普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

集美大学诚毅学院
高等数学编写组 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高 等 数 学

集美大学诚毅学院高等数学编写组 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是为非“211”高校应用型专业的学生而写的．针对学生的特点，对微积分学中的基本概念和定理尽量采用直观的描述方法，并给出一些具体的例子，使学生对基本概念和定理有一个比较直观的理解，从而减少了抽象的理论论述．

本书的内容涵盖了一元函数的微积分及其应用、函数的级数展开及其应用、常微分方程及其应用、多元函数的微积分及其应用．书中的例题多为加强学生微积分运算能力的例子，使其掌握对实际问题进行数学建模的思想方法，培养和提高其应用微积分学的科学素质和创新能力．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/集美大学诚毅学院高等数学编写组编著．—北京：机械工业出版社，2013.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-42988-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①集…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 138914 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：李永联　责任编辑：李永联　陈崇昱
版式设计：霍永明　责任校对：申春香
封面设计：马精明　责任印制：李　洋
三河市国英印刷有限公司印刷
2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・21.5 印张・530 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-42988-3
定价：45.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

我们在多年从事高等数学教学工作的基础上，并依据学生在后续课程中对高等数学内容要求的反馈情况，深刻感受到编写一本适合非“211”高校应用型专业的学生学习的高等数学教材很有必要．

在高等数学的教学中，我们一般会去花很多的篇幅和学时用 ε-δ 语言去讲授函数极限的概念，并举很多求极限的例子．因为这是数学分析中最典型的数学思维之一．但纵观全局，要在有限的时间内使学生掌握后续课程中需要的知识点，我们不可能有这么多的时间来这样讲授极限的概念．这就要求我们对传统的教材进行认真的分析，研究如何选取更适合这类应用型专业的学生学习的知识点，而且重点是培养学生如何在“用”上下工夫．鉴于此，本书在讲授方法上采用常见的例子直观地引入数学概念，让学生在比较形象地理解、掌握微积分的基本概念后加强基本运算，并在此基础上培养他们运用微积分解决简单实际问题的能力，即培养学生学会初步用微积分的基础知识进行数学建模的能力．另一方面，由于不同层次学校的学生其特点不同，对抽象的数学思维方法的理解和接受能力也有很大的差别．因此，本书尽量做到用直观的语言把数学符号解释清楚，并且把数学的语言用“白话文”写出来，使学生在课后复习时能更好地理解数学语言的内容．当然，要深入浅出地把微积分的思想与运算说清楚是十分不容易的，但我们下定决心朝这一方向努力．

本书沿袭了传统的微积分学知识点的逻辑关系，由直观、逼近的图像给出极限的概念，而把用 ε-δ 语言定义极限的方法放到附注（见 2.1 节）中，让有兴趣的同学阅读理解，对于求极限的例子，则放到洛必达法则中进行求解；在给出极限概念后，讲授函数的连续性；由直观的变化率问题引出函数的导数和微分，并给出它们在实际问题中的简单应用；对于求导的逆运算给出了不定积分，对连续函数的黎曼和给出了定积分，并由牛顿-莱布尼茨公式给出了定积分与不定积分之间的联系，同时给出了定积分在实际问题中的应用；接着以大量的例子给出了微分方程的建立及多种类型的微分方程的解法，对于实际问题，着重讲述用微积分进行数学建模的思想和范例；在微积分的基础上，介绍了研究函数性质的一种重要手段——泰勒展开，并给出了它在近似计算和误差估计中的应用．此外，我们给出了在现代频谱分析中的傅里叶分析基础，即周期函数的三角级数展开；对于工程和信息技术专业的学生，他们的后续课程会大量涉及多元函数微积分，我们以较多的篇幅进行介绍，因为这部分内容比较多且函数关系复杂，我们首先介绍了多元函数微积分相关的向量场的基本运算及空间曲面，然后由多元函数与一元函数的区别给出多元函数的连续性与偏微分的概念与运算，最后由黎曼和的概念给出多重积分、面积分和线积分的运算，并利用偏导数、面积分和线积分的运算来研究三维空间中标量场和向量场的性质，给出了标量场的梯度场、向量场的散度场和向量场的旋度场的概念，为工程和信息技术专业学生的后续课程打下数学基础．

