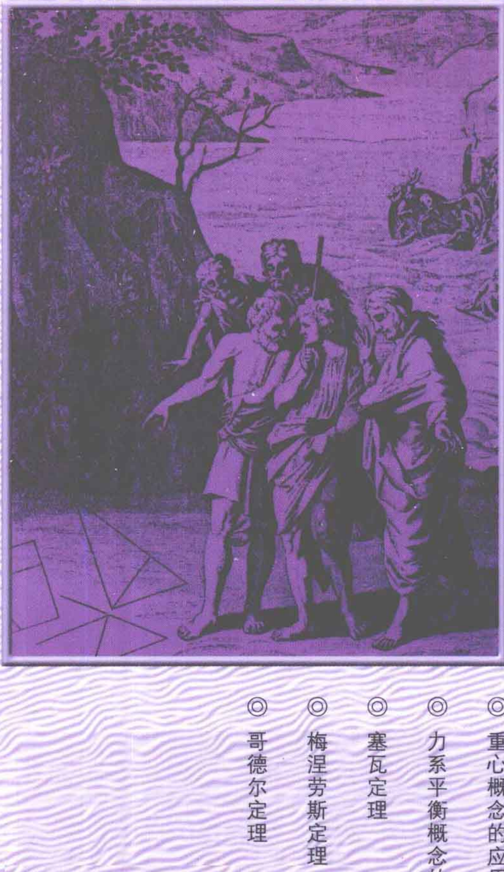
《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

力学在几何中的一些应用

吴文俊 著



◎重心概念的应用

◎力系平衡概念

◎塞瓦定理

◎梅涅劳斯定理

◎哥德尔定理

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第二辑）

力学在几何中的一些应用

吴文俊 著

◎重心概念的应用

◎力系平衡概念的应

◎塞瓦定理

◎梅涅劳斯定理

◎哥德尔定理

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

数学在力学中的应用是明显的，比如力学中的一些计算就要用到数学.但是力学在数学(比如几何)中的应用，大家就不一定知道的很多了.其实远在2 000年前，阿基米德就已经知道应用力学中的物体平衡定律等来证明一些几何命题.学过物理的中学生都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念，本书引用了这些力学概念，来举例说明如何应用它们来证明一些几何命题.本书内容只涉及中学课程里的一些物理和几何的知识，不涉及深奥的理论.

图书在版编目(CIP)数据

力学在几何中的一些应用/吴文俊著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.3

ISBN 978－7－5603－4013－5

Ⅰ.①力…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①几何课－中学－课外读物Ⅳ.①G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第025832号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　齐新宇
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张7.75　字数85千字
版　　次　2013年3月第1版　2013年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－4013－5
定　　价　38.00元

前　言

数学、力学以及其他各学科，尽管它们研究的对象形形色色，使用的方法千变万化，但它们有一个共同的目的，即它们都是为了认识客观世界的规律性并用来改造客观世界而发生、发展和壮大起来的.在这个共同的目的之下，数学和力学更是一对亲密的"战友"，它们互相支援和推动，彼此启发和帮助.

数学对于力学的作用是明显的.由于数学研究的对象非常普遍，研究的范围也就极其广泛，不论是自然科学、工程技术、国民经济以至于日常生活都不能不和数学打交道；特别是力学，更要用到数学.数学对力学家来说

几乎是“不可一日无此君”.

但是反过来,力学对数学的帮助也并不小.从小的方面来说,某些数学定理用力学方法来证明就很简单,某些数学问题从力学着眼来考虑就可能提供一些解决的办法;从大的方面来说,由力学出发,还可能提供新的数学思想、新的数学方法,从而产生新的数学分支.当然,这样的作用并不是力学所独有的.数学是一门基础科学,它是认识和改造客观世界的重要武器之一.它不仅经常对外来任务提供解决办法,而且还不断从外界吸收营养,来壮大自己的力量.这种外来的推动来自各个方面,但从历史的久远和影响的巨大来看,力学的作用特别显著.例如微积分的产生,力学就起了决定性的作用.16世纪英国工业革命的结果,工业的迅速发展和技术革新都要求深入了解物体的运动规律,因而对力学提出了很多急待研究的问题;要解决这些问题,原来的数学工具已经不够用了,迫切需要一个新的数学工具.这就是微积分产生的原因.

力学对数学的应用甚至可以追溯到2 000年前,那时是罗马帝国称雄的时代,有一位著名的科学家阿基米德,他对于物体在液体中的浮沉原理的发现是众所周知的,在中学的物理教科书中就提到了它.他在数学上的主要贡献是一些几何图形的面积和体积的计算.这些在今天看来仍然不是轻而易举的,而在当时就更难得了.阿基米德从力学角度入手提供了新的方法.这些方法用比较近代的观点来看,属于积分的范围.阿基米德的主要著作之一就是《一些几何命题的力学证明》.

