21世纪高等院校教材

应用数理统计

主　编　单　伟　张苏梅
副主编　刘庆红　韩　雪　李尚友

科学出版社

21 世纪高等院校教材

应用数理统计

主　编　单　伟　张苏梅
副主编　刘庆红　韩　雪　李尚友

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书针对高等学校化学化工、材料科学类相关专业学生的需求，着重介绍各种基本的数理统计方法. 对方法的原理分析进行简化处理，重点突出方法的应用背景、基本思想和运用技巧，力求循序渐进、深入浅出、层次清晰、叙述严谨. 注重通过对典型例题的分析介绍方法，培养学生应用所学知识解决工程实际问题的能力. 结合数理统计方法适合利用计算机软件辅助计算的特点，并考虑到本科学生的计算机实际应用水平，安排 Excel 软件统计分析功能的介绍，以期学生能对统计分析软件有初步的了解. 全书包括概率论基础、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与正交试验设计、回归分析、Excel 软件的应用等 7 章内容.

本书可以作为高等学校化学化工、材料科学类相关专业本科生的数理统计课程的教材，也可作为相关专业工程技术人员的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用数理统计/单伟，张苏梅主编. —北京：科学出版社，2013

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-038344-0

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①单…②张… Ⅲ. ①数理统计-高等学校-教材
Ⅳ. ①O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 191600 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：朱光兰
责任印制：阎 磊 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2013 年 8 月第一次印刷 印张：11 3/4
字数：236 000

定价：26.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

概率论与数理统计是研究大量随机现象统计规律性的数学学科，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用. 正是概率统计的这种广泛应用性，使得它已成为高等院校各类专业大学生最重要的数学必修课之一. 有别于其他数学基础课程，对于初学者而言概率统计研究的对象更加广泛，涉及的概念众多、方法新颖且应用性很强，较难领会和掌握. 由于该课程本身涉及的数学知识杂、方法多而学时有限，在以往的教学中我们严格遵照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会颁发的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》中对该课程的统一教学要求，在课堂教学中更加侧重概率论部分，把主要时间都花费在了解释概念、讲解方法原理之上，学生的精力大都消耗于各种方法的数学原理的费解之中. 这种教学模式比较有利于学生在数学基本推理和运算等方面能力的巩固提高，但因对于概率统计的实际应用涉及太少，难以达到让学生运用所学方法解决真正的实际问题之效果. 遵循教育部《国家中长期教育改革和发展规划纲要》的指导思想，我们展开了基于应用型人才培养目标的概率论与数理统计课程体系的改革研究，设计全新的概率统计课程教学方案，旨在突破传统的教学模式，更加注重应用能力的培养和科学素质的提高，以求对学生的创新精神和实践能力的培养提高发挥更大作用.

本教材结合化学化工、材料科学类相关专业学生的高等数学基础和专业后续课程的需求，对概率论基础部分以及各种数理统计方法的原理分析进行尽可能的简化处理，重点突出方法的应用背景、基本思想和运用技巧的阐述，同时尽量做到循序渐进、深入浅出、叙述严谨. 注重通过对典型例题的分析介绍方法，培养学生应用所学知识解决工程实际问题的能力. 结合数理统计方法适合利用计算机软件辅助计算的特点，并考虑到本科学生的计算机实际应用水平，第 7 章安排 Excel 软件统计分析功能的介绍，以期学生能对统计分析软件有初步的了解.

本书由单伟、张苏梅主编，刘庆红、韩雪和李尚友参加编写. 在本书的编写过程中，济南大学教务处、数学学院等各级领导给予了极大的关心与支持. 在教材的试用过程中，任课教师提供了许多可行的意见与建议，对以上所有这些真诚的帮助深表谢意.

由衷地感谢科学出版社及相关专家对本书提出修改的意见与建议，为我们完

善书稿内容提供了有力的帮助.

由于编者水平有限，且作为对概率统计教学内容改革的初次尝试，教材中难免有不妥之处，恳请读者提出宝贵意见.

