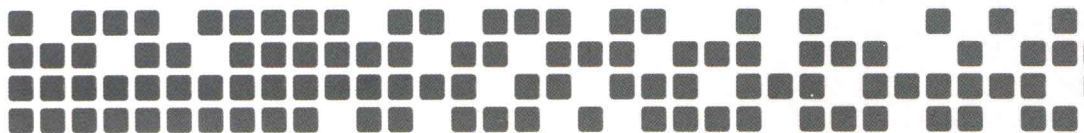


含缺陷结构断裂力学

刘宝良 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

含缺陷结构断裂力学

刘宝良 著



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书系统论述了含缺陷结构的断裂问题,包括基本理论、力学原理、分析方法以及工程应用等。作为失效学体系的理论之一,本书在吸取前人研究成果的基础上,阐述了工程中典型的含缺陷结构的断裂行为。全书共9章,第1章介绍断裂力学的研究对象、研究内容及脆性破坏特征;第2章介绍杂交位移不连续法的基本理论;第3~8章论述多种含缺陷结构的裂纹问题;第9章论述复合型裂纹的断裂与疲劳扩展问题。

本书适合从事断裂力学研究和应用的科技工作者及工程师使用和参考,也可供力学专业的研究生和高年级本科生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

含缺陷结构断裂力学/刘宝良著. — 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2012.10
ISBN 978-7-5603-3813-2

I. ①含… II. ①刘… III. ①结构力学—断裂力学—研究 IV. ①0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 240609 号

策划编辑 王桂芝 孙连嵩 刘 威
责任编辑 王桂芝 任莹莹
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1 092mm 1/16 开 印张 10 字数 220 千字
版 次 2012 年 10 月第 1 版 2012 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3813-2
定 价 49.80 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

裂纹问题（断裂力学）一直是固体力学中最活跃的研究问题之一，出版著作主要源于下列事实：第一，实际工程结构（材料）中总是不可避免地存在着各种不同形式的缺陷（如孔洞）；第二，由于应力集中，孔边很可能起源裂纹。在实际工程中，如机电装备的断裂失效，直接威胁人民的生命和财产安全。

本书简单介绍了断裂力学的历史背景和发展历程，重点论述含缺陷结构的断裂问题，包括基本理论、力学原理、分析方法和工程应用等。作为失效学体系的理论之一，本书在吸取前人研究成果的基础上，阐述了工程中典型的含缺陷结构的断裂行为。

对于三维缺陷-裂纹问题，本书针对三种典型模型进行了研究。表面半球形缺陷（孔洞）-裂纹问题；棱角缺陷（孔洞）-裂纹问题；类表面缺陷-裂纹问题。

对于二维缺陷-裂纹问题，本书利用杂交位移不连续法对下列几种典型模型进行了研究：矩形拉伸板单边缺陷裂纹问题，包括单边裂纹问题、单边半圆孔裂纹问题和单边半方孔裂纹问题；矩形拉伸板双边裂纹问题，包括双边裂纹、双边半圆孔裂纹问题和双边半方孔裂纹问题；矩形拉伸板中心裂纹问题，包括中心裂纹问题、中心圆孔裂纹问题和中心方孔裂纹问题。

中心切槽裂纹板拉伸试样包括两个模型，即中心切槽圆弧根部裂纹板拉伸试样和中心切槽角形根部裂纹板拉伸试样。利用杂交位移不连续法，对中心切槽裂纹板拉伸试样进行了详细的分析。

针对复合型裂纹的断裂与疲劳扩展问题，本书建立了复合型断裂准则，介绍了复合型裂纹的疲劳扩展等问题。

本专著在撰写过程中得到了哈尔滨工业大学闫相桥教授的指导和帮助，多处引用了闫相桥教授前期的研究成果；哈尔滨工业大学工程力学专业肖新科博士、刘国仟博士和王宝

来博士等，以及黑龙江科技学院王建国、南景富、闫龙海、郝俊才、高国付、宋志勇、于丽艳、乔牧等同事在本书的出版过程中也给予了大量的帮助；本专著在撰写过程中参考了大量中外文献，在此对大家及相关作者一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

