

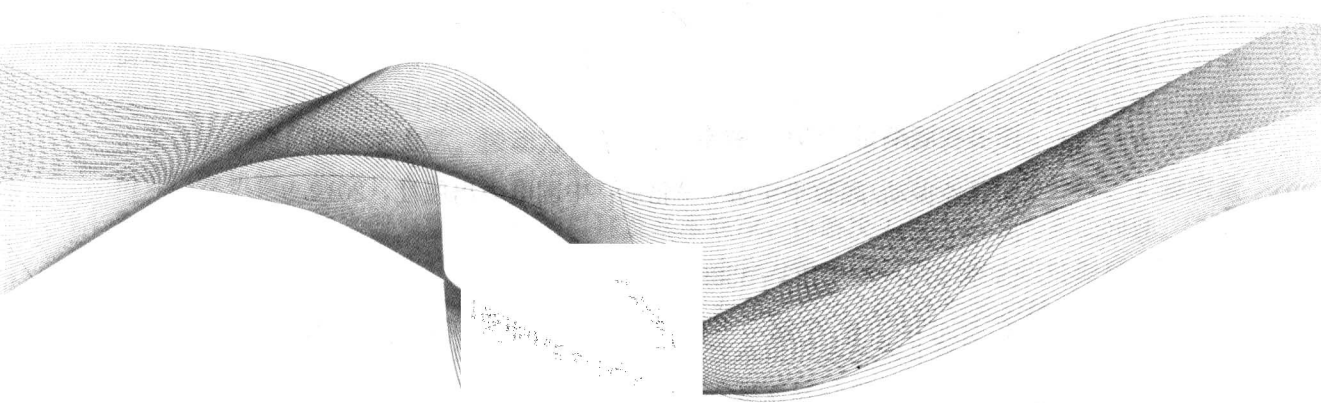
研究生教材

顾致平 主编

非线性振动

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

研究生教材



非线性振动

主 编	顾致平	李志军
编 写	刘金涛	王 霞
	张文荣	
主 审	史永高	



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书是研究生教材。全书共分 5 章, 简明系统地介绍了非线性振动的基本概念、基本理论和基本的分析方法以及各种典型的非线性振动现象。本书在取材与编排上有以下特点: 一是重点阐述非线性振动的基础理论和基本的分析方法, 同时注意理论与实际的结合; 二是在总结多年教学经验的基础上, 注重介绍基本概念, 突出重点, 分散难点, 力求做到深入浅出; 三是注意与相关课程间的衔接。

本书可作为工科专业的研究生教材, 也可作为普通高等院校工科专业高年级学生的教材, 还可以作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

非线性振动/顾致平主编. —北京: 中国电力出版社, 2012.9
研究生教材

ISBN 978 - 7 - 5123 - 3539 - 4

I. ①非… II. ①顾… III. ①非线性振动—研究生—教材
IV. ①O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 225953 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2012 年 11 月第一版 2012 年 11 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 10 印张 240 千字

定价 21.00 元

敬 告 读 者

本书封底贴有防伪标签, 刮开涂层可查询真伪

本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

前言

自然界和工程技术中,普遍存在着物体的往复运动或状态的循环变化。这类现象称为振荡。例如大海的波涛起伏、花的日开夜闭、钟摆的摆动、心脏的跳动、经济发展的高涨和萧条等形形色色的现象,都具有明显的振荡特性。振动是一种特殊的振荡,即平衡位置附近微小或有限的振荡。如声波和超声波、工程技术中的机器和结构物的机械振动、无线电和光学中的电磁振荡等。从最小的粒子到巨大的天体,从简单的摆动到复杂的生物体,无处不存在振动现象。有时人们力图防止或减小振动,有时又力图制造和利用振动。尽管振动现象的形式多种多样,但有着共同的客观规律和统一的数学表达形式。因此,人们试图建立统一的理论来进行研究,即振动力学。振动力学是力学、声学、无线电、电子学、自动控制理论等学科,以及机械、航空、土木、水利等工程学科的理论基础之一。它应用数学分析、实验测量和数值计算等方法来研究振动现象的机理及基本规律,以解决工程实际中的振动问题。