学过物理的中学生都熟悉物体的重心和力的平衡这些力学概念.本书引用了这些力学概念,举例说明它们如何用来证明一些几何命题.

本书内容只涉及中学课程里的一些物理和几何的知识,不涉及深奥的理论.

目录

第1章

重心概念的应用

一根棒，如果它的质量均匀分布，它的重心就在棒的中央；如果棒的质量不是均匀的，密度大小各处不同，它的重心就可能偏在某处，但是不管怎样，只要在重心那一点把棒支起，就可以让这根棒达到平衡（图 1）．同样，在一个平板的重心那一点将这平板支起，也能达到平衡（图 2）．最简单的情形，只有两个质点 M_1 和 M_2，它们的质量分别是 m_1 和 m_2，那么这两个质点的重心 M 就在 M_1 和 M_2 这两点的连线上（图 3）．它把线段 M_1M_2 分成下面的比例

$$d_1 : d_2 = m_2 : m_1$$

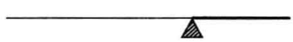


图 1

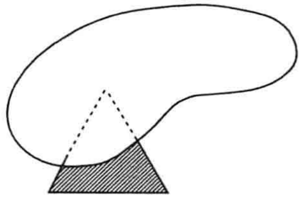


图 2

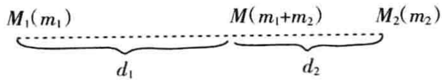


图 3

三角形有许多有趣的性质是大家熟悉的. 例如,三条中线交于一点(重心),三条高线交于一点(垂心),三条内角平分线交于一点(内心),等等. 我们现在从力学的角度出发来证明三条中线交于一点.

设想有一个三角形板,质量均匀分布. 那么它的重心应该在什么地方呢? 我们把这个三角形板分成许多沿底边平行的狭条(图 4). 当这些狭条分得很细时,它的重心就在它的中点. 所有这些狭条的重心就都在三角形板底边的中线上,因此整个三角形板的重心也就在这条中线上. 同样道理,这个三角形板的重心也在另外两条中线上. 可见三角形的三条中线相交于一点,即这个三角形的重心.

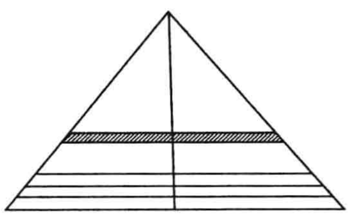


图 4

我们也可以换一种方法来考虑. 设想在三角形的三个顶点处有质量同为 m 的质点(图 5). 我们来看这三个质点的重心应该在什么位置. 质点 $B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心在底边 BC 的中点 D 处,质量是 $2m$. 质点 $D(2m)$ 和质点 $A(m)$ 的重心,也就是三个质点 $A(m)$, $B(m)$ 和 $C(m)$ 的重心,应该在 AD 这条中线上,并且这个重心 M 将线段 AD 分成下面的比例

$$AM : MD = 2m : m$$

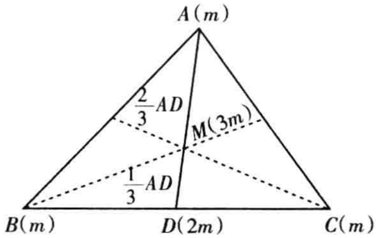


图 5

即 $AM=2MD$. 可见 $AM=\dfrac{2}{3}AD$, $MD=\dfrac{1}{3}AD$. 同理,重心 M 也应该在另外两条中线上. 于是三条中线都相交在重心 M 这一点,它和每个顶点的距离等于相应中线长度的 $\dfrac{2}{3}$.

上面是设想三个顶点处有相同质量的情形. 现在我们来看如果这三个顶点处质量不同,将会发生什么情形? 例如:在顶点 A 处的质量等于对边 BC 的长度 a;同样,在另外两个顶点 B,C 处的质量也等于它们对边的长度 b,c(图 6). 点 B,C 的重心 D 在线段 BC 上,它把线段 BC 分成下面的比例

$$BD : DC = c : b = AB : AC$$

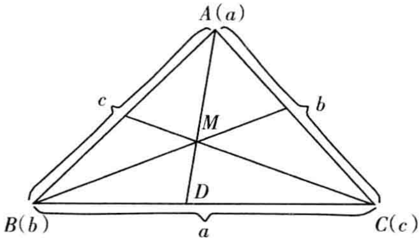


图 6

可见 AD 是$\angle A$ 的平分线(三角形的角平分线把对边分成的两线段和两条邻边成比例). 于是质点 A 和 D 的重心,也就是整个质点系 A,B,C 的重心 M 应该在角平分线 AD 上. 同理,这个重心也应该在另外两条角平分线上. 这样,我们就很清楚地看出了三角形的三条内角平分线应该交于一点.