作 者

2012 年 3 月

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 引言	1
1.2 脆性破坏特征	2
1.3 断裂力学的研究对象	3
1.4 断裂力学的研究内容	6
第 2 章 杂交位移不连续法	7
2.1 引言	7
2.2 杂交位移不连续法	7
2.3 应力强度因子的计算公式	16
第 3 章 表面半球形缺陷-裂纹问题	17
3.1 引言	17
3.2 表面半圆形裂纹问题	19
3.3 无限大体表面半球形孔洞-裂纹问题	22
3.4 有限大体中的表面缺陷裂纹	25
3.5 表面缺陷对应力强度因子的影响	26
3.6 裂纹体厚度对应力强度因子的影响	31
3.7 后自由表面对应力强度因子的影响	32
3.8 本章小结	36
第 4 章 棱角缺陷-裂纹问题	37
4.1 引言	37
4.2 棱角裂纹问题	38
4.3 无限大体棱角缺陷-裂纹问题	39
4.4 平行于裂纹的边界的影响	41
4.5 本章小结	42
第 5 章 一类表面缺陷-裂纹问题	43
5.1 引言	43
5.2 数值方法	45
5.3 数值算例	47
5.4 表面圆孔-裂纹问题	51

5.5 表面方孔-裂纹问题	53
5.6 本章小结	55
第 6 章 矩形板缺陷-裂纹问题	56
6.1 引言	56
6.2 矩形拉伸板单边缺陷裂纹问题	56
6.3 矩形拉伸板双边缺陷裂纹问题	67
6.4 矩形拉伸板中心缺陷裂纹问题	78
6.5 本章小结	100
第 7 章 无限大板中孔边裂纹问题	102
7.1 引言	102
7.2 Bueckner 原理普遍化	103
7.3 数值算例	104
7.4 拉伸载荷作用下无限大板中孔-裂纹问题	107
7.5 内部压力载荷作用下无限大板中孔-裂纹问题	117
7.6 本章小结	124
第 8 章 切槽根部裂纹问题研究	126
8.1 引言	126
8.2 数值算例	127
8.3 拉伸载荷作用下矩形板中心切槽根部裂纹问题	129
8.4 拉伸载荷作用下矩形板双边切槽根部裂纹问题	134
8.5 本章小结	139
第 9 章 关于复合型裂纹的断裂与疲劳扩展问题的研究	140
9.1 引言	140
9.2 复合型裂纹的断裂	141
9.3 复合型裂纹的疲劳扩展	145
9.4 本章小结	150
参考文献	152

第1章 绪 论

1.1 引 言

长期以来,工程材料与结构的广泛使用,使人类面临着大量的机遇和挑战。早在 20 世纪初期,人们在使用各种材料尤其是金属材料的长期实践中,就已经观察到大量的断裂现象。断裂力学和其他学科一样,是在生产实践中产生和发展起来的一门新兴学科。断裂力学 20 世纪 70 年代得到快速发展,它应用力学成就,研究含缺陷材料和结构的破坏问题。由于它与材料或结构的安全直接有关,因此尽管它出现时间很短,但实验和理论均有了迅速的发展,已开始为生产服务。

工程断裂是危险性和破坏性较大的事故,1920 年,英国的 Griffith 尝试解释玻璃的实际强度远低于理论强度的原因。他以材料内部存在缺陷的观点为基础,提出在一定条件下,微小缺陷或裂纹将失稳扩展,导致材料或结构的破坏。他的理论仅适用于像玻璃这类的完全脆性材料,而这种材料在工程中极为少见,所以没有得到推广和发展。

随着现代生产的发展,新材料、新产品和新工艺不断出现,在产品安装、试验和运行过程中,往往发生脆断事故,多数事故在低于材料的屈服极限时发生,造成的损失特别严重。这些破坏事故用传统的强度观点和方法无法分析和衡量。

通过对大量破坏事故的研究,人们发现低于应力脆性破坏的主要原因是实际结构中存在各种缺陷或裂纹,这些裂纹的存在显著地降低了结构材料的实际强度。

从下面几个例子中可以看出裂纹对结构破坏的影响:

(1) 1943~1947 年,美国近 500 艘全焊船中发生了 1 000 多起脆性破坏,其中 238 艘船完全报废,有的甚至断成两截。为了分析原因,研究人员从 100 多个损坏处割下试件进行试验,结论是:事故总是在有焊接缺陷等的应力集中处产生;当气温降到 -3°C 和水温降到 4°C 时断裂容易发生;破坏处的冲击韧性 a_k 值低于未破坏处的 a_k 值。

