特级教师

教学优化设计

DAISHU

高二

代数

南京师范大学出版社

特级教师教学优化设计

高二代数

《特级教师教学优化设计》
编委会组织编著

南京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

特级教师教学优化设计:高二代数/《特级教师教学优化设计》编委会组织编著.—南京:南京师范大学出版社,1999.7

ISBN 7-81047-337-9/G·208

Ⅰ.特… Ⅱ.特… Ⅲ.代数课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第20536号

南京师范大学出版社出版发行

(江苏省南京市宁海路122号 邮编210097)

江苏省新华书店经销 南京通达彩色印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张10.25 字数263千

1999年7月第1版 1999年7月第1次印刷

定价:9.00元

本系列丛书采用全息防伪覆膜

《特级教师教学优化设计》丛书编委会

（高中部分）

（高二代数）

主　　编　王　生　杨汉昌　陆知轩

编写人员　王　生　杨汉昌　陈建斌　曹瑞斌

徐晏儒　陆　斌

出版说明

实施素质教育是当前教育改革的热门话题。在学科教学中,如何减轻学生的负担,提高教与学的质量,增强学生的全面素质,又是实施素质教育的关键。为了给学生提供一套能够体现当前教改精神、切实提高学习质量的读物,让学生用最少的时间获得最大的学习收益,我们在大量调查和深入开展研讨的基础上,组织一批特级教师主持编写了这套"特级教师教学优化设计"系列丛书。

随着教改的不断深入,随着高考3+X方案的逐步落实,教育观念、教学内容、教学方法、测评手段都会有较大的改变。本套系列丛书的编写,力图充分吸收当前教改的成果,贯彻现代教育思想,充分注意教学过程中教师的主导作用与学生的主体作用,尤其突出对学生的学法指导。本书对学科知识的辅导,既注意围绕各科的教学大纲,对课本中的知识要点、重点、难点进行系统的梳理和讲解,并安排相应的练习;又注意适应当前教改的要求,注意向3+X的考试内容靠拢,突出知识学习的迁移和综合。"学习指导"、"讲解设计"、"练习设计"是本系列丛书的基本栏目。"学习指导"梳理本课的知识要点或介绍学习方法,"讲解设计"对本课中的知识重点、难点进行阐释,"练习设计"根据本课的知识点安排相应的练习。练习又按"识记与理解"、"巩固与运用"、"拓展与迁移"三个层级进行设计。在语文中,还设计了"写作与欣赏",题目强调典型性和少而精。

数、理、化以课时为编写单位是本系列丛书的又一大特色。一般的同类书都以单元为编写单位,虽与教材同步,但与课时不同步,操作上的缺陷是显而易见的。本系列丛书吸收了许多特级教师多年教学的研究、实验成果,以课时为单位进行编写,并且每课时安排为一页两面,课时与课时之间不转页,这必将会给使用者带来很大的方便。

为了保证编校质量,本系列丛书设立了责任验题人制度。除加强正常的三审三校外,所有的题目都请专人责任验题,以确保题目以及解题过程和答案的准确性。

作为师范大学出版社,我们力图编出一套有自己特色、有较高水平和实用价值的读物。我们衷心希望本系列丛书能像我社先前开发的"向45分钟要效益"丛书一样,得到广大读者的青睐;也衷心希望读者在使用过程中提出批评意见,以便我们进一步修订,使其日臻完善,成为名牌产品。

前　言

依据全日制高级中学数学教学大纲，配合现行教材对高考改革和素质教育的要求，结合当前的教学实际，我们编写了这套《特级教师教学优化设计》丛书。

高二代数分册的编写，力求做到体现和反映以下“优化”的特色：

教学进度与课时安排优化　将高二代数的教学内容按实际教学的需要拆分为76课时，习题课和阶段小结课也合理安排穿插其中，重要章节及各章节内的重难点内容，进行了合理的分散处理。这样的进度及课时安排可作为教学实施的参考。

知识内容与教法学法优化　每课时的知识内容突出重点，对概念与规律的介绍简洁明了，知识体系的梳理纲目清晰，并且注意前后承接过渡与迁移，覆盖相关的知识点。根据认知规律进行讲解设计，例题讲解循序渐进，先分析引导、详细解答，后提示思路与方法，放手让读者自行分析问题与解决问题。这些例题既可直接用于课堂教学的讲解举例，也可作为学生预习的主要内容。

