概率论与数理统计

同步辅导

主编 张天德 叶宏
主审 吴臻

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

概率论与数理统计

同步辅导

主　编　张天德　叶　宏
副主编　陈建良
主　审　吴　臻

山东科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

概率论与数理统计同步辅导 / 张天德，叶宏主编.
— 济南 ：山东科学技术出版社，2012
ISBN 978-7-5331-5691-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… ②叶… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第195869号

概率论与数理统计同步辅导

主编 张天德 叶宏

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002 电话：(0531)82098071

印刷者：东港股份有限公司
地址：济南市山大北路 23 号
邮编：250100 电话：(0531)82672686

开本：720 mm × 1020 mm 1/16
印张：20.5
版次：2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5691-6
定价：29.00元

前 言 QIANYAN

概率论与数理统计是理工类专业的一门重要基础课，也是硕士研究生入学考试的重点科目。浙江大学编写的《概率论与数理统计》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，最新的第四版内容更加全面。为帮助读者学好概率论与数理统计，我们编写了《概率论与数理统计同步辅导》，该书与浙江大学主编的《概率论与数理统计》(第四版)配套，它汇集了编者几十年的丰富经验，将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中，本书将会成为读者学习《概率论与数理统计》的良师益友。

该书章节的划分和内容设置与浙江大学的《概率论与数理统计》(第四版)完全一致。每节内容由两部分组成：一、主要内容归纳；二、经典例题解析及解题方法总结。每章最后还有两部分内容：本章习题解答及自测题与参考答案。

主要内容归纳：该部分对每节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，并对较易出错的地方作了适当的解析。

经典例题解析及解题方法总结：列举每节不同难度、不同类型的重点题目，给出详细解答，以帮助读者理清解(证)题思路，掌握基本解(证)题方法和技巧；解题前的分析和解题后的方法总结，可以使读者收到举一反三，融会贯通之功效。

习题解答：每章后都给出了与教材内容同步的习题解答，利用它读者可自行检查学习效果。

自测题：每章后的自测题是编者从多年教学及考研辅导中精心挑选的典型题目。目的是在读者对各章内容有了全面了解之后，给读者一个检测、巩固所学知识的机会，从而使读者对各种题型有更深刻的理解，并进一步掌握所学知识点，做到能灵活运用。

本书由山东大学张天德、叶宏主编，陈建良副主编，山东大学吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。

由于编者水平有限，不足之处敬请读者批评指正，以便不断完善。

编　者

2011.10

目　录 MULU

第一章 概率论的基本概念

第一节 随机试验

一、主要内容归纳

1. 随机现象 在个别试验中其结果呈现不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为随机现象.

2. 统计规律性 在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，称为统计规律性.

3. 随机试验 在概率论中将具备下列三个条件的试验称为随机试验，简称试验：

(1)在相同条件下可重复进行；

(2)每次试验的结果具有多种可能性；

(3)在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果，但是所有结果明确可知.

第二节 样本空间、随机事件

一、主要内容归纳

1. 样本空间 随机试验的所有可能结果构成的集合，常用 Ω 表示.

2. 随机事件 随机试验的每一种可能的结果称为随机事件，常用 A,B,C,D 表示.

(1)基本事件 不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件.

(2)必然事件 每次试验中一定发生的事件，常用 Ω 表示.

(3)不可能事件 每次试验中一定不发生的事件，常用 $\varnothing$ 表示.

3. 事件的关系及其运算

(1)包含 A 发生必然导致 B 发生，则称 B 包含 A(或 A 包含于 B)，记为 $B\supset A$(或 $A\subset B$).

(2)相等 若 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

(3)事件的和 A 与 B 至少有一个发生，称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$.

(4)事件的积 A 与 B 同时发生，称为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$(或 AB).

(5)事件的差 A 发生而 B 不发生，称为 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$.

(6)互斥事件　在试验中,若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称 A、B 为互斥事件.

(7)对立事件　在每次试验中,"事件 A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件常记为 $\overline{A}$.

4. 事件的运算律

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$.

(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3)分配律　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$, $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4)摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 一批产品中含有正品与次品,从中依次取三件,设 A_i="第 i 件为正品"$(i=1,2,3)$,则

(1)事件"三件都是正品"可表示为 $A_1A_2A_3$.