如果我们把三个顶点处的质量分布再变化一下(图 7,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 都是锐角),也可以证明三角形的三条高交于一点.

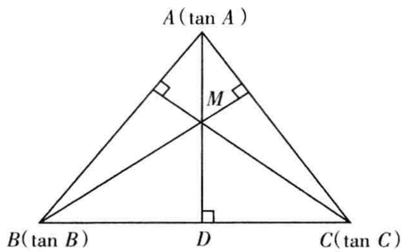


图 7

现在我们考虑更一般的情形. 设想通过$\triangle ABC$ 的每个顶点处有一条直线(图 8),且把对边分成的比例分别是 α,β,γ,即

$$BD:DC=\alpha$$

$$CE : EA = \beta$$
$$AF : FB = \gamma$$

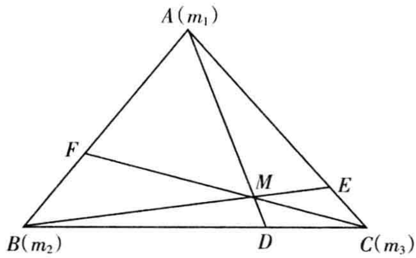


图 8

假若 AD,BE,CF 这三条直线交于一点,我们来看 α,β,γ 之间有什么样的关系.设想顶点 A,B,C 处的质量分别为 m_1,m_2 和 m_3,我们总可以选择 m_1,m_2,m_3 使得 F 是质点 A,B 的重心,同时 E 是质点 A,C 的重心,即选择 m_1,m_2,m_3 使得

$$m_2 : m_1 = \gamma, m_1 : m_3 = \beta$$

所以,显然整个质点系 A,B,C 的重心 M 应该在 BE 和 CF 的交点处.既然直线 AD 也通过这个重心,所以 D 一定是质点 B,C 的重心(假若 B,C 的重心不是 D 而是另外一点 D',那么整个质点系 A,B,C 的重心也就不在 AD 上,而在 AD'上了),因此也应该有

$$m_3 : m_2 = \alpha$$

所以,如果 AD,BE,CF 交于一点 M,那么

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_1}{m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1} = 1$$

反过来,如果 $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$,我们总可以选择适当的 m_1,m_2,m_3 作为 A,B,C 的质量,使得质点 B,C 的重心正好在 D,质点 C,A 的重心正好在 E,而同时质点 A,B

的重心也正好在 F(例如,让 $m_1=1, m_2=\gamma, m_3=\frac{1}{\beta}$).因此整个质点系 A,B,C 的重心应该同时在 AD,BE,CF 这三条直线上,可见这时 AD,BE,CF 交于一点.这样,我们就证明了三角形的塞瓦(Cova, Giovanni 1648—1734)定理:AD,BE,CF 交于一点的充分必要条件是 $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$.

从上面这些例子来看,应用力学的重心概念不仅可以简化某些几何命题的证明,很自然地得到所要的结论,而且也能够自然而然地发现某些几何事实.我们再举一例来说明如何利用重心概念来发现一个几何图形的性质.

设想在一个四面体(图 9)的四个顶点 A,B,C,D 处有相同的质量 m.质点 A,B 的重心在线段 AB 的中点 M_{AB};质点 C,D 的重心在线段 CD 的中点 M_{CD}.所以质点 $M_{AB}(2m)$ 和质点 $M_{CD}(2m)$ 的重心,也就是整个质点系 A,B,C,D 的重心 M,应该在线段 $M_{AB}M_{CD}$ 的中点.同样,这个重心 M 也应该在 BC 的中点 M_{BC} 和 AD 的中点 M_{AD} 的连线上,也在 M_{AC} 和 M_{BD} 的连线上.

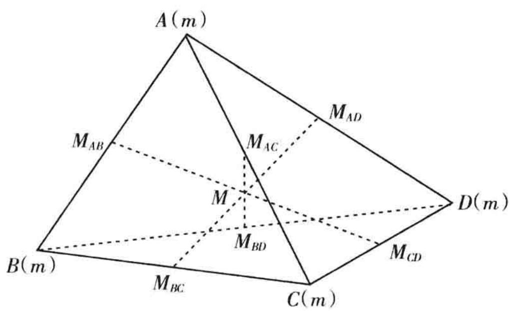


图 9

因此，如果把 AB 和 CD 叫做对边，那么，我们就十分自然地看出：四面体的三对对边的中点连线相交在一点，即四面体的重心.