(2) 1944 年, Cleveland 发生的液化气罐的灾难性大破裂事故令人胆战心惊。据 Atallah 报道: 79 座房屋、两个工厂以及大约 217 辆汽车在这次事故中被彻底毁坏。另外,还有 35 座房屋和 13 个工厂遭到严重破坏。各类财产损失总和达 600~700 万美元。事故中,破坏的容器泄出大量液化气,接着这些液化气被难以预防的因素点燃,大火和随之而来的爆

炸使130人丧生,300人重伤。地下管道爆炸掀起了整个街道路面,上百间房屋遭到毁坏……爆炸时的火球高达2 800英尺,甚至有被烤熟的鸟从天上掉下来。

(3) 1947年,苏联4 500 m³的大型石油储罐底部和下部的壳连接处,在气温降到-43℃时,形成大量裂纹,造成储罐的破坏。事后的分析认为:在焊接处,存在由焊裂、焊瘤和未焊透引起的各种应力集中;在温度降低时,储罐材料CT₃钢的塑性明显下降;由于焊接和罐的内外温差,造成较高的内应力。

(4) 20世纪50年代初,美国北极星导弹固体燃料发动机壳体在试验时发生爆炸,材料使用 $\sigma_s=1\ 372\text{ MN/m}^2$ 的高强度合金,传统的强度和韧性指标全部合格,而且爆炸时的工作应力远低于材料的许用应力。事后多方面研究认为:破坏是由宏观裂纹(深为0.1~1 mm)引起的,裂纹源可能是焊裂、咬边、杂质和晶体开裂等。

(5) 1969年,美国F-111飞机在执行飞行训练途中做投弹恢复动作时,左翼脱落,导致飞机坠毁。当时的飞行速度、总重量和过载等指标远低于设计指标,主要的原因是制造时热处理不当,机翼枢轴出现缺陷,漏检后经常疲劳载荷作业,裂纹继续扩展,最后造成低应力破坏。

从上述几个典型事故可看出,脆性总是由宏观裂纹引起的。这种裂纹由冶金夹杂物、加工和装配、疲劳载荷、工作环境(如介质、高温等)等引起。对于大多数结构和零件来说,宏观裂纹的存在是不可避免的。带裂纹材料的强度,取决于材料对裂纹扩展的抗力,这种抗力由材料内部属性决定。应用弹、塑性理论和新的实验技术,研究裂纹尖端附近的应力、应变场和裂纹扩展规律,由此产生了新的力学分支——断裂力学。

1.2 脆性破坏特征

工程结构破坏事故的综合分析表明,脆性破坏有以下特征:

(1) 尽管结构是由有延性的材料制成的,但大多数工程结构的灾难性破坏具有脆性的特征,也就是说只发生少量塑性变形。

(2) 大多数脆性破坏发生在低温环境下。

(3) 大多数脆性破坏是低应力破坏,也就是破坏瞬时的名义应力远低于材料屈服应力。

(4) 大多数破坏起始于缺陷、孔边、缺口根部以及出口舱角等结构不连续部位。

(5) 破坏源通常是预先存在的或服役过程中出现的缺陷或小裂纹。

(6) 高强材料制成的结构,容易产生脆性破坏。

(7) 脆性破坏的传播速度很高,通常是介质纵波速度的1/4~1/3。

(8) 高速撞击容易造成结构脆性破坏。

掌握这些特征,有助于发展新的设计思想,以便有效防范断裂事故的发生。

1.3 断裂力学的研究对象

我们知道, 构件的断裂往往可以分成以下几个阶段:

(1) 裂纹的生成。裂纹的生成主要有以下几个方面:

①由于环境(疲劳、腐蚀介质、高温和联合作用等)的影响, 在构件的圆角应力集中处, 经过一段使用时间产生宏观微小裂纹;

②材料中原来就存在的缺陷;

③在加工过程中出现裂纹。

(2) 裂纹的亚临界扩展。由于环境的影响, 在工作过程中, 宏观微小裂纹逐步缓慢地扩展。

(3) 断裂开始。在工作应力下, 裂纹逐渐扩展, 达到临界长度, 构件突然失稳破坏。

(4) 断裂传播。失稳的裂纹以高速传播, 速度可达在材料中声速的 $1/4$ 。

(5) 断裂停止。裂纹失稳后可以穿过整个结构, 使构件破坏; 或在一定条件下, 裂纹停止。

以上是宏观裂纹发生和发展的几个阶段。断裂一词的含义很广, 应包括宏观的断裂现象和微观结构的破坏机理。断裂力学从力学侧面研究宏观的断裂现象, 包括宏观裂纹的生成、扩展、失稳开裂、传播和止裂。微观结构的破坏机理属于断裂物理的研究范围。但是, 近代的趋向是宏观断裂现象应该和微观断裂过程联系起来, 否则机理不清, 许多现象难以解释。因此, 目前它们之间的分界线已不那么明显。