(2)事件"三件都不是正品"可表示为 $\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ \overline{A}_3$　或　$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$.

(3)事件"三件不都是正品"可表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$　或　$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$.

(4)事件"三件中恰有一件是正品"可表示为 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\ A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3$.

(5)事件"三件中至少有一件是正品"可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$　或　$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\ A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\ \overline{A}_2\ A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\ A_3\cup\overline{A}_1\ A_2\ A_3\cup A_1A_2A_3$.

(6)事件"三件中至少有两件是正品"可表示为 $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$　或　$A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\ A_3\cup\overline{A}_1\ A_2\ A_3\cup A_1A_2A_3$.

方法总结:

任意一个随机事件均可以表示为一个或几个与其等价的形式. 在概率的计算中,可以根据条件的不同而选用不同的等价形式,大家在做关于随机事件的关系及运算的题目时,应该注意下面几个结论的应用:

(1) $A=AB+A\,\overline{B}$, AB 与 $A\,\overline{B}$ 互不相容;

(2)当 A,B 互不相容时, $A-B=A$; $AB=\varnothing$; $(A+B)-B=A$;

(3)当 $B\subset A$ 时, $A+B=A$; $AB=B$; $(A-B)+B=A$;

(4) $A-B=A-AB=A\,\overline{B}$.

【例 2】 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电. 以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于(　　).

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解　$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$ 表示四个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$ 表示至少三个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$表示至少二个温控器显示温度均不低于 t_0

$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$表示至少一个温控器显示温度均不低于 t_0

故应选(C).

【例 3】 指出下面式子中事件之间的关系：

(1)$AB=A$；　(2)$A\cup B=A$；　(3)$ABC=A$；　(4)$A\cup B\cup C=A$.

解　(1)表明 A 包含于 B，即 $A\subset B$；　(2)表明 B 包含于 A，即 $B\subset A$；

(3)表明 A 包含于 BC，即 $A\subset BC$；　(4)表明 $B\cup C$ 包含于 A，即 $B\cup C\subset A$.

【例 4】 设 A 和 B 是任意两个随机事件，则与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).(**考研题**)

(A)$A\subset B$　(B)$\overline{B}\subset\overline{A}$　(C)$A\overline{B}=\varnothing$　(D)$\overline{A}B=\varnothing$

解　根据题干的信息，$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A\overline{B}=\varnothing$

所以选项(D)不正确.

【例 5】 设任意两个随机事件 A 和 B 满足条件 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则(　　).

(A)$A\cup B=\varnothing$　(B)$A\cup B=\Omega$　(C)$A\cup B=A$　(D)$A\cup B=B$

解法一　排除法.

注意到 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，那么 A,B 的地位是"对等"的，从而(C)，(D)均不成立.(A)不正确是显然的.故(B)正确.

解法二　直接法.

运用摩根律，$AB=\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，那么

$$A\cup B=(A\cup B)\cup AB=(A\cup B)\cup\overline{A\cup B}=\Omega.$$

故应选(B).

方法总结：

对于较复杂的事件运算，除了熟练运用定义及运算规律判断，还可采用集合论中的文氏图帮助分析和理解.

第三节　频率与概率

一、主要内容归纳

1. 概率的统计定义　在相同的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动.且一般说来，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

2. 概率的公理化定义　设 Ω 是一样本空间，称满足下列三条公理的集函数 $P(\cdot)$为定义在 Ω 上的概率：

(1)非负性　对任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性　$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性　若两两互不相容的事件列$\{A_n\}$是可列的,则 $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

3.概率的性质

(1)对任何事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2)$P(\Omega)=1$,$P(\varnothing)=0$

(3)设 A 为任一随机事件,则 $P(\overline{A})=1-P(A)$

(4)设 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

(5)设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(6)设 A,B 为任意两个随机事件,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

上式还能推广到多个事件的情况.例如,设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\end{aligned}$$

一般,对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是(　).

(A)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容

(B)$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C)$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

(D)$P(A-B)=P(A)$

解　根据题意,A 和 B 是任意两个不相容事件,$AB=\varnothing$,从而 $P(AB)=0$.又 $A=(A-B)\cup(AB)$,且$(A-B)\cap(AB)=\varnothing$,故 $P(A)=P(A-B)+P(AB)=P(A-B)$.所以(D)项一定成立.