练习内容与题量梯度优化　练习设计的内容注意到知识与能力的并重和同步提高，与社会生产、生活相结合的题目占有相当的比例，注重培养学生综合运用知识的能力。题型全面，新题较多，加大了主观题的份量。题量适中，难度梯度合理，有利于分类教学。每一课的“讲解设计”分为两个层次、“练习设计”分为三个层次，教学使用时有了较大的选择余地，因而适用于各级各类中学的教学。

栏目设置与编排方式优化　全书栏目设置精当，一目了然。每课时均有讲解与练习，便于进度的把握与对教学效果的实时反馈；书后的参考答案可供测评时灵活使用；大开本的设计符合当前教学用书的潮流与使用习惯。

我们期望由江苏教学第一线的特、高级教师编写的这本高二代数的教学优化设计能为高二代数教学提供有益的参考。

编　者

目　录

01 不等式的概念与性质

【概念与规律】

1. 不等式具有应用广、变换灵活的特点，它不仅是中学数学的重点教学内容，也是学习高等数学的基础和工具.

2. 学习不等式首先要理解实数具有有序性. 即 a、$b\in\mathbf{R}$ 时，$a>b\Leftrightarrow a-b>0$；$a=b\Leftrightarrow a-b=0$；$a<b\Leftrightarrow a-b<0$. 这是比较两实数(或代数式)大小的方法——求差法的依据.

3. 不等式有以下五个方面性质：

(1)对称性，(2)传递性，(3)同向不等式的可加性及移项法则，(4)两个不等式同向同正可相乘、两边同正可 $n(n\in\mathbf{N})$ 次乘方，(5)两边同正可 $n(n\in\mathbf{N}$，且 $n>1)$ 次开方. 应用这些性质的关键是注意这些性质使用的条件.

【讲解设计】·重点与难点

例1 设实数 a、b、c 满足等式①$b+c=6-4a+3a^2$，②$c-b=4-4a+a^2$，试确定 a、b、c 的大小关系.

解 $\because$ 由②得：$c-b=(a-2)^2\geqslant0$，

$\therefore c\geqslant b$；又①－②得：$b=a^2+1$，

$\therefore b-a=a^2-a+1=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，

$\therefore b>a$，$\therefore c\geqslant b>a$.

点评 ①比较两个数或代数式的大小，最基本的方法是求差比较法，其程序是：求差—变形—判断符号.

②$a\in\mathbf{R}$ 且 $a^2-a+1>0$ 为绝对不等式应给出证明，证明方法一是证 $\Delta<0$；一是通过配方来证明. 再如 a、$b\in\mathbf{R}$，$a^2-ab+b^2=(a-\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2\geqslant0$.

例2 已知 $a\geqslant1$，试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小.

解 $M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}<0$，$\therefore M<N$.

点评 ①通过分子(或分母)有理化使方根的差转化为方根的和是解题的一种技巧.

②此题亦可用求商法解之.

例3 已知 $f(x)=ax^2-c$，且 $-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant5$，求 $f(3)$ 的取值范围.

解 $\because f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$，$\therefore a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]$，$c=\frac{1}{3}f(2)-\frac{4}{3}f(1)$，

$\therefore f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$，

$\because -1\leqslant f(2)\leqslant5$，$\therefore -\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}$，

$\because -4\leqslant f(1)\leqslant-1$，

$\therefore \frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}$，

$\therefore -\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\leqslant f(3)\leqslant\frac{20}{3}+\frac{40}{3}$，

$\therefore -1\leqslant f(3)\leqslant20$.

当 $\begin{cases}f(1)=-1,\\f(2)=-1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-c=-1,\\4a-c=-1\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=0,\\c=1\end{cases}$ 时，左边取等号.

当 $\begin{cases}f(1)=-4,\\f(2)=5\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-c=-4,\\4a-c=5\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=3,\\c=7\end{cases}$ 时，右边取等号.