从工程应用角度看, 断裂力学与材料力学类似, 是材料力学的发展与充实。断裂力学即在大量实验的基础上研究带裂纹材料的断裂韧度(属于广义的材料强度范围), 带裂纹构件在各种工作条件下裂纹的扩展、失稳和止裂的规律, 并应用这些规律进行设计, 以保证产品的构件安全可靠。

断裂力学的理论基础是弹性力学、塑性力学和黏弹性力学等。

断裂力学和材料力学的区别在于材料力学研究完整的材料, 而断裂力学研究带裂纹的材料。虽然断裂力学是材料力学的发展和补充, 但是断裂力学的设计思想与材料力学的设计思想不同, 其差别可从以下几方面来看。

1.3.1 静载荷情况

在静载荷作用下, 传统的强度条件是要使最大计算应力小于材料强度指标, 即

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_s}{n_s} \quad (\text{屈服}) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_b}{n_b} \quad (\text{破坏}) \quad (1.2)$$

式中, σ_s 和 σ_b 分别为材料的屈服极限和强度极限; n_s 和 n_b 分别为相应的安全系数。

经大量带表面裂纹的高强度钢试件拉伸试验, 证明其断裂应力与裂纹深度 α 的平方根成反比, 即

$$Y\sigma_C\sqrt{\pi\alpha} = K_{IC} \quad (1.3)$$

式中, σ_C 是试件所受的断裂应力; α 是裂纹深度; Y 是形状系数, 与试件几何形状、载荷条件和裂纹位置有关; 常数 K_{IC} 是材料的断裂韧性, 是表示材料抵抗裂纹失稳扩展能力的一个物理参量。已知裂纹深度 α , 则式 (1.1) 可写成

$$\sigma_C = \frac{K_{IC}}{Y\sqrt{\pi\alpha}} \quad (1.4)$$

或已知工作应力 σ , 则有

$$\alpha_C = \frac{K_{IC}^2}{Y^2\pi\sigma_C^2} \quad (1.5)$$

式 (1.4) 中的 σ_C 称为剩余强度, 式 (1.5) 中的 α_C 称为临界裂纹尺寸。

断裂应力和裂纹深度的关系如图 1.1 所示, 由图可看出, 随着裂纹深度的增加, 断裂应力值降低得很快。令式 (1.3) 中 $\sigma\sqrt{\pi\alpha} = K_I$, 则断裂力学中的裂纹失稳准则是

$$K_I \leq \frac{K_{IC}}{n} \quad (1.6)$$

式中, K_I 称为裂纹尖端的应力强度因子; n 是相应的安全系数。

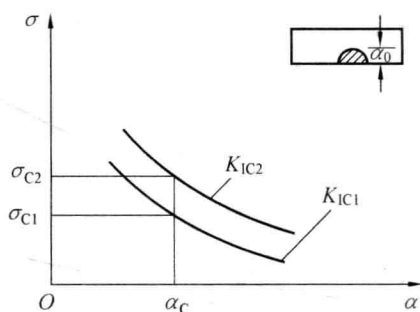


图 1.1

因为断裂力学考虑了裂纹的存在, 根据裂纹失稳准则得出的断裂应力与传统的强度条件得出的结果不一定相同。例如, 有两种材料: 第一种材料的 σ_s 和 σ_b 较高, 但是断裂韧性 K_{IC1} 比较低; 第二种材料的 σ_s 和 σ_b 较低, 但是断裂韧性 K_{IC2} 较高, 选用这种材料有利。所以, 盲目地追求高强度材料, 并不能保证构件安全可靠。