本书按知识点的逻辑结构共分 11 章：第 1 章函数、第 2 章函数极限与连续、第 3 章导数与微分、第 4 章导数的应用、第 5 章积分、第 6 章定积分的应用、第 7 章微分方程及其应用、第 8 章无穷级数、第 9 章多元函数微分学、第 10 章多重积分、第 11 章曲线积分与曲面

积分．

针对应用型专业学生的特点，本书在写作上尽量做到直观地阐述微积分中的基本概念，尽量结合实际问题给出基本概念和基本运算的例子，同时也为学生运用微积分的基本知识进行数学建模给出范例．考虑到微积分基本知识点对理工科或经济管理学科来说都是相同的，只是在应用举例上侧重点不同．因此，在编写本书时不分理工或经济管理，而是统一起来写，在举例中既有理工类的例子，也有经济管理类的例子，这样，可以让学理工的学生了解点微积分在经济学中的应用，让学经济管理的学生看点微积分在自然科学中的应用，应该说，是很有好处的．

本书预设的讲授学时数为 180，对于 144 学时的课程安排除“*”号的内容外，对最后 4 章的内容可适当删减；对于 108 学时的课程安排，建议只上前 6 章及第 7 章的基本内容部分．总之，教师可根据需要来选取知识点和例题进行讲授．

本书没分上、下册的原因是：它是为理工科应用型专业和经济管理类专业的学生而编写，各专业对微积分学的内容要求不同，所需要的教学学时也不同，因此，很难统一把教材分为上、下册而界定第一学期用上册，第二学期用下册．教师可根据各专业的需求和学生对内容的接受能力选取适当的进度．

教学工作是一项创造性的劳动，其目的是通过教师的教学让学生掌握该课程的知识点，更重要的是通过教师的教学示范和学生对知识点的学习，引导学生学会自主学习的方法，从而提高分析问题和解决问题的能力．具体来说，学生通过高等数学这门课程的学习，不但能够掌握微积分的基本知识，更重要的是能够应用微积分的知识对遇到的实际问题进行正确的数学建模并得到解决问题的方法和结果．

本书由杨孔庆教授总体负责，提出教材编写的思想和方案，并对书稿的内容进行修改和讨论．具体编写工作安排是：刘东利和郃亚丽老师编写第 1 章、第 2 章；肖世校和张保灿老师编写第 3 章、第 4 章；曾艳秋和刘小燕老师编写第 5 章、第 6 章；李丽、刘竞坤和李毅轩老师编写第 7 章；邱秀亮和舒明春老师编写第 8 章；江晓露、潘蕴静、朱丽容和胡牡华老师编写第 9 章、第 10 章、第 11 章．

两年多来，老师们在承担繁重的教学任务的同时，辛勤地进行本书的编写工作，经过反复讨论，几易书稿，于 2012 年年末完成这一稿．由于编写者的水平有限，书中仍有很多值得讨论和推敲的地方，借此抛砖引玉，希望各位老师提出宝贵意见．

编　者

目　　录

第 1 章

函　数

函数是数学中最基本的概念之一，它描述了变量之间的某种依赖关系．例如，给定圆的半径 r，圆的面积 S 就确定了，因此，圆的面积 S 是半径 r 的函数．它们之间的函数依赖关系可用公式 $S=\pi r^2$ 表示．

函数是高等数学中最先遇见的基本概念．本章研究各类函数的基本概念、性质和性态．

1.1　函数的概念及其表示法

函数的概念在现实生活中有很多实例，如，你每个月电话费用 C 是多少取决于打电话的时间 t，这样，可称 C 为因变量，t 为自变量．

再看两个例子．

例 1.1.1　下面是中国人口数量的一些统计数据（来自国家统计局）：

表 1.1.1

年　份	1908	1933	1953	1964	1982	1990	2000
人口/亿	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.95

对任何年份 $t\in\{1908, 1933, 1953, 1964, 1982, 1990, 2000\}$，由表 1.1.1 所示的对应规则可知，有唯一的人口数据与之对应，所以表 1.1.1 给出了人口与年份的函数关系．

例 1.1.2　设某公司每天生产 x 件产品的总成本 $y=C(x)=2x+3(x\geqslant 0)$（单位：元），如图 1.1.1 所示，对于 x 的每个值，$y=C(x)$ 都有唯一确定的值和它对应．

函数的定义如下：

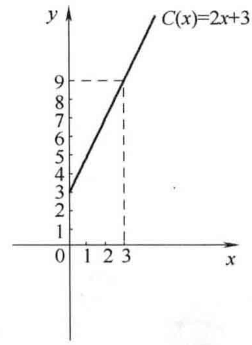

图 1.1.1

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量，若对于 x 的每一个取值，按照某一对应规则 f，都有唯一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$，这时称 x 为自变量，y 为因变量，自变量 x 的所有取值的集合称为**函数的定义域**，记为 D．因变量 y 相应值的集合称为**函数的值域**，记为 $R(f)$．这里 D 与 $R(f)$ 都是数集，且

$$R(f)=\{f(x)\mid x\in D\}$$

数学上常把函数 $y=f(x)$ 简记为 f.