由于所描述振动的数学模型的不同,振动理论分为线性振动理论和非线性振动理论。线性振动理论适用于线性系统,即质量不变、弹性力和阻尼力与运动参数成线性关系的系统,其数学描述为线性常系数常微分方程。不属于线性系统的系统为非线性系统,研究非线性系统的振动理论就是非线性振动理论。线性振动理论是对振动现象的近似描述,在振幅足够小的大多数情况下,线性振动理论可以足够准确地反映振动的客观规律。频率、振幅、相位、激励、响应、模态等都是在线性理论中建立起来的基本概念。

随着近代工程技术的迅速发展,许多工业部门中需要设计和建造各种新的大型复杂工程结构,诸如航天飞机、海洋石油平台、大型电站与核动力工程等,为了既保证安全可靠,又经济合理,都提出了系统的非线性及随机载荷作用下的动态分析问题;机械工程中传统产品改型也需要寻找新的设计方法,如车辆要分析随机疲劳来确定其寿命、挖掘机要考虑动强度、精密机床需要从整体动态分析找到提高加工精度的途径等。采用常规的静力设计和经验设计的方法是无法实现的。

实际系统中广泛存在着各种非线性因素,如电场力、磁场力、万有引力等作用力非线性,法向加速度、科氏加速度等运动学非线性,非线性本构关系等材料非线性,弹塑性大变形等几何非线性等。因此,工程实际中的振动系统绝大多数都是非线性系统。

本书系统地介绍了非线性系统振动的基础理论及其在工程技术中的应用。尽管对于大多数机械系统而言,线性振动理论已能解释很多振动现象和解决很多的工程实际问题,但是在实际问题中往往还会遇到一些线性振动理论所不能解释的现象。随着工程技术和计算技术的发展,非线性振动理论不仅在机械系统方面,而且在无线电、自动控制等领域中已有了很大的发展和广泛的应用。例如单摆的周期随着摆幅的增大,它的响应并非按线性变化增加。由此可见,线性系统中熟知的等时性、叠加原理,是在一定条件下才成立的。关于什么是属于线性振动的问题,在未说明该系统预期的工作范围之前是没有确切答案的。这是因为系统中某些部件的响应和激励之间的关系可以依赖于这个工作范围。严格来说,几乎所有的振动问

题都应该归结为非线性的微分方程，只是在微幅振动的条件下忽略非线性项，经过线性化而得到线性微分方程，但是这是要小心从事的。以后将会看到，有时非线性项将会对运动性质带来本质上的变化。

本书简明而系统地介绍了非线性振动的基本概念、基本理论和基本的分析方法，第1章介绍单自由度保守系统，第2章介绍单自由度非保守系统的非强迫振动，第3章介绍单自由度系统的强迫振动，第4章介绍单自由度系统的参数振动，第5章介绍有限自由度系统的自由振动和强迫振动。通过这些基本内容简明扼要地阐述典型的非线性振动现象和求解非线性振动问题的常用方法。

本书在取材与编排上有以下特点：一是重点阐述非线性振动的基础理论和基本的分析方法，同时注意理论与实际的结合；二是在总结多年教学经验的基础上，注重介绍基本概念，突出重点，分散难点，力求做到深入浅出；三是注意与相关课程间的衔接。

本书第1章由王霞编写，第2章由张文荣编写，第3章由李志军编写，第4章由刘金涛编写，第5章由顾致平教授编写，并对全书统稿。通过这些基本内容简明扼要地阐述典型的非线性振动现象和求解非线性振动问题的常用方法。