我们也可以换一种方法来求这个重心 M. 质点 B，C，D 的重心 M_{BCD} 在 $\triangle BCD$ 的重心处，即三条中线的交点. 因此整个质点系 A，B，C，D 的重心 M 就在线段 AM_{BCD} 上，即质点 $A(m)$ 和质点 $M_{BCD}(3m)$ 的重心所在处. 于是线段 AM 的长度等于 AM_{BCD} 的长度的 $\frac{3}{4}$. 同样，这个重心也在线段 BM_{CDA}，CM_{DAB} 和 DM_{ABC} 上. 因此，AM_{BCD}，BM_{CDA}，CM_{DAB} 和 DM_{ABC} 这四个线段又应该相交在 M 这一点. 这样，我们很自然地发现了上面所说的几何事实，即四面体 $ABCD$ 共有七条上面所说的特殊线段相交在一点.

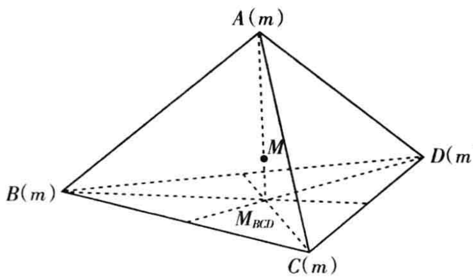


图 10

对于四面体，我们考虑了在各个顶点处质量分布相同的情形. 如果各个顶点处的质量各不相同，我们又可以得到什么样的结论呢？是否可以得到类似于三角形的塞瓦定理那样的命题呢？这个问题留给读者自己去解答.

第2章 力系平衡概念的应用

力，是造成物体运动状态改变的原因，通常用一个箭头来表示：箭头的方向表示力的作用方向，箭头的起点表示力的作用点，箭头的长短表示力的大小（图11）．可见，一个力是由三个因素组成，即力的方向、大小和作用点．下面我们把一个力记为 $\boldsymbol{a}$ 并把它的大小记为 $|\boldsymbol{a}|$．

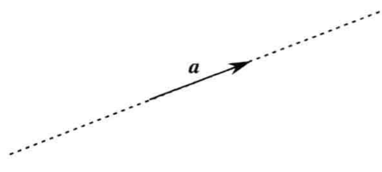


图 11

我们设想用一条理想的绳来拉一个物体（图 12），只要使用的力一样大，作用的方向一样，那么不论这个力作用在绳上哪一点，它所产生的效果总是一样的．这个性质就是力的传递性．力既然有传

递性,所以有时也可以不考虑力的作用点,而只考虑力的方向和大小.

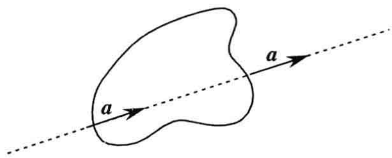


图 12

现在设想有一物体受许多力的作用,这些力构成一个力系.这个力系对这物体所产生的总效果究竟怎样呢?我们先考虑两个力,它们作用在一点,总的效果就像物体受单独一个力的作用一样,这个力称为这二力的合力,它的方向、大小可用下面这个几何方法求得:在 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的作用线重合时,合力是很明显的;假使不重合,那么以力 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线就可代表这合力 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的大小和方向,也就是力 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的总效应(图 13).如果这两个力不交于一点,但作用线交于一点,那么可以把这两个力移到这个交点后,再应用上述平行四边形法则来求得它们的合力.如图 13 所示,合力 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和力 $\boldsymbol{a}$ 所成的角是 β,和力 $\boldsymbol{b}$ 所成的角是 α,那么

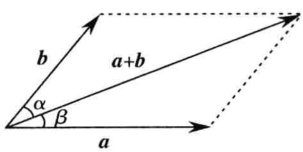


图 13

$$\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

如果一个平面上的两个力 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的作用线平行，它们的方向又相同（图 14），那么合力 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的作用线和这二力的作用线平行，合力与力 $\boldsymbol{a}$ 和力 $\boldsymbol{b}$ 之间的距离 d_1 和 d_2 有下面的关系

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

合力 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 的方向也就是这二力的方向，合力的大小是这二力大小的和

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

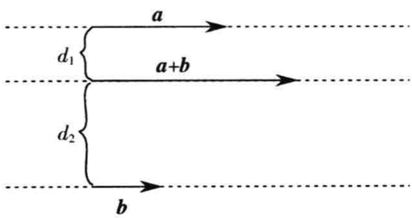


图 14

假如 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的作用线平行，但方向相反，并且力 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的大小不等（图 15），那么合力的作用线也和力 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的作用线平行，它跟这两条直线的距离 d_1 和 d_2 有下面这个关系

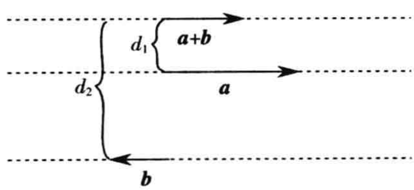


图 15

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$$