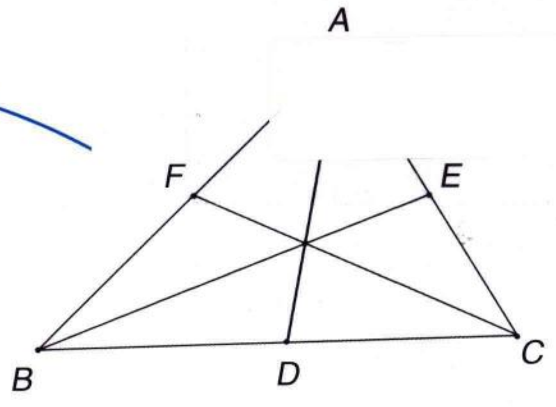
QIDONGZHONGXUEAOSAIXUNLIANJIAOCHENG

启东中学奥赛训练教程

高中数学

丛书主编 王 生

本册主编 曹瑞彬



$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

启东中学

QIDONGZHONGXUEAOSAIXUNLIANJIAOCHENG

奥赛训练教程

高 中 数 学

主 编 曹瑞彬
作 者 王晓东 沈蒋峰
顾卫海 曹瑞彬

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛训练教程．高中数学／曹瑞彬主编
—4版．—南京：南京师范大学出版社，2013．5
ISBN 978-7-5651-1226-3

Ⅰ．①启… Ⅱ．①曹… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第006702号

书　名	启东中学奥赛训练教程(高中数学)
主　编	曹瑞彬
责任编辑	孙　涛
出版发行	南京师范大学出版社
地　址	江苏省南京市宁海路122号(邮编:210097)
电　话	(025)83598919(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　址	http://www.njnup.com
电子信箱	nspzbb@163.com
印　刷	扬州市文丰印刷制品有限公司
开　本	787毫米×1092毫米　1/16
印　张	24.75
字　数	602千
版　次	2013年5月第4版　2013年5月第1次印刷
书　号	ISBN 978-7-5651-1226-3
定　价	48.00元

曹瑞彬　男，1962 年 11 月出生，1983 年毕业于南京师范学院数学系，中学数学高级教师，江苏省数学特级教师，数学奥林匹克高级教练，南通市数学学科基地业务负责人，启东中学奥赛中心副主任，全国教育系统模范教师，全国中小学优秀班主任。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作，近年来培养了一大批数学尖子，其中有 100 多人获得全国数学联赛一等奖，10 多位同学入选国家冬令营，7 位同学进入国家集训队，其中陈建鑫同学获第 42 届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌。任班主任所送的 2003 届高三(1)班有 20 位同学考入清华、北大，还有 20 位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》、《向 45 分钟要效益》、《大学自主招生真题汇编与训练·数学》等数十本教辅用书，在《中学数学》、《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

出版说明

江苏省启东中学是一所面向启东市(县级市)招生的四星级高中,也是中国百强中学之一,近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995年"世界第一才女"毛蔚同学夺得了第26届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生;1996年蔡凯华同学在第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌,周璐同学获第28届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌;1998年陈宇翱同学在第29届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌;2001年施陈博同学夺得第32届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,陈建鑫同学夺得第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌;2002年樊向军同学获第33届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2003年倪犇博同学获第35届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌;2004年李真同学获第35届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2006年朱力同学获第37届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2007年钱秉玺同学获第38届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,并被授予"全国优秀共青团员"称号;2012年李天然同学获第44届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学,连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银,学校高考成绩也是令人惊讶的出色,被誉为"奥赛金牌的摇篮,清华北大的生源基地"。

"启东中学现象"自然也成为出版界瞩目的焦点,与"黄冈"一样,"启东"很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩,应该说,建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映,如《向45分钟要效益》、《特级教师优化设计》、《奥林匹克竞赛指导》、《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行,是我社依托名校名师,实施"名品"战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步,是我社与启东中学多年合作的结果,倚天时地利人和的优势,水到而渠成。

迈开这一步,是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社"理念教辅"、"名品教辅"的关心与厚爱以及他们的需求,已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础,根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写,将竞赛与升学结合起来,尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养,由浅入深,循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《启东中学奥赛训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答,方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士,各分册的主编均是启东中学金牌教练,参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作,有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力,领略启东中学的风采,解读启东中学的奥秘,欣赏启东中学的智慧,分享启东中学的成功!

