完整记号，不可误

解为 f 与 x 相乘。

函数的定义域常用区间来表示，满足$a \leqslant x \leqslant b$的实数$x$的集合叫做闭区间，记为$[a, b]$；满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，记为(a, b)；满足 $a \leqslant x < b$ 或$a < x \leqslant b$的实数集合叫做半开半闭区间，分别记为$[a, b)$或$(a, b]$。其中a，b叫做相应区间的端点。

以上区间叫做有限区间，除了有限区间外，还有无限区间：把满足 $x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$。而$(-\infty, +\infty)$则表示全体实数。

此外邻域是常用的一种区间概念。设x_0是某一定点，δ是大于零的某实数，开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$称为点$x_0$的$\delta$邻域，点$x_0$称为邻域的中心，$\delta$称为邻域的半径。

例 3 设 $f(x) = 2x^2 - 3$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(x_0)$。

解 $f(0) = 2 \times 0^2 - 3 = -3$

$f(-1) = 2 \times (-1)^2 - 3 = -1$

$f(x_0) = 2x_0^2 - 3$

例 4 设 $f(x) = \pm\sqrt{x}$，求 $f(2)$，$f(4)$。

解 $f(2) = \pm\sqrt{2}$

$f(4) = \pm 2$

例 5 函数 $y = c$ 是一个常函数，它的对应规律是当自变量 x 取区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的每个值时，都有常数 c 与之对应。

以上例子说明，函数定义中“总有确定的数值与之对应”，指的是单值或多值的意思，如例 3 是单值对应，例 4 是多值对应，例 5 也是单值对应，且只有一个 y 值与之对应，而不要求对不同的 x 有不同的 y 与之对应。

3. 函数的几种特性

函数的特性是指有界性，单调性，奇偶性，周期性。后两者大家在中学里都很熟悉了。这里仅介绍前两者。

(1) 函数的有界性

对函数 $f(x)$ 的定义域内的一切 x，若存在正数 M，使函数值都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在定义域内有界，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在定义域内无界。

例如函数 $y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的，因为取 $M = 1$，对任一实数 x，有 $|\sin x| \leqslant 1$。

而函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在$(0, 1)$内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于$(0, 1)$内的一切 x 都成立。

(2) 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 对区间(a, b)内任意两点 x_1、x_2，且 $x_1 < x_2$ 时有

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加(或单调减少)。

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数。

例如函数 $y = x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的。(见图 1-1)

又如函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的。(见图 1-2)

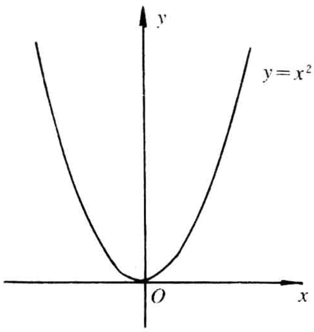

图 1-1

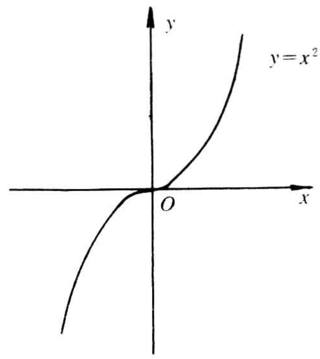

图 1-2

二、反 函 数

在线性函数 $y = ax + b$ 中，x 是自变量，y 是因变量，a 和 b 都是常量。反过来，从上面的式子中把 x 解出来，得

$$x = \frac{y - b}{a}$$

这时若把 y 看成自变量，x 看成因变量，我们就说 $x = \dfrac{y-b}{a}$ 是 $y = ax + b$ 的反函数，当然 $y = ax + b$ 也是 $x = \dfrac{y-b}{a}$ 的反函数，它们互为反函数。一般地，我们可以说：

在函数 $y = f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量，如果从方程 $y = f(x)$ 中把 x 解出来，得 $x = \varphi(y)$，这时把 y 看成自变量，x 看成因变量，我们就说：$y = f(x)$ 和 $x = \varphi(y)$ 互为反函数。习惯上，自变量用 x 来表示，函数用 y 来表示，因此常把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 中的自变量 y 改记为 x，因变量 x 改记为 y。例如 $y = \sin x$ 的反函数为 $x = Arc\sin y$，习惯上写为 $y = Arc\sin x$。又如 $y = a^x$ 的反函数为 $x = \log_a y$，习惯上写为 $y = \log_a x$。

三、分 段 函 数

用解析式表示函数时，有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数，这样的函数叫做分段函数，例如