数值 $f(x_0)$ 称为函数 f 在 x_0 处的值，即函数值，记为 $y|_{x=x_0}$.

本课程所研究的函数的定义域 D 和值域 $R(f)$ 都为实数域，这样的函数称为实函数．我们所研究的函数都是实函数．

可以看到，例 1.1.1 中人口数量就是年份 t 的函数，但这种函数关系式不能用明确的解析式表达出来；例 1.1.2 中成本 C 是产量 x 的函数，它有明确的解析表达式．

函数的两要素是定义域和对应法则 f.

例如，$y=2x^2+1$ 与 $x=2y^2+1$，它们的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，且对于 $\mathbf{R}$ 中的任何实数 a，通过对应法则，两个函数都有相同的实数 $2a^2+1$ 与之对应．因此，它们是相同的函数，只不过第一个函数是以 x 为自变量，而第二个函数是以 y 为自变量．但通常我们习惯以 x 为自变量，用 x 轴表示，而以 y 为因变量，用 y 轴表示；而 $y=2x+1$ 与 $y=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 不是同一个函数，因为定义域不同，第一个函数的定义域是 x 轴，而第二个函数在点 $x=\dfrac{1}{2}$ 没定义，其定义域是除去该点的 x 轴(但如果我们将第二个函数在点 $x=\dfrac{1}{2}$ 的值定义为 $y=2$，则这两个函数为同一个函数)；函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ 也不是同一函数，因为它们虽然定义域相同，但对应法则不同．

例 1.1.3 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+\ln x}$ 的定义域．

解 函数的定义域是下面不等式组的解，即

$$\begin{cases}1+\ln x\geqslant 0\\ 1-x^2\neq 0\end{cases}$$

因此，函数定义域 $D(f)=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}\text{ 且 }x\neq 1\right\}$，即 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)\cup(1,+\infty)$.

函数可用三种不同的方法表示：表格法、图像法及公式法(分别见例 1.1.1、例 1.1.2 及例 1.1.3)．公式法即有解析表达式．

实际上，根据研究问题的需要，由某一种方法表示的函数也可以用另一种方法来表示．比如，由表格法所给出的函数，经常可以根据需要，利用计算机拟合的方法得到与所研究问题相对应的解析表达式．

例 1.1.4 画出下列函数的图形：

(1) 绝对值函数 $y=|x|$；

(2) 符号函数 $y = \operatorname{sgn}x$.

解　(1) 绝对值函数为

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

其图形如图 1.1.2 所示.

(2) 符号函数为

$$y = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

其图形如图 1.1.3 所示.

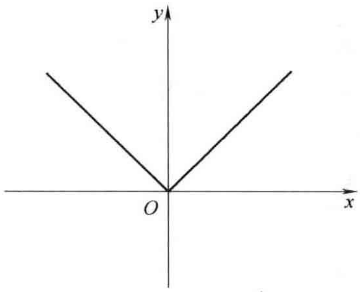

图 1.1.2

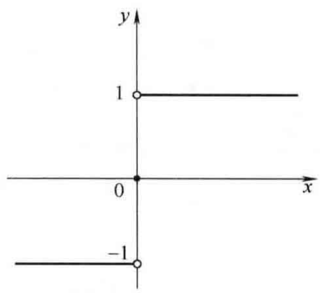

图 1.1.3

例 1.1.4 中的两个函数有一个共同特点，就是在函数定义域的不同部分，函数用不同的表达式表示，这种函数称为**分段函数**.

当然，由图形或表格表示的函数有些可用公式表示，有些则只能用近似公式表示．这种转换的目的在于进一步了解由图形或表格表示的函数的内在规律(用计算机进行拟合的模拟，就是要达到此目的)，同时也可用于近期预测.