1.3.2 循环载荷情况

传统的疲劳设计是用光滑试件绘制 $S-N$ 曲线, 求出下限应力 σ_{-1} , 称为疲劳极限, 如果最大工作应力满足

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{-1} / n_{-1} \quad (1.7)$$

即可。式中, n_{-1} 为循环载荷时的安全系数, 并且认为凡有缺陷的构件, 一件也不能应用。

断裂力学的观点是: 带裂纹的构件, 只要裂纹不到临界长度(或深度), 仍可以使用; 在循环载荷作用下, 裂纹缓慢扩展, 直至达到临界长度时, 构件才失稳破坏, 作用载荷每循环一周, 用裂纹的扩展量 $\frac{da}{dN}$ 表示, 为材料的一个指标, 表明材料抵抗裂纹扩展能力。

断裂力学区分两种寿命, 材料的破断寿命为

$$N_f = N_i + N_p \quad (1.8)$$

式中, N_i 为裂纹发生寿命; N_p 为剩余寿命。如初始裂纹深度 a_i 、临界裂纹深度 a_c 和裂纹扩展速率 $\frac{da}{dN}$ 已知, 则剩余寿命由

$$N_p = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{\left(\frac{da}{dN}\right)} \quad (1.9)$$

求出。大量试验证明

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1.10)$$

式中, C 与 m 是材料常数; $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ 是循环载荷的最大与最小应力强度因子的差, 或称应力强度因子幅度。

在断裂力学中, 与疲劳极限相当的是循环载荷的门槛值 ΔK_{th} , 当应力强度因子幅度小于门槛值时, 裂纹不扩展。这两个材料指标 $\frac{da}{dN}$ 和 ΔK_{th} , 都可供设计使用。

由此可见, 断裂力学对循环载荷作用的研究, 充实和深化了材料力学的疲劳理论。

1.3.3 腐蚀介质下的情况

对于腐蚀介质中受拉应力的构件, 传统设计是用光滑试件在腐蚀介质中作试验, 记录作用的应力和破断时间的曲线, 即 $\sigma-t$ 曲线。以曲线的下限应力值作为设计标准, 只要工作应力小于这一临界应力, 构件就是安全的。在应力腐蚀情况下, 传统设计不允许构件存在裂纹。

断裂力学从带裂纹构件的实验研究出发, 认为在腐蚀介质中, 受拉应力构件是否安全, 要看裂纹的应力强度因子 K_I 是否达到或超过应力腐蚀界限的应力强度因子 K_{ISCC} , 即裂纹稳定条件为

$$K_I \leq K_{ISCC} \quad (1.11)$$

K_{ISCC} 是材料在应力腐蚀条件下, 衡量材料抵抗裂纹失稳断裂能力的指标。

材料的另一指标是应力腐蚀裂纹扩展速率 $\frac{da}{dt}$, 表示材料抵抗应力腐蚀裂纹扩展的能力。与疲劳设计中剩余寿命的求法相同, 在应力腐蚀情况下, 构件的剩余寿命为

$$t_r = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{\left(\frac{da}{dt}\right)} \quad (1.12)$$

综上所述, 断裂力学出现以后, 我们对宏观的断裂规律有了进一步的认识, 对传统的设计思想进行了完善与补充。不仅对有缺陷构件进行剩余强度和寿命的分析, 以保证产品安全可靠, 或制定正确合理的验伤标准, 而且在选材、改善工艺、制造新材料等方面的研究也在逐步深入。

1.4 断裂力学的研究内容

断裂力学的理论基础始于线性弹性力学, 据此发展成为研究脆性断裂的线弹性力学。目前线弹性力学已经发展得比较成熟, 在生产中得到普遍应用。

由于裂纹尖端附近的应力集中, 必然产生塑性区, 当塑性区达到一定尺寸时, 它对材料的影响不能忽略, 线弹性理论已不适用。于是, 对于裂纹尖端附近塑性区的研究, 发展成为弹塑性断裂力学。目前, 在这方面的研究还不是很成熟, 是断裂力学研究中的一个重要课题。

当裂纹失稳后, 断裂开始, 裂纹迅速扩展, 必须考虑材料的惯性, 这属于断裂动力学的范畴, 对于研究止裂问题极为重要。这方面的研究工作已经开始, 由于它的复杂性, 还没有得到重要的、能够在工程中广泛应用的成果。

对材料断裂的研究必须深入微观领域, 否则断裂的机理会弄不清楚, 对宏观断裂的现象不能深入了解, 甚至一些宏观现象也无法解释。这方面的研究工作已经开始, 而且将发展成为微观断裂力学, 这是跨学科的内容。