编　者

2013 年 5 月于济南

目　录

第 1 章　概率论基础

自然界和人类社会中所发生的现象大体可分为两种类型：一类现象是在一定条件下必然发生的，如“在标准大气压下纯水加热到 100℃时必然会沸腾”，“同性电荷必相互排斥”等，这类现象统称为**确定性现象**. 另一类现象则不同，它们是事先不可预见的，在一定条件下重复进行观察，可能出现多种不同的结果，而究竟出现哪一种结果，事先又不能完全确定. 此类现象称为**随机现象**. 例如，抛掷一枚硬币观察哪个面朝上；再如，测量一个物体的长度时将会出现的测量误差等. 随机现象虽然具有不确定性，但在大量重复试验或观察中却呈现出一种固有的规律性. 例如，大量重复地抛掷质地均匀对称的硬币时，出现正面向上和出现反面向上的次数比例总是接近一比一的. 这种规律性称为**统计规律性**. 概率论是研究随机现象统计规律的最基础的学科，它从数量角度给出随机现象的描述，为人们认识和利用随机现象的规律性提供了有力的工具.

1.1　随机事件与概率

1.1.1　随机事件及其运算

1. 随机试验与样本空间

为了掌握随机现象及其统计规律性，需要对随机现象进行观察或实验，这种观察的过程称为试验. 若一个试验具有下列三个特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果将会出现.

则称这一试验为**随机试验**，记为 E.

例 1.1　这里给出一些随机试验的例子：

E_1：掷两颗骰子，观察出现的点数.

E_2：一个盒子中有 10 个规格相同的球，其中 2 个是红色的，另外 8 个是蓝色的，搅匀后从中任意摸取一球，观察球的颜色.

E_3：在工厂新生产的一批电视机中任意抽取一台，测试它的使用寿命.

E_4：记录城市某交通路口在指定的某一个小时内的车流量.

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是已知的. 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为

S. 样本空间的元素，即随机试验 E 的每个基本结果，称为 E 的**样本点**.

例 1.2 在例 1.1 中所给出的随机试验的样本空间分别为

S_1：$\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$；

S_2：$\{R,B\}$，其中 R 表示红色，B 表示蓝色；

S_3：$\{t\mid t\geqslant 0\}$；

S_4：$\{0,1,2,3,\cdots\}$.

2. 随机事件

在随机试验中，可能发生的、与试验目的有关的任何事件都称为**随机事件**. 其中，那些每进行一次试验都必然出现且只能出现其中之一的试验的基本结果，称为**基本事件**. 例如，在例 1.1 的 E_1 中，"出现的点数为(4,5)"、"出现的点数之和大于10"都是随机事件，且前者还是基本事件. 为方便起见，人们通常用大写字母 A，B，C 等来表示随机事件.

实际上，基本事件对应着样本空间的样本点，也可以看成是由一个样本点组成的单点集. 而任何一个事件则是由一个或若干个基本事件的组合结果，可以看成是样本空间 S 的一个子集. 例如，在例 1.1 的 E_1 中，事件"出现的点数之和大于 10"可以表示为$\{(5,6),(6,5),(6,6)\}$.

每次试验中都一定发生的事件称为**必然事件**，每次试验中都一定不发生的事件称为**不可能事件**. 样本空间的全集 S，对应的就是必然事件，因而常用 S 表示必然事件. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，但也是样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，是不可能事件. 我们通常也用$\varnothing$表示不可能事件.

3. 事件间的关系与运算

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $A\subset B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**.

(2) 事件 A 与 B 至少有一个会发生的事件，称为事件 A 和 B 的**和事件**，记作 $A\cup B$.

例 1.3 在例 1.1 的 E_1 中，如果 A＝"第一次掷出点数 6"，B＝"第二次掷出点数 6"，则 $A\cup B$＝"至少有一次掷出点数 6"，且

$A\cup B=\{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$.

(3) 事件 A 与 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**积(或交)事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB. 在上例中，$A\cap B$＝"两次掷出的都是 6 点"$=\{(6,6)\}$.

(4) 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$. 在例 1.3 中，$A-B$＝"第一次掷出 6 点而第二次不是 6 点"$=\{(6,1),(6,2),(6,$

3),(6,4),(6,5)}.

(5) 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为**互不相容事件**(或**互斥事件**). 显然,基本事件是两两互不相容的.