另外,由于 $P(A)\neq 0$,$P(B)\neq 0$,(C)项不可能成立.

值得注意的是(A)项和(B)项,有读者可能认为(A)项与(B)项是互逆的,总有一个是正确的.实际上,若 $AB=\varnothing$,$A\cup B\neq\Omega$ 时,(A)不成立;

$AB=\varnothing$且 $A\cup B=\Omega$ 时,(B)项不成立.

故应选(D).

【例 2】 设 A,B 是任意两个随机事件,则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$______.

解　注意到

$$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})=A(\overline{A}+\overline{B})+B(\overline{A}+\overline{B})=A\,\overline{B}+\overline{A}\,B$$
$$(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=\overline{A}(A+\overline{B})+B(A+\overline{B})=\overline{A}\,\overline{B}+AB$$

那么

$$(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=(A\,\overline{B}+\overline{A}\,B)(\overline{A}\,\overline{B}+AB)=\varnothing$$

则

$$P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=P(\varnothing)=0.$$

【例 3】已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则事件 A,B,C 全不发生的概率为______.

分析 应用摩根律，加法法则，对立事件的概念.

解 因为 $P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$.

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+0\right)=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

【例 4】设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

解 由题意"当 A,B 发生时，C 必然发生"从而 $AB\subset C$，所以 $P(AB)\leqslant P(C)$，那么

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$$

故应选(B)

方法总结：

此题考查概率"单调性"，即若 $A\subset B$ 是两个随机事件，则

$$0\leqslant P(A)\leqslant P(B)\leqslant 1$$

事实上，因为 $A\subset B$，所以 $B-A$ 与 A 互不相容，并且满足 $B=(B-A)+A$，由概率的非负性和加法公式得

$$P(B)=P(B-A)+P(A)$$

从而 $0\leqslant P(A)\leqslant P(B)$.

【例 5】设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3，0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______.

解 因为 $A\overline{B}=A(\Omega-B)=A-AB$，

所以 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A\cup B)-P(B)$

$$=0.6-0.3=0.3$$

方法总结：

充分运用减法公式的各种变形. 特别注意以下方法在解决此类问题中的应用.

设 A,B 是任意两个随机事件，$A-B=A-AB=A(\Omega-B)=A\overline{B}$. 事实上，这是一个很容易理解的变形，不妨按下列方式理解：$A-B$ 表示事件"A 发生 B 不发生"，$A-AB$ 表示"在 A 发生的事件中除掉 AB 一起发生的事件"，$A\overline{B}$ 表示事件"A 发生 B 不发生"，很明显这三个事件是一样的.

【例 6】在某城市中发行三种报纸 A、B、C，经调查，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 及 B 报的有 10%，同时订阅 A 及 C 报的有 8%，同时订阅

B 及 C 报的有 5%，同时订阅 A、B、C 报的有 3%. 试求下列事件的概率：

(1)只订 A 报的；(2)只订 A 及 B 报的；(3)只订一种报纸的；(4)恰好订两种报纸的；(5)至少订阅一种报纸的；(6)不订阅任何报纸的；(7)至多订阅一种报纸的.

解 (1)$P(A\overline{B}\,\overline{C})=P(A-B-C)=P(A-(B\cup C))=P(A-A(B\cup C))$

$$=P(A)-P(A(B\cup C))=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=0.45-0.1-0.08+0.03=0.30$$

(2)$P(AB\overline{C})=P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)$

$$=0.10-0.03=0.07$$

(3) $P(A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$

$$=0.30+P(B-B(A\cup C))+P(C-C(A\cup B))$$

$$=0.30+P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)+P(C)-P(CA)-P(CB)+P(ABC)$$

$$=0.30+0.35-0.10-0.05+0.03+0.30-0.08-0.05+0.03=0.73$$

(4) $P(AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$

$$=P(AB)-P(ABC)+P(AC)-P(ABC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)$$

$$=0.10+0.08+0.05-3\times0.03=0.14$$

(5)$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=0.90$$

(6)$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10$

(7)$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$

$$=0.10+0.73=0.83.$$

第四节　等可能概型(古典概型)

一、主要内容归纳

1. 古典概型　具有下列两个特点的试验称为古典概型.