南京师范大学出版社

目　录

第一章　集　合

第二章　函　数

第三章　数　列

第四章　数学归纳法

第五章　三角函数

第六章　向　量

第七章　不等式

第八章　解析几何

第九章　立体几何

第十章　平面几何

第十一章　排列组合与二项式定理

第十二章　复　数

第十三章　极限与导数

第十四章　排列组合和概率

第十五章　数论初步

第十六章　多项式

第一章　集　　合

集合是数学中最基本的概念，它是一个原始概念. 集合论是数学的基础. 在中学数学竞赛中，绝大部分问题都可以用集合的语言来叙述. 本章主要介绍在数学竞赛中时常出现的集合问题.

第一节　集合的概念与运算

知识概要

1. 集合的概念

(1) 集合：所谓集合，就是具有某一共同性质的对象的总体，组成集合的对象称为该集合的元素.

(2) 集合元素的特征：确定性、互异性、无序性.

(3) 集合中元素可以是有限的，也可以是无限的，我们分别称之为有限集和无限集. 不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.

2. 集合与集合的关系

(1) 子集.

若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. 若 B 中至少有一个元素 $b\notin A$，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$. 若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

(2) 子集的性质.

$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subsetneqq B(B\neq\varnothing)$；$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$(\complement_U A)\cup B=U\Leftrightarrow A\subseteq B$.

3. 集合的运算

(1) 交集、并集、补集和差集.

差集的定义：记 A，B 是两个集合，则所有属于 A 且不属于 B 的元素构成的集合. 记作 $A\backslash B$，$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.

(2) 集合运算的性质.

① $A\cap A=A$，$A\cup A=A$（幂等律）.

② $A\cap U=A$，$A\cup U=U$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$（同一律）.

③ $A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$，$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$（互补律）.

④ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（分配律）；
$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$.

⑤ $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$；$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$.

⑥ $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$；$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

⑦ $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$（吸收律）.

4. 有限集合元素的个数与子集的个数

(1) $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

(2) 若 $\mathrm{card}(A)=n$,则有限集 A 的子集个数为 2^n,A 的真子集个数为 2^n-1,非空真子集个数为 2^n-2.

解题指导

例 1 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b\ (a,b\in\mathbf{R})$,且集合 $A=\{x\mid x=f(x)\}$,$B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$.

(1) 求证:$A\subseteq B$;

(2) 当 $A=\{-1,3\}$时,用列举法表示 B;

(3) 若 A 只含有一个元素,则 $A=B$.

解 (1) 证明:任取 $x\in A$,则 $x=f(x)$,从而 $x=f[f(x)]$.

$\therefore\ x\in B$,$\therefore\ A\subseteq B$.

(2) $\because\ A=\{-1,3\}$,$\therefore\ -1=f(-1)$,$3=f(3)$,即$-1=1-a+b$,$3=9+3a+b$,

解得 $a=-1$,$b=-3$.

$\therefore\ f(x)=x^2-x-3$.

$\therefore\ f[f(x)]=(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3$.

$\therefore$ 由 $x=f[f(x)]$,可化简为$(x^2-x-3)^2=x^2$,即 $x^2-x-3=\pm x$.

$\therefore\ x^2-2x-3=0$ 或 $x^2=3$.

$\therefore\ x_1=3$,$x_2=-1$,$x_3=\sqrt{3}$,$x_4=-\sqrt{3}$.

$\therefore\ B=\{3,-1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$.

(3) 设 $A=\{c\}$,即二次方程 $f(x)-x=0$ 有唯一解 c,亦即 c 为$f(x)-x=0$ 的重根.

$\therefore\ f(x)-x=(x-c)^2$,即 $f(x)=(x-c)^2+x$.