例 1.1.5　某工厂生产某种零件，每个零件的出厂价定为 60 元，该工厂为鼓励销售商订货，决定当一次订购量超过 100 个时，每多订一个，订购的全部零件出厂单价均降低 0.01 元，但实际出厂单价不可低于 42 元，请将实际出厂单价 p 表示为一次订购量 x 的函数.

解　设当一次订购量超过 100 个，多订购 x_0 个时，单价为 42 元，则由 $60 - 0.01x_0 = 42$ 得 $x_0 = 1800$，故当订购量是 x 个时，实际出厂单价为

$$p(x) = \begin{cases} 60, & 0 \leqslant x < 100 \\ 60 - 0.01(x - 100), & 100 \leqslant x < 1900 \\ 42, & x \geqslant 1900 \end{cases}$$

1.2　复合函数与反函数

1.2.1　复合函数

先看一个例子：

例 1.2.1 设 $y = \ln u$，$u = 1 + 2x^2$，由对数函数的定义域可知，$u > 0$，显然，$u = 1 + 2x^2 \geqslant 1 > 0$，所以在 $y = \ln u$ 的定义域中，可用 $1 + 2x^2$ 代替 $y = \ln u$ 中的 u，得 $y = \ln(1 + 2x^2)$，从而 $y = \ln(1 + 2x^2)$ 是由 $y = \ln u$ 与 $u = 1 + 2x^2$ 复合而成的函数.

我们给出复合函数的定义：

定义 1.2.1 设 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 是两个已知函数，如果 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空，则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数. 此时称 y 为因变量，x 为自变量，u 为中间变量. $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数也可记为 $(f \circ \varphi)(x)$，即 $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$.

由定义知，不是任意两个函数都可以复合，例如，$y = \sqrt{u - 2}$ 与 $u = \sin x$ 就不能复合(请思考这是为什么?).

例 1.2.2 设 $y = f(u) = \sqrt{u}$，$u \in [0, +\infty)$，$u = \varphi(x) = a^2 - x^2$，$x \in [-a, a]$，$a > 0$，求复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 及其定义域.

解 复合函数 $y = f(\varphi(x)) = \sqrt{a^2 - x^2}\,(|x| \leqslant a)$.

例 1.2.3 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = e^x - 2$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$.

解

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & x < \ln 2 \\ 2 - e^x, & x \geqslant \ln 2 \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} e - 2, & x < 0 \\ e^{-x} - 2, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2.2 反函数

定义 1.2.2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $R(f)$. 若对于任意 $y \in R(f)$，只有唯一满足 $y = f(x)$ 的 x 与之对应，则这一对应关系确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x = \varphi(y)$，称这个函数为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记为 $x = f^{-1}(y)$.

例如，函数 $y = f(x) = x^3$ 的反函数为 $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$.

由于函数与其变量用什么字母无关，因此，习惯上我们总用 x 表示自变量，y 表示因变量. 所以，$y = f(x)$ 的反函数常表示为 $y = f^{-1}(x)$. 从而，$y = x^3$ 的反函数为 $y = x^{\frac{1}{3}}$. 如果将 $f^{1}(x)$ 的图形与 $f(x)$ 的图形画在同一个坐标系中，则它们关于直线 $y = x$ 对称. 容易知道，$y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图形与 $y = x^3$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称（见图 1.2.1).

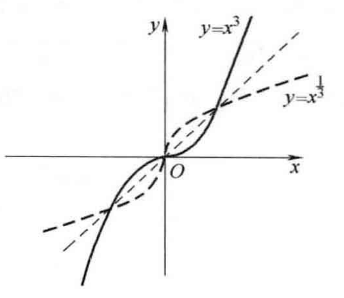

图 1.2.1

可以验证，单调函数(见下节)一定有反函数，而且，反函数与原来的函数单调性相同. 当然，并非所有函数都有反函数，只有在单调区间上的函数才有反函数. 如 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$上单调减少，所以有反函数 $y = \arccos x$.

1.3　函数的几种特性

1.3.1　函数的单调性

定义 1.3.1　设函数 f 在区间 I 上有定义，且 $\forall x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时总有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 f 是**区间 I 上的单调增加（或单调减少）函数**．单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**．

若函数 f 在某个区间上为单调函数，则称该区间为其**单调区间**．例如，$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，所以 $(-\infty, 0)$ 是 $y = x^2$ 的减区间；$[0, \pi]$ 为函数 $y = \cos x$ 的单调减少区间，$[-\pi, 0]$ 为其单调增加区间（见图 1.3.1）.