点评 解此类题的常见错误是：

依据得 $-4\leqslant a-c\leqslant-1$， ①

$-1\leqslant4a-c\leqslant5$， ②

由①、②进行加减消元得：

$0\leqslant a\leqslant3$，$1\leqslant c\leqslant7$， ③

$\therefore$ 由 $f(3)=9a-c$ 得：$-7\leqslant f(3)\leqslant27$. 其错误原因在于由①、②得两式等号成立的条件不相同. 另外，在同向不等式相加得 $-1\leqslant f(3)\leqslant20$ 时，可指出等号成立的条件。

【讲解设计】·思路与方法

例4 比较下列各组式的大小：

(1)$a>b>0$，$m>0$ 时，$\frac{b}{a}$ 与 $\frac{b+m}{a+m}$；

(2)a^ab^b 与 a^bb^a(a、b 为不相等的正数).

提示 (1)利用求差比较法;(2)求商比值并利用指数函数性质.

例5 设$60<a<84,28<b<33$,求$a+b$,$a-b$及$\frac{a}{b}$的范围.

提示 利用不等式性质解题.

【练习设计】·识记与理解

1. 已知$a<b<0,c>0$,在下列空格处填上恰当的不等号或等号.

(1)若$ad>bd$,则d __0;

(2)$\frac{c}{a}$ __ $\frac{c}{b}$;

(3)$\sqrt{|a|}$ __ $\sqrt{|b|}$;

(4)ca^2 __ cb^2;

(5)$(a-2)c$ __ $(b-2)c$.

2. 设$x>1,-1<y<0$,则$-y,-xy,x,y$,从小到大排列是__________.

3. 如$1<\alpha<3,-4<\beta<2$,则$\alpha-|\beta|$的取值范围是( ).

(A)$(-1,3)$ (B)$(-3,6)$

(C)$(-3,3)$ (D)$(1,4)$

4. 若$a<b<0$,则下列不等式中不能成立的是( ).

(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (B)$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

(C)$|a|>|b|$ (D)$a^2>b^2$

5. 若$ac>bd$且$a>b>0$,则( ).

(A)$c>d$ (B)$c>d>0$

(C)$c<d$ (D)c、d的大小不能确定

【练习设计】·巩固与掌握

6. 设$a>b>0,m>0,n>0$,则$\frac{b}{a},\frac{a}{b},\frac{b+m}{a+m},\frac{a+n}{b+n}$之间的大小顺序是__________.

7. 设x、y、$z\in\mathbf{R}$,则$yz^2<xz^2$是$y<x$的______________条件.

8. 在以下命题中,正确的命题是( ).

(A)α、β都是第一象限的角,若$\sin\alpha>\sin\beta$,则$\cos\alpha>\cos\beta$

(B)α、β都是第二象限的角,若$\sin\alpha>\sin\beta$,则$\mathrm{tg}\alpha>\mathrm{tg}\beta$

(C)α、β都是第三象限的角,若$\sin\alpha>\sin\beta$,则$\cos\alpha>\cos\beta$

(D)α、β都是第四象限的角,若$\sin\alpha>\sin\beta$,则$\mathrm{tg}\alpha>\mathrm{tg}\beta$

9. 比较$(\frac{n}{\sqrt{6}}+1)^3-(\frac{n}{\sqrt{6}}-1)^3$与2的大小$(n\neq0)$.

【练习设计】·拓展与迁移

10. 命题"若$x>2$且$y>3$,则$x+y>5$且$(x-2)(y-3)>0$"成立吗?其逆命题也成立?请说明理由.

11. 设$f(x)=ax^2+bx$,且$1\leqslant f(-1)\leqslant2,2\leqslant f(1)\leqslant4$,求$f(-2)$的范围.

02　不等式证明方法——比较法

【概念与规律】

1. 证明不等式成立最常用的比较法有以下两类：

(1)求差比较法　由 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$ 得：要证 $a>b$，只证 $a-b>0$ 即可.

(2)求商比较法　对不等式$\frac{a}{b}>1$，当 $b>0$ 时，可得 $a>b$，当 $b<0$ 时，可得 $a<b$. 但在用求商比较法时，作为除式的式子的值必须有确定的符号.