于是$f[f(x)]=[f(x)-c]^2+f(x)$.

$$\begin{aligned}\therefore\ f[f(x)]-x&=[f(x)-c]^2+f(x)-x\\&=[(x-c)^2+x-c]^2+(x-c)^2=0.\end{aligned}$$

$\therefore\ \begin{cases}(x-c)^2+x-c=0,\\x-c=0.\end{cases}$ $\therefore\ x=c$.

故 $f[f(x)]=x$ 也只有唯一解 $x=c$,即 $B=\{c\}$. $\therefore\ A=B$.

例 2 设 $A=\{a+\sqrt{2}b\mid |a^2-2b^2|=1,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$. 已知 $x\in A$,$y\in A$,求证:

(1) $xy\in A$;(2) $\dfrac{1}{x}\in A$.

证明 (1) 设 $x=a+\sqrt{2}b$,$y=c+\sqrt{2}d(a,b,c,d\in\mathbf{Z})$,则$|a^2-2b^2|=1$,$|c^2-2d^2|=1$.

$\therefore\ xy=(a+\sqrt{2}b)(c+\sqrt{2}d)=(ac+2bd)+\sqrt{2}(ad+bc)$.

$\because\ |(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2|=|(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)|=1$,

$\therefore\ xy\in A$.

(2) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a+\sqrt{2}b}=\frac{a-\sqrt{2}b}{a^2-2b^2}=\begin{cases}a-\sqrt{2}b & (当\ a^2-2b^2=1\ 时),\\ -a+\sqrt{2}b & (当\ a^2-2b^2=-1\ 时).\end{cases}$

显然有 $a-\sqrt{2}b\in A$，$-a+\sqrt{2}b\in A$，故 $\frac{1}{x}\in A$.

例 3 已知对任意实数 x，函数 $f(x)$ 都有定义，且 $f^2(x)\leqslant 2x^2\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$. 如果 $A=\{a\mid f(a)>a^2\}\neq\varnothing$，求证：$A$ 是无限集.

分析 必须找出无穷多个数 x，使 $f(x)>x^2$.

证明 $\because$ $f^2(0)\leqslant 0$，

$\therefore$ $f(0)=0$，故 $0\notin A$，而 $A\neq\varnothing$，故必有一个非零实数 a，使 $a\in A$，即 $f(a)>a^2$.

由已知条件得 $f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{a^4}{2a^2}>\left(\frac{a}{2}\right)^2$，即 $\frac{a}{2}\in A$.

同理，$\frac{a}{4}$，$\frac{a}{8}$，…，$\frac{a}{2^n}$，…均是 A 的元素. 故 A 是无限集.

例 4 已知集合 $M_1=\{y^2+ay+b\mid y\in\mathbf{Z}\}$，$M_2=\{2x^2+2x+c\mid x\in\mathbf{Z}\}$. 求证：对于任意整数 a，b，总能找到整数 c，使 $M_1\cap M_2=\varnothing$.

分析 找到适当的模是解题关键. 利用同余关系进行分类.

证明 $2x^2+2x+c\equiv c \pmod 4$.

若 a 为奇数，则 $y^2+ay\equiv y^2+y\equiv 0 \pmod 2$，

即 $y^2+ay+b \pmod 4$ 仅有两类：一类为 $2+b$，一类为 b.

若 a 为偶数，y 为偶数时，则 $y^2+ay\equiv 0 \pmod 4$；y 为奇数时，则 $y^2+ay\equiv 1+a \pmod 4$.

即 $y^2+ay+b \pmod 4$ 仍仅有两类.

因此，可取 c 不属于以上两类 $\pmod 4$，此时 $M_1\cap M_2=\varnothing$.

例 5 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

分析 集合 B，C 分别表示函数 $y=2x+3$，$z=x^2$ 的值域，其中定义域为 A.