(6) 如果 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**,又称**对立事件**. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,也有 $A=S-\overline{A}$.

实际上,事件是样本点的集合,因而事件之间的关系与运算可以用集合之间的关系与运算进行处理. 同样,事件的运算也满足如下运算律:

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

另外,事件的和与积的概念都可以推广,如

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生"这一事件;

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}B_i$ 表示"可列无穷多个事件 $B_i(i=1,2,\cdots)$ 同时发生"这一事件;

等等,上述运算律也可以类似地推广.

1.1.2 随机事件的概率

1. 概率的定义

除必然事件与不可能事件外,任一随机事件在一次试验中都有可能发生,也有可能不发生. 人们研究随机现象的初期首先关注的是某些事件在一次试验中发生的可能性的大小,对这种可能性大小的数学度量,也就是所谓的概率,也称几率.

历史上,曾有人从各个不同的角度试图从正面给事件的概率下一个明确的定义,包括早期的古典概率定义及后来的统计定义. 最终人们发现,就像科学和哲学中的许多基本概念(如物理学中的"力",哲学中的"因果性")一样,很难给它一个无懈可击的精确定义. 为了避免含糊不清,数学上最终用公理化方法给"概率"下了定义,它不直接回答"概率"是什么,而是把"概率"应具备的几条本质特性概括起来,把具有这几条性质的量称为概率,并在此基础上展开概率的理论研究.

定义 1.1 设 S 是随机试验 E 的样本空间,对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,如果 $P(A)$ 满足以下条件:

(1) 非负性:$P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性:$P(S)=1$;

(3) 可列可加性：对于任何两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，总有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由概率的公理化定义，不难推导出概率的一些基本性质，这些性质也是进行概率运算的最基本的法则(各性质的推导证明建议有兴趣的读者自行练习)：

(1) $P(\varnothing)=0$，且对任何事件 A 都有 $P(A)\leqslant 1$.

(2) (有限可加性)　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容事件，则必有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

(3) 若 $A\subset B$，则有 $P(B)\geqslant P(A)$，且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(4) 对任一事件 A，$P(\bar{A})=1-P(A)$.

(5) (加法公式)　对于任意两个事件 A 和 B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

其中，加法公式可以推广到任意有限和的情形. 如设 A_1, A_2, A_3 为 3 个事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} P(A_iA_j) + P(A_1A_2A_3).$$

例 1.4　设 A, B, C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

解　由于 $ABC\subset AB$，而 $P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$，再由加法公式得，A, B, C 至少有一个发生的概率

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \\ &= 3\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

2. 古典概型的计算

概率的计算问题最早起源于古罗马时期的博弈游戏问题，这类问题的模型有两个共同的特点：一是试验的样本空间有限，如掷骰子一次有 6 种结果，四个人分一副扑克牌(不含大、小王)有 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}$ 种结果等；二是试验中每个基本结果出现的可能性相同，如掷骰子掷出 6 个点数的可能性各为 1/6，一个人从一副扑克牌(不含大、小王)中摸 13 张的每一种可能结果的可能性均为 $1/C_{52}^{13}=1/635013559600$. 具有这两个特点的随机试验被称为**古典概型**或**等可能概型**.

在古典概型的假定下，随机现象所有可能发生的基本事件是有限多、互不相容的，因而容易演绎出一个计算任意事件 A 的概率的公式

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 所包含的基本事件的个数}}{\text{样本空间 }S\text{ 所包含的基本事件的总数}}\triangleq\frac{k_A}{n}.$$

例 1.5 盒中有红、黄、白球各一个，有放回地摸 3 次，每次摸一个，观察出现的颜色. 求 $P\{全红\}$，$P\{无红\}$，$P\{有白出现\}$，$P\{全黄或全白\}$，$P\{无白或无黄\}$.