2. 用求差法解题时，为确定不等式一边的差的符号，有时要把这个差变形为一常数或变形为一常数与一个或几个平方和的形式，也可变形为几个因式的积的形式，以便于判断其正负.

【讲解设计】·重点与难点

例1　设 $a>0,b>0$，求证：$(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}\geqslant a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

证法1　左式－右式

$$=\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}}-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-2\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0.$$

∴左式≥右式，原不等式成立.

证法2　∵左式>0，右式>0，

又$$\frac{\text{左式}}{\text{右式}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=1.$$

∴左式≥右式，∴原不等式成立.

点评　用比较法证明不等式成立，一般要经历作差(商)、变形、判断三个步骤，变形的主要手段是通分、因式分解或配方.

例2　已知 $a、b\in\mathbf{R}^+$，求证：$(a+b)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{n+1}+b^{n+1})$.

证　左式－右式$=(a+b)(a^n+b^n)-2\cdot(a^{n+1}+b^{n+1})$

$=a^{n+1}+ab^n+a^nb+b^{n+1}-2a^{n+1}-2b^{n+1}$

$=a^n(b-a)+b^n(a-b)$

$=(a-b)(b^n-a^n)$.

当 $a>b>0$ 时，$a-b>0$，$b^n-a^n<0$，则 $(a-b)(b^n-a^n)<0$，∴左式<右式；

当 $b>a>0$ 时，$a-b<0$，$b^n-a^n>0$，则 $(a-b)(b^n-a^n)<0$，∴左式<右式；

当 $a=b>0$ 时，$a-b=0$，则左式＝右式.

综上所述，原不等式成立.

点评　当所得的差"正负不明"时，应注意分情况讨论.

例3　设 $f(x)=2x^2+1$，且 $a、b$ 同号，$a+b=1$，证明：对任意实数 $p、q$ 恒有 $af(p)+bf(q)\geqslant f(ap+bq)$成立.

证　$af(p)+bf(q)-f(ap+bq)$

$=a(2p^2+1)+b(2q^2+1)-2(ap+qb)^2-1$

$=2ap^2+2bq^2-2a^2p^2-4abpq-2q^2b^2$

$=2a(1-a)p^2+2b(1-b)q^2-4abpq$

$=2abp^2+2abq^2-4abpq$

$=2ab(p-q)^2$，

∵$a、b$ 同号，

∴$2ab(p-q)^2\geqslant 0$，

∴原不等式成立.

例4 根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

证法1　设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，则：

$f(x_1)-f(x_2)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

∵$x_1<x_2$，∴$x_2-x_1>0$.

当 $x_1x_2\geqslant 0$ 时，由 x_1,x_2 不能同时等于零，

$\therefore x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$;

当 $x_1x_2<0$ 时,有:

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$,

即 $f(x_1)<f(x_2)$,$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

证法 2 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则 x_1,x_2 不同时为零,$x_2-x_1>0$,$x_1^2+x_2^2>0$,

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)\cdot(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_2-x_1)[\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2]\geqslant\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1^2+x_2^2)>0$,

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$,$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

【讲解设计】·思路与方法

例 5 求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

提示 求差、变形为三个完全平方式的和.

例 6 求证:$2+\sin x+\cos x\geqslant\frac{2}{2-\sin x-\cos x}$,并求使等号成立的条件.

提示 可用求商或求差得证.当 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$ 时取等号.

【练习设计】·识记与理解

1.$a<0$,$-1<b<0$,则 a,ab,ab^2 三者的大小关系是________.

2.已知 a、$b\in\mathbf{R}$,求证:$a^2+b^2\geqslant2(a-b-1)$.

3.已知 x、$y>0$,且 $x\neq y$,求证:$\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$.

4.已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$,且 $a\neq b$,求证:$a^4+b^4>a^3b+ab^3$.

5.已知 $-1<a<1$,$-1<b<1$,求证:$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$.

【练习设计】·巩固与掌握

6.若 a、$b\in\mathbf{R}$,且 $a>b$,则在下面三个不等式:①$\frac{b}{a}>\frac{b-1}{a-1}$;②$(a+b)^2>(b+1)^2$;③$(a-1)^2>(b-1)^2$ 中不成立的有____个.