解 $\because$ $A=[-2,a]$，$\therefore$ $B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}=[-1,2a+3]$.

$$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}=\begin{cases}[a^2,4], & -2\leqslant a<0,\\ [0,4], & 0\leqslant a<2,\\ [0,a^2], & a\geqslant 2.\end{cases}$$

(1) 当 $-2\leqslant a<0$ 时，由 $C\subseteq B$，得 $a^2\leqslant 4\leqslant 2a+3$，无解；

(2) 当 $0\leqslant a<2$ 时，由 $C\subseteq B$，得 $4\leqslant 2a+3$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant a<2$；

(3) 当 $a\geqslant 2$ 时，由 $C\subseteq B$，得 $a^2\leqslant 2a+3$，解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$.

例 6 已知 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2+4x+4y+7=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid xy=-10,x,y\in\mathbf{R}\}$.

(1) 请根据自己对点到直线的距离，两条异面直线的距离中“距离”的认识，给出集合 A 与 B 的距离的定义；

(2) 依据(1)中的定义求出 A 与 B 的距离.

解 (1) 设 $d=\min\limits_{P_1\in A,P_2\in B}|P_1P_2|$，则称 d 为 A 与 B 的距离.

(2) A 中点的集合为圆 $(x+2)^2+(y+2)^2=1$，圆心为 $O(-2,-2)$.

令 $P(x,y)$ 是双曲线 $xy=-10$ 上任一点，则

$$\begin{aligned}|OP|^2&=(x+2)^2+(y+2)^2=x^2+y^2+4(x+y)+8\\&=(x+y)^2-2xy+4(x+y)+8=(x+y)^2+4(x+y)+28.\end{aligned}$$

令 $t=x+y$，则 $|OP|^2=t^2+4t+28=(t+2)^2+24$.

当 $t=-2$，即 $\begin{cases}xy=-10,\\x+y=-2,\end{cases}$ 也即 $\begin{cases}x=-1+\sqrt{11},\\y=-1-\sqrt{11}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1-\sqrt{11},\\y=-1+\sqrt{11}\end{cases}$ 时，$|OP|^2_{\min}=24$.

$\therefore$ $|OP|_{\min}=2\sqrt{6}$. $\therefore$ $d=2\sqrt{6}-1$.

例 7 X 是非空的正整数集合，满足下列条件：① 若 $x\in X$，则 $4x\in X$；② 若 $x\in X$，则 $[\sqrt{x}]\in X$. 求证：X 是全体正整数的集合.

证明 设 a 为 X 中的最小数，则 $a\leqslant[\sqrt{a}]\in X$，$\therefore$ $a=[\sqrt{a}]$. 从而 $a=1$，即 $1\in X$.

由①知 $4,4^2,\cdots,4^n,\cdots\in X$.

设 k 为任一正整数. 当自然数 $m>-\log_2\log_1\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$ 时，

$$2^m\log_1(k+1)-2^m\log_1 k=2^m\log_1\left(1+\frac{1}{k}\right)>1.$$

因而必存在自然数 n 满足 $2^m\log_1 k\leqslant n<2^m\log_1(k+1)$，即 $k^{2^m}\leqslant4^n<(k+1)^{2^m}$.

从而由 $4^n\in X$ 及条件②得 $k\in X$.

故 X 是全体正整数的集合.

例 8 给出所有形如 x^2+px+q 的二次三项式，且整系数 p,q 满足：$1\leqslant p\leqslant1997$，$1\leqslant q\leqslant1997$，考虑关于此三项式的两个集合：① 有整零点；② 没有实零点. 试比较两集合大小.

解 令 $G=\{1,\cdots,1997\}$.

二次三项式 x^2+px+q 有整零点 $\Leftrightarrow(p,q)\in F_1=\{(p,q)\in G^2\mid p^2-4q$ 是一个完全平方数$\}$；

二次三项式没有实零点 $\Leftrightarrow(p,q)\in F_2=\{(p,q)\in G^2\mid p^2-4q<0\}$.

下面证明 $\mathrm{card}(F_2)>\mathrm{card}(F_1)$.

令 $(p,q)\in F_1$，则存在一个非负整数 a，使得 $p^2-4q=a^2$.