解 从盒中任取一个球有 3 种颜色可能出现，有放回地摸 3 次，所有可能的颜色结果组合对应着所有可能的取法组合，共有 $3\times3\times3=27$ 种，即 $n=27$. 于是有

$$P\{全红\}=\frac{k_{全红}}{n}=\frac{C_1^1C_1^1C_1^1}{27}=\frac{1}{27};$$

$$P\{无红\}=\frac{k_{无红}}{n}=\frac{C_2^1C_2^1C_2^1}{27}=\frac{8}{27};\quad (注:P\{无红\}\neq1-P\{全红\})$$

$$P\{有白出现\}=1-P\{无白\}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27};$$

$$P\{全黄或全白\}=P\{全黄\}+P\{全白\}=\frac{2}{27};\quad (注:全黄,全白是互不相容事件)$$

$$P\{无白或无黄\}=P\{无白\}+P\{无黄\}-P\{无白且无黄\}=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{15}{27}.$$

例 1.6 将 n 个球随机地放到 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去，试求每个盒子至多有一只球的概率(设盒子的容量不限).

解 将 n 只球放入 N 个盒子中，由于每一个球都可以放入 N 个盒子中的任何一个，故 n 个球共有 N^n 种不同的放法(重复排列). 记事件 $A=\{$每个盒子中至多放一个球$\}$，则有利于 A 发生，可以先从 N 个盒子中挑出 n 个盒子，然后依次将 n 个球放入到 n 个盒子，这样 $K_A=C_N^n\cdot n(n-1)\cdots2\cdot1$(也可以直接从 N 个盒子中选 n 个进行选排列). 于是

$$P(A)=\frac{A_N^n}{N^n}.$$

古典概型是一种简单化的数学模型，无需经过任何统计试验即可计算各种可能发生结果的概率，古典概型的计算常常涉及组合数学中的排列组合理论，这种计算是没有误差的；同时，古典概型又是一种理想化的数学模型，它所假想的世界从严格意义上讲是不存在的. 例如，在掷骰子的试验中，骰子质地的不均匀、环境的温度与风速等因素都会对试验结果形成一定的影响，所以六个面出现的可能性通常不是严格均等的.

1.1.3　条件概率与事件的独立性

1. 条件概率与乘法公式

世界万物大多都是互相联系、互相影响的，随机事件也不例外. 在同一个试验中的不同事件之间，通常会存在着一定程度的相互影响. 例如，在天气状况恶劣的情况下交通事故发生的可能性明显比天气状况优良情况下要大得多. 直观上，把在一个事件 A 已发生的前提条件下事件 B 发生的概率，称为事件 B 的条件概率，记为$P(B|A)$.

例 1.7(抓阄问题)　盒中有 10 个球，其中 8 只为白球 2 只为红球. 现从中任取两次，每次取一只，取后不放回(也称**不放回抽样**). 试求：(1)第一次取到红球的概率；(2)已知第一次取到的是红球时，第二次也取到红球的概率；(3)前两次都取到红球的概率.

解　为表述方便，记 $A=\{$第一次取到红球$\}$，$B=\{$第二次取到红球$\}$.

(1) 求 $P(A)$，这是典型的古典概型问题，有

$$P(A)=\frac{2}{10}.$$

(2) 要求的就是 $P(B|A)$，在 A 已发生的前提下，我们明确知道盒中还剩余共 9 个球，8 白一红(这时称样本空间缩减了)，仍然按古典概型计算可得

$$P(B|A)=\frac{1}{9}.$$

(3) 所求可简单地表示为 $P(AB)$，它等同于从 10 个球中一次(或依次)抓取两个，两个都是红球的概率，同理可按古典概率方法求其概率，有

$$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}\quad\left(\text{或 } P(AB)=\frac{2\times 1}{10\times 9}\right).$$

区别于条件概率，事件 B 的概率 $P(B)$ 也称为 B 的无条件概率. 通常情况下，$P(B|A)\neq P(B)$. 例如，就上例而言，结合生活经验可以知道抓阄是公平的，也就是说 $P(B)=P(A)=\dfrac{2}{10}$.

显然，并非所有的条件概率都可以像上例中的 $P(B|A)$ 一样在缩减的样本空间上简单地算出，如该例中的 $P(A|B)$ 就无法这样计算了.

在数学上，条件概率有如下严格定义.

定义 1.2　设 A,B 是两个事件，且 $P(A)\geqslant 0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\tag{1-1}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

注意,式(1-1)既是条件概率的定义式,同时也常作为条件概率的计算公式.