7.已知 a、$b>0$,求证:

(1)$a^7+b^7\geqslant a^6b+ab^6\geqslant a^5b^2+a^2b^5\geqslant a^4b^3+a^3b^4$.

(2)对(1),你能推广到更一般的情形吗?

8.求证 $a^2+b^2+1\geqslant a+b+1-ab$.

【练习设计】·拓展与迁移

9.(1)设 a、$b>0$,求证:$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt[a+b]{a^bb^a}$.

(2)若 $a\geqslant b\geqslant c>0$,

求证:$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

10.设 $a>b>c>1$,记 $M=a-\sqrt{c}$,$N=a-\sqrt{b}$,$P=2(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab})$,试找出 M、N、P 中的最小者,并说明理由.

03　不等式证明方法
——公式法

【概念与规律】

1. 常用的基本不等式有：

(1)若 $a、b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(2)若 $a、b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(3)若 $a、b$ 同号，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(4)若 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$，则 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

(5)若 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

2. 在使用"和为常数，积有最大值"和"积为常数，和有最小值"这两个结论时，必须注意以下三点："一正"——字母为正数；"二定"——和或积为定值(有时需通过"凑配法"凑出定值)；"三相等"——等号应能取到. 简记为"一正二定三相等".

【讲解设计】·重点与难点

例 1　选择题：

(1)若 $0<a<b<1$，$P=\log_{\frac{1}{3}}\frac{a+b}{2}$，$Q=\frac{1}{2}\cdot(\log_{\frac{1}{3}}a+\log_{\frac{1}{3}}b)$，$M=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(a+b)$，则(　　).

(A)$P>Q>M$　　(B)$Q>P>M$

(C)$Q>M>P$　　(D)$P>M>Q$

(2)设 $a、b、c$ 是互不相等的正数，且 $a+b+c=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的取值范围是(　　).

(A)$[5,+\infty)$　　(B)$(5,+\infty)$

(C)$[9,+\infty)$　　(D)$(9,+\infty)$

解　(1)选(B)，由 $0<a<b<1$ 得：

$\sqrt{a+b}>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，

$\therefore\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{ab}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{a+b}{2}>\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{a+b}$.

(2)选(D)，$\because a、b、c\in\mathbf{R}^+$，

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$=(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

$\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=9$，

但 $a、b、c$ 各不相等，$\therefore$ 等号不成立.

点评　①利用基本不等式要注意等号成立的条件；②对例 1(1)，可以取特殊值选取答案如 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{2}{3}$；③"1"的代换是解(2)的关键，务必掌握这种技巧.

例 2　若 $a、b、c$ 为互不相等的实数，求证：$a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c)$.

证　$\because a、b、c$ 是互不相等的实数，

$\therefore a^4+b^4>2a^2b^2$，$b^4+c^4>2b^2c^2$，

$c^4+a^4>2c^2a^2$.

将上面三不等式的两边分别相加得：

$2(a^4+b^4+c^4)>2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$，

$\therefore a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

又 $a^2b^2+b^2c^2>2ab^2c$，

$b^2c^2+c^2a^2>2bc^2a$，$c^2a^2+a^2b^2>2a^2bc$.

$\therefore 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)>2abc(a+b+c)$，

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc(a+b+c)$，

$\therefore$ 原不等式成立.

点评　分段应用基本不等式，然后整体相加(乘)得结论，这是证明不等式成立的基本技巧.

例 3　若 $a>b>0$，求证：$a+\frac{1}{(a-b)b}\geqslant 3$.

证　$\because a>b>0$，$\therefore a-b>0$，$\frac{1}{(a-b)b}>0$，$\therefore a+\frac{1}{(a-b)b}=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}\geqslant 3\sqrt[3]{(a-b)b\frac{1}{(a-b)b}}=3$.

点评　①为了应用基本不等式，必须根据该题的特点，将 a 分拆为两正数 $a-b$ 与 b. ②

在应用基本不等式证题时,一定要注意所要求的条件,在原式不具备应用基本不等式条件时,只有作适当的恒等变形使之符合条件后方可应用基本不等式.