那么 $a=\sqrt{p^2-4q}$，a 与 p 有相同的奇偶性，$a<p$（$\because$ $q\geqslant1$），

因而 $a\leqslant p-2$，$p-a-1\in\mathbf{N}^*$.

$\therefore\ (p-a-1)^2-4q=p^2-4q+a^2+1-2ap-2p+2a$

$=2a^2+1-2ap+2a-2p$

$=2a(a-p)+1-2(p-a).$

又 $2a(a-p)\leqslant 0$，$1-2(p-a)<0$，故 $(p-a-1)^2-4q<0$，且 $p-a-1\in G$.

故 $(p-1-\sqrt{p^2-4q},q)\in F_2$.

令 $f:F_1\to F_2$，即 $(p,q)\to(p-1-\sqrt{p^2-4q},q)$.

若 $(p',q')\in F_1$ 使得 $f(p,q)=f(p',q')$，则

$q=q'$，$p-1-\sqrt{p^2-4q}=p'-1-\sqrt{(p')^2-4q}$.

故 $p-p'=\sqrt{p^2-4q}-\sqrt{(p')^2-4q}$.

若 $p\neq p'$，则 $\sqrt{p^2-4q}+\sqrt{(p')^2-4q}>0$，$p-p'=\dfrac{(p-p')(p+p')}{\sqrt{p^2-4q}+\sqrt{(p')^2-4q}}$.

且 $p+p'=\sqrt{p^2-4q}+\sqrt{(p')^2-4q}$. ①

由 $q\geqslant 1$，有 $\sqrt{p^2-4q}<\sqrt{p^2}=p$，$\sqrt{(p')^2-4q}<\sqrt{(p')^2}=p'$，与①矛盾，故假设 $p\neq p'$ 不成立.

$\therefore\ p=p'$，映射 f 为单射，$\mathrm{card}(F_2)\geqslant\mathrm{card}(F_1)$.

下面将说明 f 不是满射.

假设存在 $(p,q)\in F_1$，使得 $f(p,q)=(2,3)$，则 $q=3$，$p-1-\sqrt{p^2-12}=2$.

即 $(p-3)^2=p^2-12$，$p^2-6p+9=p^2-12$，$6p=21$，该方程没有整数解 p，矛盾.

故不存在 $(p,q)\in F_1$ 满足 $f(p,q)=(2,3)$.

而 $(2,3)\in F_2$，因而 f 不是满射. 故 $\mathrm{card}(F_2)>\mathrm{card}(F_1)$.

解题训练

一、填空题

1. 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是________________.

2. 设全集是实数集，若集合 $A=\{x\mid \sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=$________.

3. 已知 a 为给定的实数，那么集合 $M=\{x\mid x^2-3x-a^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数为________.

4. 若集合 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是________.

5. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{2,3,4,5,6\}$，映射 $f:M\to N$，则对任意的 $x\in M$，使得 $x+f(x)+xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 的个数为________.

6. 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1\ 000\}$. 现对 M 的任一非空子集 X，令 a_x 表示 X 中最大数与最小值之和，那么，所有这样的 a_x 的算术平均值为________.

7. 若集合 M 中的元素是连续自然数，$\mathrm{card}(M)\geqslant 2$，且 M 中元素之和为 1 996，那么这样的集合 M 共有______个.

8. 点集$\left\{(x,y)\left|\lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right.\right\}$中元素的个数为________.

9. 集合$S=\{1,2,3,\cdots,18\}$的五元子集$S_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$中,任何两个元素之差不为1,这样的子集$S_5$的个数共有________个.

10. 已知$A=\{x|x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|2^{1-x}+a\leqslant 0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$,若$A\subseteq B$,则实数$a$的取值范围是________.

11. 已知集合$M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$,$N=\{(x,y)\mid y=k(x+1)\}$,当$M\cap N\neq\varnothing$时,$k$的取值范围是________.

12. 设集合$A=\left\{(x,y)\left|\frac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$,$B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,x,y\in\mathbf{R}\}$,若$A\cap B\neq\varnothing$,则实数$m$的取值范围是________.