1.3.2　函数的奇偶性

定义 1.3.2　设函数 f 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意的 $x \in D$ 总有

(1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是偶函数；

(2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

例如，函数 $y = 2x^2 + 1$，$y = \cos 5x$ 都是偶函数，$y = x^5$，$y = \tan x$ 都是奇函数.

由定义可知，偶函数的图形关于 y 轴对称（见图 1.3.1），奇函数的图形关于坐标原点对称(如图 1.3.2).

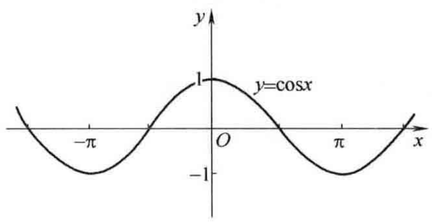

图 1.3.1

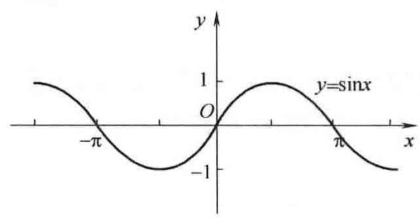

图 1.3.2

例 1.3.1　讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = x\tan x + \sin 2x^2$；(2) $g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$；(3) $h(x) = \begin{cases} 1 + x, & x > 0, \\ 1 - x, & x \leqslant 0. \end{cases}$

解　(1) 因为 $f(-x) = (-x)\tan(-x) + \sin 2(-x)^2 = f(x)$，因此，$f(x)$ 是偶函数.

(2) $g(-x) = \ln(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \ln \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -g(x)$

因此 $g(x)$ 是奇函数.

(3) 因为

$h(-x) = \begin{cases} 1 - x, & -x > 0, \\ 1 + x, & -x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x, & x < 0, \\ 1 + x, & x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 + x, & x > 0, \\ 1 - x, & x \leqslant 0 \end{cases} = h(x)$ 因此，$h(x)$ 是偶函数.

1.3.3 函数的有界性

定义 1.3.3 设 $f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数,

(1) 若 $\exists M$, $\forall x \in D \Rightarrow f(x) < M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有上界;

(2) 若 $\exists N$, $\forall x \in D \Rightarrow f(x) > N$, 则称 $f(x)$ 在 D 上有下界, 如果 $f(x)$ 既有上界又有下界, 则称函数 f 在 D 上**有界**, 即 f 是 D 上的**有界函数**. 若函数在 D 上不满足有界的定义, 则称 f 在 D 上**无界**, 或称 f 是 D 上的**无界函数**.

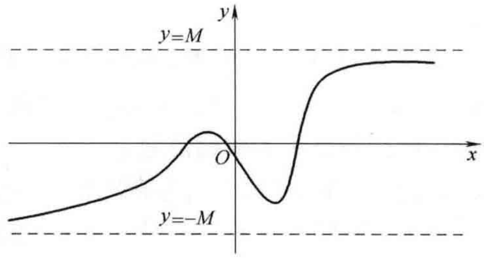

图 1.3.3

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arctan x$ 等都是其定义域上的有界函数. $y = x$, $y = x^2$, $y = 1/x$ 等都是其定义域上的无界函数.

显然, 有界函数 f 的图形介于两条平行线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间 (见图 1.3.3).

1.3.4 函数的周期性

定义 1.3.4 设函数 f 的定义域为 D, 若存在不为零的数 T, 使得对于任一 $x \in D$, $(x + T) \in D$, 有 $f(x + T) = f(x)$, 则称 f 是**周期函数**, T 称为函数 f 的**周期**.

由定义容易得出, 若 T 为 f 的周期, 则 $\pm T$, $\pm 2T$, $\cdots$, $\pm nT$ 等都是 f 的周期. 如果在周期中存在最小的正值, 我们把它称为**最小正周期**, 通常我们说周期函数的周期均是指最小正周期.

例如, $\tan x$, $\cot x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$ 都是以 π 为周期的函数, $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数. 周期函数的图形在相邻两个长度为 T 的区间上形状是完全相同的.

1.4 初等函数及其性质

下面介绍几类常见的简单函数.

1.4.1 幂函数

形如 $y = x^a$ (a 为常数, 且 $a \neq 0$) 的函数称为幂函数.