第 2 章 杂交位移不连续法

2.1 引言

最近 Yan 和 Liu 提出的杂交位移不连续法 (Hybrid Displacement Discontinuity Method) (一种边界元法) 是一种数值求解平面弹性裂纹问题 (包括无限大、有限大及半无限大板中的裂纹问题、多裂纹相互作用问题、主裂纹与微裂纹相互作用问题、主裂纹与微孔洞相互作用问题、源于孔洞的裂纹问题、复合型裂纹问题、多裂纹疲劳扩展问题) 准确而有效且简单的方法。在本节中对这种方法作了较详细的描述, 包括数值方法的描述、方法的准确性及有效性问题的描述。

2.2 杂交位移不连续法

本节在平面应变下 Kelvi 问题的基础上, 描述平面弹性裂纹分析的杂交位移不连续法, 该方法由常位移不连续单元和裂尖位移不连续单元构成。

2.2.1 常位移不连续单元

无限大平面体中在位置 $|x| < a, y=0$ 处具有常位移不连续量 $D_i = (D_x, D_y)$ 的定义为 (见图 2.1)

$$\begin{aligned} D_x &= u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \\ D_y &= u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) \end{aligned} \quad |x| < a, \quad y = 0 \tag{2.1}$$

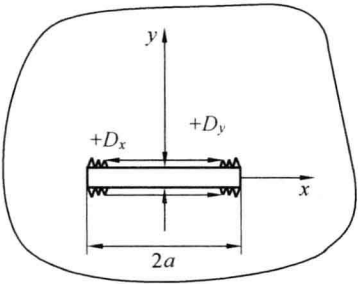


图 2.1 常位移不连续量 D_x, D_y 示意图

此问题的解答是由 Crouch 与 Starfield 获得的, 位移场和应力场为

$$\begin{aligned} u_x &= D_x[2(1-\nu)F_3(x, y) - yF_5(x, y)] + D_y[-(1-2\nu)F_2(x, y) - yF_4(x, y)] \\ u_y &= D_x[(1-2\nu)F_2(x, y) - yF_4(x, y)] + D_y[2(1-\nu)F_3(x, y) - yF_5(x, y)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2GD_x[2F_4(x, y) + yF_6(x, y)] + 2GD_y[-F_5(x, y) + yF_7(x, y)] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_x[-yF_6(x, y)] + 2GD_y[-F_5(x, y) - yF_7(x, y)] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_x[-F_5(x, y) + yF_7(x, y)] + 2GD_y[-yF_6(x, y)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 G 和 ν 分别为材料剪切模量和泊松比。

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - \right. \\ &\quad (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \\ &\quad \left. (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} f_{,x} &= F_2(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} [\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2}] \\ f_{,y} &= F_3(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ f_{,xy} &= F_4(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,xx} &= -f_{,yy} = F_5(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,xyy} &= -f_{,xxx} = F_6(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right\} \\ f_{,yyy} &= -f_{,xxy} = F_7(x, y) = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$D_i = D_i(\xi) \quad (i=1,2)$$

$$\begin{aligned} du_x &= D_x(\xi)[2(1-\nu)T_3(x, y, \xi, d\xi) - yT_5(x, y, \xi, d\xi)] + \\ &\quad D_y(\xi)[-(1-2\nu)T_2(x, y, \xi, d\xi) - yT_4(x, y, \xi, d\xi)] \\ du_y &= D_x(\xi)[(1-2\nu)T_2(x, y, \xi, d\xi) - yT_4(x, y, \xi, d\xi)] + \\ &\quad D_y(\xi)[2(1-\nu)T_3(x, y, \xi, d\xi) - yT_5(x, y, \xi, d\xi)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
d\sigma_{xx} &= 2GD_x(\xi)[2T_4(x, y, \xi, d\xi) + yT_6(x, y, \xi, d\xi)] + \\
&\quad 2GD_y(\xi)[-T_5(x, y, \xi, d\xi) + yT_7(x, y, \xi, d\xi)] \\
d\sigma_{yy} &= 2GD_x(\xi)[-yT_6(x, y, \xi, d\xi)] + \\
&\quad 2GD_y(\xi)[-T_5(x, y, \xi, d\xi) - yT_7(x, y, \xi, d\xi)] \\
d\sigma_{xy} &= 2GD_x(\xi)[-T_5(x, y, \xi, d\xi) + yT_7(x, y, \xi, d\xi)] + \\
&\quad 2GD_y(\xi)[-yT_6(x, y, \xi, d\xi)]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