二、解答题

13. 设集合$M=\{u|u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{v|v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$. 求证:$M=N$.

14. 已知集合$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,若$A=B$,则$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)$的值是多少?

15. 以某些整数为元素的集合P具有下列性质:① P中的元素有正数,有负数;② P中的元素有奇数,有偶数;③ $-1\notin P$;④ 若$x,y\in P$,则$x+y\in P$. 试证明:

(1) $0\in P$;

(2) $2\notin P$.

第二节　有限集合的元素个数

知识概要

加法原理是一种用途广泛的重要的计数方法,但在运用加法原理进行计数时,必须先把所要计数的集合分划为若干个两两互不相交的非空子集,通过计算各个子集元素个数的总和来达到计数的目的. 然而要找到一个两两互不相交而又便于计数的分划并非易事,时常会出现下面的情况:

S的子集族$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$满足:

(1) $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$;

(2) 存在$1\leqslant i\neq j\leqslant n$,使$A_i\cap A_j\neq\varnothing$. 这时,要通过计算$\mathrm{card}(A_i)$$(i=1,2,\cdots,n)$来求$\mathrm{card}(S)$,就必须推广加法原理.

1. 容斥公式

容斥原理1　设$A_i(i=1,2,\cdots,n)$为有限集,则

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{card}(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{card}(A_i\cap A_j)+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).\qquad ①$$

公式①称为容斥公式，显然它是加法原理的推广，并可用数学归纳法证明.

当 n 分别取 2，3 时，便得到容斥公式的简单形式.

推论 1 $\text{card}(A_1 \cup A_2)=\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)-\text{card}(A_1 \cap A_2)$.

推论 2 $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)+\text{card}(A_3)-\text{card}(A_1 \cap A_2)-\text{card}(A_1 \cap A_3)-\text{card}(A_3 \cap A_2)+\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

2. 筛法公式

利用集合运算的摩根律：$\complement_I\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=\bigcap\limits_{i=1}^{n} \complement_I A_i$ 及公式 $\complement_I A=I-A$（I 为全集），改写公式①即得下面原理.

容斥原理 2 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为有限集 I（全集）的子集，则

$$\text{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \complement_I A_i\right)=\text{card}\left(\complement_I\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)=\text{card}(I)-\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\text{card}(I)-\sum_{i=1}^{n}\text{card}(A_i)+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n}\text{card}(A_i \cap A_j)-\cdots+(-1)^n\text{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \quad ②$$

公式②称为筛法公式，一般用来计算不具有某几个性质中的任何一个性质的元素的个数.

解题指导

例 1 把 n 个相异的球放入 $r(n \geqslant r)$ 个相异的盒子中去，每盒球数不限，求每盒至少放 1 个球的放法种数.

解 设 I 是 n 个球放入 r 个盒子中去的放法的集合. A_i 是 I 中使第 i 个盒子是空盒的放法的集合（$i=1,2,\cdots,r$）.

由于每一个球都有 r 种放法，因此 $\text{card}(I)=r^n$.

要求第 i 个盒子是空的时，每一个球有 $r-1$ 种放法，因此 $\text{card}(A_i)=(r-1)^n(i=1,2,\cdots,r)$.

要求第 i 个盒子和第 j 个盒子都是空时，每一个球有 $r-2$ 种放法，因此，$\text{card}(A_i \cap A_j)=(r-2)^n(i,j=1,2,\cdots,r)$.

一般地，$\text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})=(r-k)^n(k=1,2,\cdots,r)$.

所以，每盒至少放 1 个球的放法种数为：

$$\text{card}(\complement_I A_1 \cap \complement_I A_2 \cap \cdots \cap \complement_I A_r)=\text{card}(I)-\sum_{i=1}^{r}\text{card}(A_i)+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant r}\text{card}(A_i \cap A_j)+\cdots+(-1)^r\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r)=r^n-C_r^1(r-1)^n+C_r^2(r-2)^n-\cdots+(-1)^rC_r^r(r-r)^n.$$

例 2 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s+2^r \mid 0 \leqslant r<s<t，且 r,s,t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列，已知 $b_k=1\ 160$，求 k.