若 a 值不一样, 幂函数的定义域和值域也不一样. 当 $x > 0$ 时, 若 $a > 0$, 则 $y = x^a$ 单调增加 (见图 1.4.1), 此时函数过点 $(0, 0)$; 若 $a < 0$, 则 $y = x^a$ 单调递减 (见图 1.4.2 和图 1.4.3), 此时函数在点 $x = 0$ 处无定义. 可以看出, $y = x^a$ (a 是偶数) 的图像关于 y 轴对称, 此类函数为偶函数; 而 $y = x^a$ (a 是奇数) 的图像关于原点对称, 此类函数为奇函数.

1.4.2 指数函数

形如 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的函数称为指数函数.

显然, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $(0, +\infty)$.

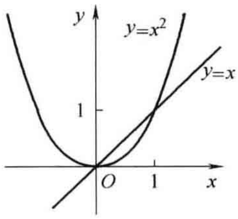

图 1.4.1

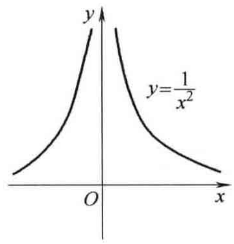

图 1.4.2

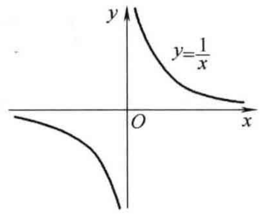

图 1.4.3

指数函数的单调性依赖于 a 的取值，如果 $a>1$，则函数 $y=a^x$ 单调增加；如果 $0<a<1$，则函数 $y=a^x$ 单调递减（见图 1.4.4）. 特别地，以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 很常见，具有广泛的应用 .

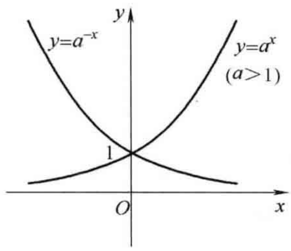

图 1.4.4

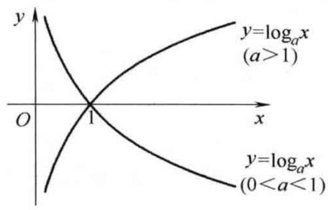

图 1.4.5

1.4.3　对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$ 的函数称为对数函数，此函数的定义域为 $(0,\ +\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$.

对数函数是指数函数的反函数；其图形均在 y 轴右方且经过点 $(1,\ 0)$；对数函数的单调性也依赖于 a 的取值 . 当 $a>1$ 时，单调增加；当 $0<a<1$ 时，单调减少（见图 1.4.5）.

特别地，底数为 e 的对数函数称为自然对数函数，记为 $y=\ln x$，它是指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的反函数，同样具有广泛的应用 .

1.4.4　三角函数

（1）正弦函数 $y=\sin x$　定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,\ 1]$，是以 2π 为周期的奇函数 . 图像如图 1.3.2 所示 .

（2）余弦函数 $y=\cos x$　定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,\ 1]$，是以 2π 为周期的偶函数 . 图像如图 1.3.1 所示 .

（3）正切函数 $y=\tan x$　定义域为 $\left\{x \middle| x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，正切函数是无界函数，是以 π 为周期的奇函数，其图形如下（见图 1.4.6）.

（4）余切函数 $y=\cot x$　定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，余切函数是无界函数，也是以 π 为周期的奇函数，其图形如图 1.4.7 所示 .

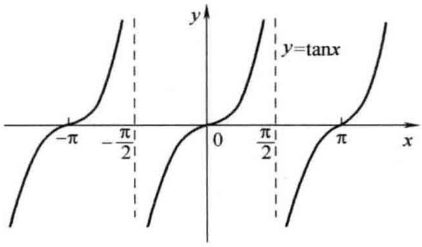

图 1.4.6

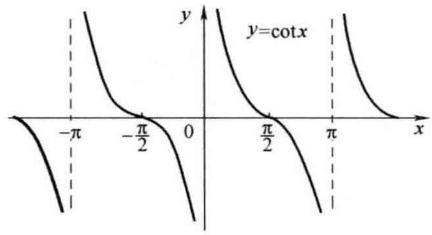

图 1.4.7

还有其他三角函数，如正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$ 等.

1.4.5 反三角函数

（1）反正弦函数 $y = \arcsin x$ $y = \arcsin x$ 是 $y = \sin x$ $\left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数. 显然，其定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，图像如图 1.4.8 所示.