例如,在例 1.7 中 ,若要计算 $P(A|B)$,可有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{9}.$$

由式(1-1)可以得出概率的**乘法公式**:设 $P(A)\geqslant 0$,则

$$P(AB)=P(A)P(B|A),$$

而且这一公式也可以推广到多个事件的情形,如设 $P(A_1A_2A_3)>0$,则有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

当条件概率容易在缩减的样本空间上直接计算时,乘法公式可以帮助我们较容易地计算出多个事件的乘积的概率.

例 1.8 一批产品共 100 件,次品率 10%,每次从中任取一件,取后不放回且连取三次,求在第三次才取到合格品的概率?

解 记 $A_i=\{$第 i 次取到的是合格产品$\}(i=1,2,3)$,则所求为事件 $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 的概率,由于

$$P(\overline{A}_1)=\frac{10}{100},\quad P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{9}{99},\quad P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{90}{98},$$

所以依乘法公式得

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.0083.$$

注 实际上,按古典概率方法可以直接计算出所求概率,读者可自行尝试.

2. 全概率公式与贝叶斯公式

类似例 1.8 的做法,对于一些复杂事件的概率计算,可以先把这些事件分解成若干个较简单的事件的和或者乘积等,然后借助加法公式或乘法公式等求得其概率. 全概率公式和贝叶斯公式就是基于这种思路导出的较常用的两个概率计算公式.

例 1.9(抓阄问题续) 在例 1.7 中,继续求:

(4) 第二次取到红球的概率;

(5) 已知第二次取到的是红球,由此推断第一次取到红球的概率大还是取到白球的概率大.

解 同样仍分别用 A,B 表示第一次、第二次取到红球的事件.

(4) 前面曾说过依据生活常识知 $P(B)=\frac{2}{10}$,而实际上 $P(B)$的计算要较$P(A)$复杂得多. 易知,B 的发生受且仅受事件 A 发生与否的影响. 如果已知 A 发生,则 B 发生的概率为 $P(B|A)=\frac{1}{9}$;如果已知 A 不发生,则 B 发生的概率为 $P(B|\overline{A})=\frac{2}{9}$.

这时,可以先把事件 B 表示成 $B=B(A\cup\overline{A})=BA\cup B\overline{A}$,进而由加法公式和乘法公式可得

$$P(B)=P(BA\cup B\overline{A})=P(BA)+P(B\overline{A})$$
$$=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{2}{10}.$$

(5) 所求实际上就是比较 $P(A|B)$ 和 $P(\overline{A}|B)$ 的大小. 显然,我们无法按缩减的样本空间直接计算这两个条件概率,但在上一问中,我们已经解决了复杂事件 B 的概率计算,现在依据条件概率的定义式再结合乘法公式以及上面对 $P(B)$ 的推导,可以得出

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$
$$=\frac{\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}}{\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}}=\frac{1}{9}.$$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}}{\frac{2}{10}}=\frac{8}{9}.$$

可见,若已知第二次取得的是红球,可推断出第一次取到白球的概率是取到红球的概率的 8 倍.

一般地,若有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$.

则对任一事件 $B\subset S$,有

a) **全概率公式** $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$.

b) **贝叶斯公式** $P(A_i\mid B)=\dfrac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},\quad i=1,2,\cdots,n.$

3. 事件的独立性与伯努利概型

设 A,B 是试验 E 的两个事件,直观上,如果 A 的发生与否对 B 不产生任何影响,就说它们是相互独立的. 这种情况从数学概念上分析,相当于 $P(B|A)=P(B)$(设 $P(A)>0$),这时有 $P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A)P(B)$,因此有以下定义.

定义 1.3 设 A,B 是两事件,如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B), \tag{1-2}$$

则称事件 A,B **相互独立**.

事件的独立性可以推广至多个事件的情形,一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(\geqslant 2)$ 个事件,如果其中任意 2 个,任意 3 个,…,任意 $n-1$ 个以及这 n 个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积,则称**事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

显然,n 个事件相互独立的条件是很强的,远高于它们"两两相互独立".例如,对于三个事件 A,B,C 而言,它们相互独立指的是它们既两两相互独立,即满足

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\end{cases}$$

同时又满足

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

在实际应用中,我们常常是依据直观上对事件间的相互关系得出独立性的判断的.而一旦确知事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的了,那么容易推知它们当中任何一部分事件之间,甚至它们的对立事件之间都也相互独立,进而它们乘积的概率等于概率的乘积.