(1)每次试验只有有限种可能的试验结果；

(2)每次试验中，各基本事件出现的可能性完全相同.

对于古典概型，事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}=\frac{m}{n}.$$

2. 几何概型　如果随机试验的样本空间是一个区域(例如直线上的区间、平面或空间中的区域)，而且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度(长度、面积、体积)}}{\text{样本空间的测度(长度、面积、体积)}}$$

二、经典例题解析及解题方法总结

【例 1】 有 n 个人，每人都有同等的机会被分配到 $N(n\leqslant N)$ 间房中的任一间去，试求下列各事件的概率.

(1)A=“某指定的 n 间房中各有一人”；

(2)B=“恰有 n 间房各有一人”；

(3)C=“某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人”.

解 (1)基本事件总数为 N^n. 将 n 个人分到某指定的 n 间房中，相当于 n 个元素的全排列，所以事件 A 包含的基本事件数为 $n!$，故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2)n 间房中各有 1 人是指任意的 n 间房中各有 1 人，这共有 C_N^n 种情况，所以事件 B 包含的基本事件数为 $C_N^n n!$，故

$$P(B)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}$$

(3)从 n 个人中选 m 个分配到指定的一间房中，有 C_n^m 种选法；而其余的 $n-m$ 个人分到其余 $N-1$ 间房，有 $(N-1)^{n-m}$ 种方法，所以事件 C 包含的基本事件数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$，故

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}$$

这实际上是第二章将要介绍的二项分布的特殊情形.

方法总结：

本题是典型的“分房问题”，该模型应用较为广泛，例如“n 个人($n<365$)生日全不同”的概率就相当于本题(2)，其概率为 $\dfrac{C_{365}^n\cdot n!}{365^n}$.

【例 2】 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数. 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解 一枚骰子掷两次，其基本事件总数为 36. 令 $A_i(i=1,2)$ 分别表示“方程有实根”和“方程有重根”，则

$$A_1=\{B^2-4C\geqslant 0\}=\left\{C\leqslant\frac{B^2}{4}\right\},\qquad A_2=\{B^2-4C=0\}=\left\{C=\frac{B^2}{4}\right\}$$

注意到表 1－1.

表 1－1

B	1	2	3	4	5	6
A_1 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
A_2 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

由此易知 A_1 的基本事件个数为

$$0+1+2+4+6+6=19$$

则由古典型概率计算公式得

$$p=P(A_1)=\frac{19}{36}$$

A_2 的基本事件个数为

$$0+1+0+1+0+0=2$$

由古典型概率计算公式得

$$q=P(A_2)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

方法总结：

计算古典型概率 $P(A)$ 的关键是找出 A 中的基本事件数，在计算过程中常常用到排列组合的知识，如例 1. 有时也需要用列举法逐一分析 A 中的基本事件，如例 2.

【例 3】设一个袋中装有 a 个黑球，b 个白球，现将球随机地一个个摸出，问第 k 次摸出黑球的概率是多少？$(1\leqslant k\leqslant a+b)$

解法一　令 A 表示事件“第 k 次摸到黑球”.

将这 $a+b$ 个球编号，并将球依摸出的先后次序排队，易知基本事件总数为 $(a+b)!$. 事件 A 等价于在第 k 个位置上放一个黑球，在其余 $a+b-1$ 个位置上放余下的 $(a+b-1)$ 个球，则 A 包含的基本事件数为 $a(a+b-1)!$. 那么所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法二　本题也可以只考虑前 k 个位置，则 $P(A)=\dfrac{C_a^1\cdot P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^{k}}=\dfrac{a}{a+b}$

方法总结：

本题可视为“抽签理论”模型，即抽到黑球的概率与抽取顺序无关，该结论可应用于许多实际问题中.

【例 4】一部五卷的文集，按任意次序排放到书架上，试求下列概率：

(1) 第一卷出现在两边；

(2) 第一卷及第五卷出现在两边；

(3) 第一卷或第五卷出现在两边；

(4) 第一卷或第五卷不出现在两边.

解　(1)记 A 为“第一卷出现在两边”，则 A 中样本点数为 2，

故 $P(A)=\dfrac{2}{5}$.