（2）反余弦函数 $y = \arccos x$ $y = \arccos x$ 是 $y = \cos x$ $(x \in [0, \pi])$ 的反函数. 显然，其定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，图像如图 1.4.9 所示.

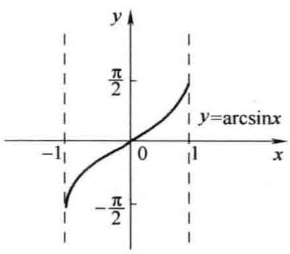

图 1.4.8

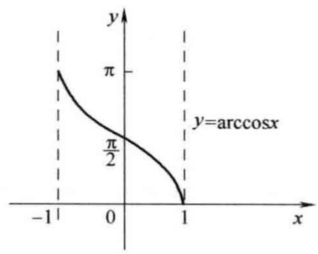

图 1.4.9

（3）反正切函数 $y = \arctan x$ $y = \arctan x$ 是 $y = \tan x$ $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的反函数. 显然，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，图像如图 1.4.10 所示.

（4）反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ $y = \operatorname{arccot} x$ 是 $y = \cot x$ $(x \in (0, \pi))$ 的反函数. 显然，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0, \pi)$，图像如图 1.4.11 所示.

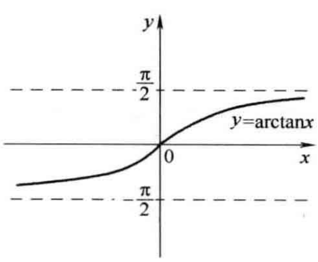

图 1.4.10

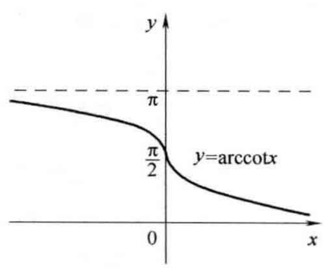

图 1.4.11

类似地，可以定义其他反三角函数如反正割函数 $y=\operatorname{arcsec}x$ 和反余割函数 $y=\operatorname{arccsc}x$ 等.

常数函数(即函数值为一恒定常数)、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 这些函数的表达式、定义域、主要性质以及它们图形的特点都很重要，读者要牢固掌握.

高等数学中所涉及的函数有时不仅仅是上述几个简单的函数，可能要复杂一些.

定义 1.4.1 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数(在定义域上可以用一个解析式表示的)称为**初等函数**.

例如，下列函数都是初等函数：

$$y=(x+3)\arctan(1-\sin x^2),\ y=\left(\sqrt{\frac{\arctan(e^{x^2})}{x^2-2x+5}}+\sin x\right)^2 \text{等}.$$

一般来说，分段函数不是初等函数. 因为在其定义域上不能用一个解析式表示. 但是，$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 是初等函数，因为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 是由两个幂函数复合而成、且可用一个解析式表示的函数.

例 1.4.1 试将函数 $y=(\ln\sin e^{x^2})^2$ 分解为几个简单函数的复合.

解 函数 $y=(\ln\sin e^{x^2})^2$ 可分解为以下几个基本初等函数：$y=u^2$，$u=\ln v$，$v=\sin\omega$，$\omega=e^{\theta}$，$\theta=x^2$.

值得注意的是:微积分学中所涉及的函数，绝大多数都是初等函数. 因此，掌握初等函数的特性和各种运算是非常重要的.

习题

1.1 判断下列函数是否是相同的函数，并说明原因.

(1) $f(x)=\ln(2x)^6$ 和 $f(x)=6\ln(2x)$

(2) $f(x)=\sqrt[4]{x^4}$ 和 $f(x)=|x|$

(3) $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 和 $f(x)=x$

(4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$ 和 $f(x)=x^2$

(5) $f(x)=\sec^2x-1$ 和 $f(x)=\tan^2x$

(6) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 和 $f(x)=1$

1.2 设 $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$，求 $f(x^2+1)$，$f(-x^2-1)$，$f(3.1)$，$f(0)$ 和 $f(-3.1)$.

1.3 求下列函数的定义域与值域.

(1) $f(x)=|\cos x|$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ \arcsin x, & x<0\end{cases}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}+\arccos(x-4)+\sqrt{x^2-1}$；

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & x<1\\ x+1, & |x|\geqslant 1\end{cases}$

1.4 作出下列函数的图像.

(1) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$