在前面等式中的函数 $T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ 如下定义:

$$\begin{aligned}
T_2(x, y, \xi, d\xi)/d\xi &= V_2(x, y, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \times \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \\
T_3(x, y, \xi, d\xi)/d\xi &= V_3(x, y, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \times \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} \\
T_4(x, y, \xi, d\xi)/d\xi &= V_4(x, y, \xi) = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \times \frac{x-\xi}{\{(x-\xi)^2 + y^2\}^2} \\
T_5(x, y, \xi, d\xi)/d\xi &= V_5(x, y, \xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \times \frac{(x-\xi)^2 - y^2}{\{(x-\xi)^2 + y^2\}^2} \\
T_6(x, y, \xi, d\xi)/d\xi &= V_6(x, y, \xi) = \frac{2}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(x-\xi)^3}{[(x-\xi)^2 + y^2]^3} - \frac{3(x-\xi)y^2}{[(x-\xi)^2 + y^2]^3} \right\} \\
T_7(x, y, \xi, d\xi)/d\xi &= V_7(x, y, \xi) = \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{3(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2 + y^2]^3} - \frac{y^2}{[(x-\xi)^2 + y^2]^3} \right\}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

则有如下积分

$$U_{ij}(x, y) = \int_0^{4a} D_j(\xi) V_i(x, y, \xi) d\xi \quad (i=2, 3, \dots, 7; j=1, 2) \tag{2.9}$$

在重点 $P(x, y)$ 的位移和应力可以得到

$$\begin{aligned}
u_x &= [2(1-\nu)U_{3x}(x, y) - yU_{5x}(x, y)] + [-(1-2\nu)U_{2y}(x, y) - yU_{4y}(x, y)] \\
u_y &= [(1-2\nu)U_{2x}(x, y) - yU_{4x}(x, y)] + [2(1-\nu)U_{3y}(x, y) - yU_{5y}(x, y)]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G[2U_{4x}(x, y) + yU_{6x}(x, y)] + 2G[-U_{5y}(x, y) + yU_{7y}(x, y)] \\
\sigma_{yy} &= 2G[-yU_{6x}(x, y)] + 2G[-U_{5y}(x, y) - yU_{7y}(x, y)] \\
\sigma_{xy} &= 2G[-U_{5x}(x, y) + yU_{7x}(x, y)] + 2G[-yU_{6y}(x, y)]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

如果位移不连续函数采用如下形式, 即

$$\begin{aligned}
 D_x &= \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] D_{1x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[- \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] D_{2x} \\
 D_y &= \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] D_{1y} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[- \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] D_{2y}
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

因此有

$$B_i(x, y) = \int_0^{4a} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] V_i(x, y, \xi) d\xi \quad (i=2, 3, \dots, 7) \quad (2.13a)$$

$$C_i(x, y) = \int_0^{4a} \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[- \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\xi}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \right] V_i(x, y, \xi) d\xi \quad (i=2, 3, \dots, 7) \quad (2.13b)$$

显然,我们可以得到

$$\begin{aligned}
 u_y &= D_{1x}[(1-2\nu)B_2(x, y) - yB_4(x, y)] + \\
 &\quad D_{1y}[2(1-\nu)B_3(x, y) - yB_5(x, y)] + \\
 &\quad D_{2x}[(1-2\nu)C_2(x, y) - yC_4(x, y)] + \\
 &\quad D_{2y}[2(1-\nu)C_3(x, y) - yC_5(x, y)]
 \end{aligned} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= 2GD_{1x}[-yB_6(x, y)] \\
 &\quad 2GD_{1y}[-B_5(x, y) - yB_7(x, y)] + \\
 &\quad 2GD_{2x}[-yC_6(x, y)] + \\
 &\quad 2GD_{2y}[-C_5(x, y) - yC_7(x, y)]
 \end{aligned} \quad (2.14b)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= 2GD_{1x}[-B_5(x, y) + yB_7(x, y)] + \\
 &\quad 2GD_{1y}[-B_6(x, y)] + \\
 &\quad 2GD_{2x}[-C_5(x, y) + yC_7(x, y)] + \\
 &\quad 2GD_{2y}[-yC_6(x, y)]
 \end{aligned} \quad (2.14c)$$

对于一个任意的主节点 $P(x, y)(y=0)$, 能通过下面的积分给出解析解。对于 $x > 0$ 时, 可得