例 1.10 设有两台自动化设备在工作中,第一台设备在 8 小时内出故障的概率为 10%,第二台在 8 小时内出故障的概率为 15%,求 8 小时内 2 台设备都不出故障的概率.

解 记 $A_i=\{$第 i 台设备出了故障$\}$,$i=1,2$,则 $\overline{A}_1$ 与 $\overline{A}_2$ 相互独立,于是

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=(1-P(A_1))(1-P(A_2))=0.9\times 0.85=0.765.$$

在实际应用中,我们常常需要把同一试验重复进行若干次并对结果进行综合研究分析.具有以下特征的重复进行的试验,称为 n 重**伯努利试验**:

(1) 每一次试验都在相同的条件下进行,且各次试验结果发生的可能性不受其他各次试验结果发生情况的影响,也即这 n 次试验相互独立;

(2) 每次试验都仅考虑两个可能结果:事件 A 和事件 $\overline{A}$,且在每次试验中都有 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p$.

n 重伯努利试验简称伯努利试验或伯努利概型,它是一种重要的、基本的概率模型,许多实际问题,如抛一枚硬币 n 次观察正反面朝上的情况,重复打靶 n 次观察中靶的情况,有放回地抽样检查观察产品的正次品情况等,都可作为伯努利概型.

在 n 重伯努利试验中,我们最关注的是事件 A 恰好发生了 $k(k\leqslant n)$ 次的概率.可以推出,这一概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n,\quad 0<p<1. \tag{1-3}$$

公式(1-3)也称为**二项概率公式**.

例 1.11 某店内有 4 名售货员，根据经验每名售货员平均在 1 小时内用秤 15 分钟. 问该店配置几台秤较为合理.

解 将观察每名售货员在某时刻是否用秤看成一次试验，那么 4 名售货员在同一时刻是否用秤可看成 4 重伯努利试验. 于是问题就转化成求出某一时刻恰有 i 人（$i=1,2,3,4$）在同时用秤的概率，由此做出决断.

由式(1-3)，同一时刻恰有 i 个人同时用秤的事件记为 A_i，$i=1,2,3,4$，则

$$P(A_1)=C_4^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64},$$

$$P(A_2)=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128},$$

$$P(A_3)=C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64},$$

$$P(A_4)=C_4^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}.$$

从计算结果看，一般情况下只有一位售货员用秤的概率最大，故配备 2 台秤就基本可以满足要求.

1.2 随机变量及分布

在近代概率论中，为了更加全面、广泛地研究随机试验的结果，揭示随机现象的统计规律性，人们将随机试验的结果与实数对应起来，将随机试验的结果数量化，引入了随机变量的概念，并借助各种高等数学知识描述、表达进而研究随机现象的各种可能结果以及这些结果分别能以多大的概率发生的问题.

1.2.1 一维随机变量及其分布

1. 随机变量及其分布函数

现实生活中，很多随机现象的试验结果可以直接用数量来表示. 例如，掷一枚骰子出现的点数，做一种试验直到成功为止时所需要进行的试验次数等. 此外，也有一些随机现象的试验结果可以间接地用数量来表示. 例如，在产品检验中，建立对应关系：不合格↔0，合格↔1. 类似地，在抓阄问题（例 1.7）中，可以建立对应：红球↔1，白球↔0. 这样，使得随机试验的每一个可能的结果都可以与一个实数或实数组相对应，这种对应在本质上确定了一个从样本空间 S 到实数集之间的映射，称之为一个**随机变量**，用大写字母 $X,Y,Z,\cdots$表示.

直观地讲，随机变量就是这样一种实值变量，它依赖于某一个随机试验，其取值是随着试验结果的不同而变化的，当试验结果确定之后，它的值也就完全确定了，在试验之前我们可以确知它的可能取值的范围，但不能确定它将取哪一个具体的数值.