【讲解设计】·思路与方法

例 4 填空题:

若下面各式中字母均为正数,则 $2-x-\frac{4}{x}$ 的最大值为____;$x+\frac{1}{2x^2}$ 的最小值为____;当 $a+b+c=1$ 时,ab^2c^3 的最大值为____.

提示 $2-x-\frac{4}{x}=2-(x+\frac{4}{x})$,

$x+\frac{1}{2x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2x^2}$,

$1=a+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}+\frac{c}{3}$.

例 5 设 a、b、$c\in\mathbf{R}$,求证:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

提示 利用 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$.

【练习设计】·识记与理解

1. 选择题:

已知 a、$b\in\mathbf{R}^+$,则 $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{2ab}{a+b}$ 中最大的为( ).

(A) $\frac{a+b}{2}$　　(B) $\sqrt{ab}$

(C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$　　(D) $\frac{2ab}{a+b}$

2. 若下面各式中字母均为正数,则 $2-x-\frac{16}{x}$ 的最大值为__;$x^2+\frac{1}{x}$ 的最小值为__;当 $\log_4x+\log_4y=2$ 时,$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为____.

3. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,若 $abc=1$,求证:$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant8$.

4. 若 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$,$a+b+c=1$,求证:$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant8abc$.

5. 在锐角三角形 ABC 中,求证:$\mathrm{tg}A\cdot(\mathrm{ctg}B+\mathrm{ctg}C)+\mathrm{tg}B(\mathrm{ctg}C+\mathrm{ctg}A)+\mathrm{tg}C\cdot(\mathrm{ctg}A+\mathrm{ctg}B)\geqslant6$.

【练习设计】·巩固与掌握

6. 设 $x>0$,函数 $y=\frac{6}{x^2}+3x$ 的最小值是____.

7. 设 $x\in[\frac{1}{9},27]$,

则 $y=\log_3\frac{x}{27}\cdot\log_3(3x)$ 的最大值是____.

8. 求证:$a^2+b^2+c^2+3\geqslant2(a+b+c)$.

【练习设计】·拓展与迁移

9. 设 x、$y\in\mathbf{R}^+$,且 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$,则 $x\cdot\sqrt{1+y^2}$ 的最大值是____.

10. 若 a、b、$c>0$ 且全不相等,则 $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$.

04　不等式证明方法——分析法、综合法

【概念与规律】

1. 分析法是指从求证的不等式出发，逐步寻找使该式成立的充分条件，最后归结到已知条件或已证的基本性质，从而推导出所求证的不等式成立，其特点和思路是“执果索因”，即从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”.

2. 综合法是指从已知条件出发，运用性质或公式导出所证问题，其特点和思路是“由因导果”，即从“已知”看“可知”，逐步推向“未知”.

3. 解题时一边分析，一边综合，称之为分析综合法. 分析的终点是综合的起点，综合的终点又成为进一步分析的起点.

【讲解设计】·重点与难点

例1　已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，$a+b+c=1$，求证：$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geqslant 8$.

证　$\because a+b+c=1$ 且 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，

$\therefore(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)=(\frac{a+b+c}{a}-1)(\frac{a+b+c}{b}-1)(\frac{a+b+c}{c}-1)=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{a+c}{b}\cdot\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8\cdot\frac{abc}{abc}=8.$

点评　①“1”代换是解该题的关键. ②运用综合法证不等式时常用基本不等式.

例2　已知：$a>b>0$，求证：$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.

证　$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}\Leftarrow\frac{(a-b)^2}{4a}<a+b-2\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{4b}\Leftarrow(\frac{a-b}{2\sqrt{a}})^2<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\frac{a-b}{2\sqrt{b}})^2\Leftarrow 0<\frac{a-b}{2\sqrt{a}}<\sqrt{a}-\sqrt{b}<\frac{a-b}{2\sqrt{b}}\Leftarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}\Leftarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}<2<\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\Leftarrow 1+\sqrt{\frac{b}{a}}<2<1+\sqrt{\frac{a}{b}}\Leftarrow\sqrt{\frac{b}{a}}<1<\sqrt{\frac{a}{b}}$，$\because a>b>0$，$\therefore$ 上式显然成立，$\therefore$ 原不等式成立.