解 $b_k=1\ 160=2^{10}+2^7+2^3$.

令 $M=\{c \in B \mid c<1\ 160\}$，其中 $B=\{2^t+2^s+2^r \mid 0 \leqslant r<s<t，且 r,s,t \in \mathbf{Z}\}$，

故 $M=\{c \in B \mid c<2^{10}\} \cup \{c \in B \mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\} \cup \{c \in B \mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}$.

现在求 M 的元素个数 k：

$\{c\in B \mid c<2^{10}\}=\{2^t+2^s+2^r \mid 0\leqslant r<s<t<10\}$，其元素个数为 C_{10}^3.

$\{c\in B \mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}=\{2^{10}+2^s+2^r \mid 0\leqslant r<s<7\}$，其元素个数为 C_7^2.

$\{c\in B \mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}=\{2^{10}+2^7+2^r \mid 0\leqslant r<3\}$，其元素个数为 C_3^1.

∴ $k=C_{10}^3+C_7^2+C_3^1+1=145$.

例 3 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下列 2 个条件的集合 C 的个数：① $C\subsetneqq A\cup B$，且 C 中含有 3 个元素；② $C\cap A\neq\varnothing$.

解 方法一：∵ A、B 各含有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，

∴ $A\cup B$ 中有 $12+12-4=20$(个)元素，满足①的集合个数是 C_{20}^3.

在上面集合中，满足 $A\cap C=\varnothing$ 的集合个数是 C_8^3.

因此，所求集合 C 的个数是 $C_{20}^3-C_8^3=1\ 084$(个).

方法二：分类：含 A 中 1 个元素的有 $C_{12}^1C_8^2$ 个，含 A 中 2 个元素的有 $C_{12}^2C_8^1$ 个，含 A 中 3 个元素的有 C_{12}^3 个. 故共有 $C_{12}^1C_8^2+C_{12}^2C_8^1+C_{12}^3=1\ 084$(个)集合 C.

例 4 某次数学竞赛共 3 道试题，20 名参赛学生的情况如下：

(1) 他们每人都至少解出 1 题；

(2) 在没有解出第 1 题的那些学生中，解出第 2 题的是解出第 3 题的人数的 2 倍；

(3) 只解出第 1 题的比余下的学生中解出第 1 题的多 1 人；

(4) 只解出 1 道题的学生中，有一半没有解出第 1 题.

试问有多少学生只解出第 2 题？

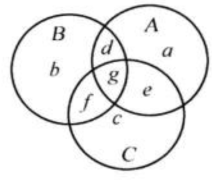


图 1-2-1

解 设解出第 1，2，3 道题的学生集合分别为 A、B、C(如图1-2-1)，重叠部分表示同时解出 2 道题或 3 道题的学生集合，7 个部分的人数分别用 a，b，c，d，e，f，g 表示，则

由(1)得 $a+b+c+d+e+f+g=20$. ①

由(2)得 $b+f=2(c+f)$. ②

由(3)得 $a=d+e+g+1$. ③

由(4)得 $a=b+c$. ④

由②式得 $f=b-2c$. ⑤

把⑤式代入①式，得 $a+2b-c+d+e+g=20$. ⑥

把③式代入⑥式，得 $2b-c+2d+2e+2g=19$. ⑦

把④式代入⑥式，得 $3b+d+e+g=20$. ⑧

由⑧×2－⑦，得 $4b+c=21$. ⑨

∵ $c\geqslant 0$，∴ $4b\leqslant 21$，$b\leqslant 5\dfrac{1}{4}$.

利用⑤⑨消去 c，得 $f=b-2(21-4b)=9b-42$.

由 $f\geqslant 0$，得 $9b\geqslant 42$，即 $b\geqslant 4\dfrac{2}{3}$，于是有 $4\dfrac{2}{3}\leqslant b\leqslant 5\dfrac{1}{4}$.

由于 $b\in\mathbf{Z}$，∴ $b=5$，即只解出第 2 题的学生有 5 人.