(2)记 B 为“第一卷及第五卷出现在两边”，则 B 中样本点数为 2，而(2)，(3)，(4)中样本空间中所含样本点数都为 $5\cdot 4=20$，

故 $P(B)=\dfrac{1}{10}$.

(3)记 C 为“第一卷或第五卷出现在两边”，则 C 中样本点数为 $2\cdot 4+2\cdot 4-2=14$，

故 $P(C)=\frac{7}{10}$.

(4)记 D 为"第一卷或第五卷不出现在两边",则 D 中样本点数为 $3\cdot4+3\cdot4-3\cdot2=18$,故 $P(D)=\frac{9}{10}$.

方法总结:

古典概率公式是求概率的方法之一,解题时可以结合其他方法,如概率性质公式等.例如本题中的第(3)问:设 A_1 为第一卷出现在两边,A_2 为第五卷出现在两边,则

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}.$$

例如本题第(4)问,可以利用 B 与 D 的互逆性,$P(D)=1-P(B)=\frac{9}{10}$.

【例 5】 有一根长 l 的木棒,任意折成三段,恰好能构成一个三角形的概率为______.

解 设折得的三段长度为 x,y 和 $l-x-y$,那么,样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant y\leqslant l,0\leqslant x+y\leqslant l\}$,而随机事件 A:"三段构成三角形"相应的子区域 G 应满足"两边之和大于第三边"的原则,从而

$$\begin{cases} l-x-y<x+y \\ x<(l-x-y)+y \\ y<(l-x-y)+x \end{cases}$$

即 $G=\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{l}{2},0<y<\frac{l}{2},\frac{l}{2}<x+y<l\right\}$.

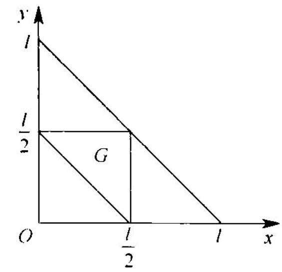

图 1-4-5

从图 1-4-5 中可以得到相应的几何概率:$P(A)=\frac{1}{4}$.

方法总结:

对于几何概率的计算,根据题意建立正确的几何概型往往是解题的关键,另外,几何概率的计算中往往需要利用定积分及重积分求面积或体积,因此要求考生对微积分知识要熟悉.

【例 6】 从区间(0,1)中任取两个数,则这两个数的积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率为______.

解 设两个数分别为 x 和 y,有 $0<x<1,0<y<1$,需要求事件 $\left\{xy<\frac{1}{4}\right\}$ 的概率,如图 1-4-6 所示,把 (x,y) 看作平面上的一个点,则 (x,y) 在边长为 1 的正方形内等可能取值,正方形面积为 1.满足 $xy<\frac{1}{4}$ 的全体点 (x,y) 构成平面区域 D,D

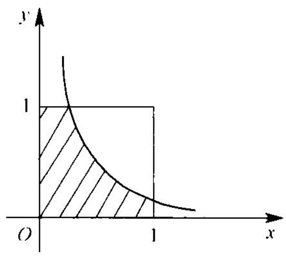

图 1-4-6

的面积为

$$S=1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(1-\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

则 $$P\left\{xy<\frac{1}{4}\right\}=\frac{S}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

方法总结：

几何概型既可以视为古典概型的推广应用，又可以利用随机变量的均匀分布来解决. 如例 6 可以用第二章的二维均匀分布计算.

第五节　条件概率

一、主要内容归纳

1. 条件概率　在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为事件 B 在给定条件 A 下的条件概率，记作 $P(B|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\qquad P(A)>0$$

2. 乘法公式　设 A,B 是任意两个随机事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A).$$

一般地，设 $A_1,\cdots,A_n$ 是 n 个随机事件，且 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})\cdots P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1).$$

3. 完备事件组　设 Ω 为试验的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为试验的一组事件，若有

(1) $B_iB_j=\varnothing$ $(i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分或完备事件组.

由定义可见，若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，则在一次试验中，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 必有且仅有一个发生.

4. 全概率公式　设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，A 是试验的任一事件，则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)(A|B_i)$$

5. 贝叶斯公式　设事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，A 为试验的任一事件. 且 $P(A)>0$，则有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$