点评　①上面表述中，用了“$\Leftarrow$”符号，这里要注意箭头的方向，用分析法时应采用“$\Leftarrow$”，用综合法时则用“$\Rightarrow$”. ②本题亦可用求差法求证.

例3　已知 a、b 为不相等的正数，且 $a^3-b^3=a^2-b^2$，求证：$1<a+b<\frac{4}{3}$.

证　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$，$\because a$、$b$ 为不等正数，$\therefore a-b\neq 0$，$\therefore$ 由 $a^3-b^3=a^2-b^2$ 得：$a^2+ab+b^2=a+b$，$\because a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2=a+b$，$\therefore(a+b)^2>a+b$，$\because a+b>0$，$\therefore a+b>1$.

又由 a、$b>0$ 且 $a^2+ab+b^2=a+b$，$\therefore a+b<\frac{4}{3}\Leftarrow 3(a+b)<4\Leftarrow 3(a+b)^2<4(a+b)\Leftarrow 3(a+b)^2<4(a^2+ab+b^2)\Leftarrow 3a^2+6ab+3b^2<4a^2+4ab+4b^2\Leftarrow a^2-2ab+b^2>0\Leftarrow(a-b)^2>0$，而 $(a-b)^2>0$ 一定成立，$\therefore a+b<\frac{4}{3}$ 成立，综上所述：$1<a+b<\frac{4}{3}$.

点评　①本题的证明中，$a+b>1$ 的证明采用了综合法，$a+b<\frac{4}{3}$ 的证明采用了分析法；②这是一个条件不等式的证明问题，已知条件是一个等式，且左、右两式有次数上的差异，因此，可实施降次变换证明.

例4　记满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合为 M：当 $|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$，若有函数 $g(x)=x^2+2x-1$，则 $g(x)\in M$.

证　$\because|g(x_1)-g(x_2)|=|x_1^2+2x_1-1-x_2^2-2x_2+1|=|x_1^2-x_2^2+2(x_1-x_2)|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2(x_1-x_2)|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)|=|x_1-x_2||x_1+x_2+2|\leqslant(|x_1|+|x_2|+2)(|x_1-x_2|)$，

$\therefore$ 当 $|x_1|\leqslant 1$，$|x_2|\leqslant 1$ 时，

上式$\leqslant 4|x_1-x_2|$，

$\therefore g(x)\in M$.

点评 ①理解题意非常重要.②利用绝对值性质$|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$是解题的关键.

【讲解设计】·思路与方法

例5 设a、b为直角三角形的两直角边的长，c为斜边长，m、n为任意实数，求证：$\dfrac{ma+nb}{\sqrt{m^2+n^2}}\leqslant c$.

提示 应用分析法时需对$ma+nb$大于零或小于等于零进行讨论.

【练习设计】·识记与理解

1. 填空题(用“$>$,$<$,$\geqslant$,$\leqslant$”)：

(1)已知$a>b>0$,则$\lg\dfrac{b}{a}$__$\lg\dfrac{b+1}{a+1}$.

(2)$\sqrt{6}+\sqrt{7}$__$\sqrt{5}+\sqrt{8}$.

(3)已知x、$y\in\mathbf{R}^+$，$(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$__$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

2. 使不等式$a^2>b^2$，$\dfrac{a}{b}>1$，$\lg(a-b)>0$，$2^a>2^{b-1}$都成立的a与b的关系式为______.

3. 当条件为____时，$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$.

4. 若$|a|<1$，$|b|<1$，则$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

5. 已知a、b、$m\in\mathbf{R}^+$，且$a>b$，请用两种方法证明$\dfrac{a+m}{b+m}<\dfrac{a}{b}$.

【练习设计】·巩固与掌握

6. 已知$a+b+c=1$，求证：$ab+bc+ca\leqslant\dfrac{1}{3}$.

7. 设a、b、c、$d\in\mathbf{R}^+$，求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

8. 已知$a+b=1$，求证：$a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$.

【练习设计】·拓展与迁移

9. 已知$a^2+b^2+c^2=1$，求证：$-\dfrac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1$.

10. 设a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且均不大于1，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^3b^3c^3}$.

05 不等式证明方法
——换元法

【概念与规律】

换元是一种重要的数学方法，它在证明不等式成立中具有特殊功效．常见的换元方法有三角换元、均值换元和设差换元．

(1)解题中较常用的三角换元有：

若 $0\leqslant x\leqslant 1$，则可令 $x=\sin\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$ 或 $x=\sin^2\alpha(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$；

若 $x^2+y^2=1$，可令 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$；

若 $x^2-y^2=1$，可令 $x=\sec\alpha$，$y=\mathrm{tg}\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$；

若 $x\geqslant 1$，可令 $x=\sec\alpha(0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2})$．

(2)对对称式(任意互换两字母，代数式不变)和给定字母顺序(如 $a>b>c$)的不等式，则常用增量法进行换元．

(3)换元的目的是通过换元达到减元的目的，以使问题化难为易．

【讲解设计】·重点与难点

例 1 (1)已知 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，求证：$-1\leqslant ax+by\leqslant 1$．

(2)已知 $a^2+b^2\leqslant 1$，求证：$|a^2+2ab-b^2|\leqslant\sqrt{2}$．

证 (1)令 $a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$；$x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha$，则 $ax+by=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha$

$=\cos(\theta-\alpha)$．

$\because -1\leqslant\cos(\theta-\alpha)\leqslant 1$，$\therefore -1\leqslant ax+by\leqslant 1$．

(2)令 $\begin{cases}a=r\cos\theta,\\ b=r\sin\theta,\end{cases}$ $|r|\leqslant 1$，

$\therefore |a^2+2ab-b^2|$

$=|r^2\cos^2\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta-r^2\sin^2\theta|$

$=|r^2\cos2\theta+r^2\sin2\theta|$

$=r^2|\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})|\leqslant\sqrt{2}r^2\leqslant\sqrt{2}$．

点评 ①作三角代换，依三角函数的有界性证明某些条件不等式成立往往比较方便．②要掌握例 1(1)、(2)换元的区别与联系．③三角换元后对角 θ 的限制条件要特别引起注意，即应重视三角不等式与代数不等式转化时的等价性．

例 2 已知 $x+y+z=a$，求证：$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{a^2}{3}$．

证 设 $x=\frac{a}{3}+\alpha$，$y=\frac{a}{3}+\beta$，$z=\frac{a}{3}+\gamma$，

$\because x+y+z=a$，$\therefore \alpha+\beta+\gamma=0$，

$\therefore x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{3}+\frac{2}{3}a(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{a^2}{3}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqslant\frac{a^2}{3}$．

点评 ①均值换元巧妙地把已知条件转化，使原问题变得简单易证．②本题亦可利用 $\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\geqslant(\frac{x+y+z}{3})^2$ 来证明．

例 3 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$(当且仅当 $a=b=c$ 时取等号)．

证 根据 a、b、c 的对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，令 $a=b+x$，$c=b-y$，其中 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，则 $a^3+b^3+c^3-3abc=(b+x)^3+b^3+(b-y)^3-3b(b+x)(b-y)=b^3+3b^2x+3bx^2+x^3+b^3+b^3-3b^2y+3by^2-y^3-3b(b^2-by+bx-xy)=3bx^2+3by^2+3bxy+x^3-y^3=(x^2+xy+y^2)(3b+x-y)=(x^2+xy+y^2)(a+b+c)$，$\because a+b+c>0$，$x$，$y\in\overline{\mathbf{R}^-}$，$\therefore$ 上式大于或等于 0，$\therefore$ 原不等式成立．

【讲解设计】·思路与方法

例 4 已知：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$ 求证：$(1-x)^n+(1+x)^n\leqslant 2^n$．

提示 令 $x=\cos\alpha\ (0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，再利用 $2^n(\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}+\cos^{2n}\frac{\alpha}{2})\leqslant\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=2^n$．

例 5 已知 x、y、z 是小于 1 的正数，并且 $x+y+z=2$，求证：$1<xy+yz+zx\leqslant\frac{4}{3}$．

证 设 $x=1-\alpha$，$y=1-\beta$，$z=1-\gamma$(α、β、γ 为正数)．