本书得到西安工业大学教务处、研究生部的大力支持，还得到西安工业大学出版基金的资助，对此作者表示衷心的感谢！感谢史永高教授对本书提出的宝贵意见和建议。

本书可作为工科专业的研究生教材，也可作为普通高等院校工科专业高年级学生的教材，还可以作为工程技术人员的参考书。

在编写过程中，作者深感知识不足，疏误在所难免，敬请广大读者不吝指正。

编 者

2012年7月于西安

目 录

前言

第 1 章 单自由度保守系统	1
1.1 单自由度保守系统实例	1
1.2 定性分析方法	2
1.3 定量分析方法	6
1.4 定量与定性方法的应用	16
第 2 章 单自由度非保守系统	23
2.1 阻尼的机制	23
2.2 定性分析	27
2.3 近似解	33
2.4 非定常振动	47
2.5 张弛振动	50
第 3 章 单自由度系统的强迫振动	53
3.1 带立方非线性的系统	53
3.2 带平方和立方非线性的系统	74
3.3 自激系统	79
3.4 非定常振动	87
3.5 非理想系统	90
第 4 章 参数激励系统	96
4.1 分析实例	96
4.2 Floquet 理论	97
4.3 单自由度系统	101
第 5 章 有限自由度系统	112
5.1 带平方非线性的系统的自由振动	112
5.2 带平方非线性的系统的强迫振动	117
5.3 平均法	128
5.4 谐波线性化方法	130
5.5 非线性连续系统的离散化例子	132
习题	134
参考文献	152

单自由度保守系统

本章叙述几个单自由度非线性保守系统的例子。首先介绍一个求自由振动的定性分析方法和几个定量分析方法。最后将这些方法应用于两个特殊的例子。

1.1 单自由度保守系统实例

本节考虑一些单自由度保守系统，它们受形如

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (1-1)$$

的非线性微分方程所控制，从这些例子可以看到非线性性质的不同来源。

例 1-1 单摆 考虑如图 1-1 所示单摆的运动，由质量 m 与长 l 的无质量铰支杆构成。描述此质量运动的微分方程为

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

或

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (1-2)$$

式中， $\omega_0^2 = g/l$ 。可以看出，本例的非线性是由于大运动引起的几何非线性。

例 1-2 受非线性弹簧约束的质点 考虑受非线性弹簧约束的质量 m 在无摩擦水平面上的运动，如图 1-2 (a) 所示。假如质量的位置记为 $x(t)$ ，那么描述质量运动的微分方程是

$$m\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (1-3)$$

式中， $f(x)$ 是弹簧加于质量上的力。对于线性弹簧， $f(x) = kx$ ，这里 k 称为弹簧常数。对于非线性弹簧，力是变形的非线性函数，如图 1-2 (b) 所示，对于软弹簧，非线性使力减小（相对于线性弹簧），而对于硬弹簧，非线性使力增加。在本节中，假定弹簧沿同一条曲线加载和卸载，所以不出现阻尼的滞后现象。本例的非线性是由于大变形时的材料性质引起。

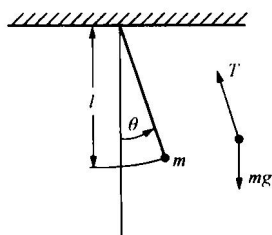
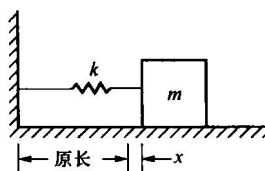
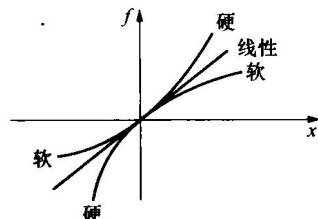


图 1-1 单摆



(a) 质量-弹簧系统



(b) 弹簧特性

图 1-2 受非线性弹簧约束的质点

例 1-3 中心力场中的质点 考虑在中心力场作用下的质点的平面运动，如图 1-3 所示。利用极坐标，此质点 m 的运动受控方程组

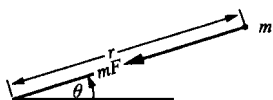


图 1-3 中心力场中的质点

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + mF(r) = 0 \quad (1-4)$$

$$n(r\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (1-5)$$

所控制。如果场是引力场，则式中 m 是质点的质量，如果是电场，则 m 是该粒子所带的电荷。方程式 (1-5) 有积分

$$r^2 \dot{\theta} = \rho \quad (1-6)$$

式中， ρ 是常数，这积分是角动量守恒定律的描述。从式 (1-4) 和式 (1-6) 中消去 θ ，得

$$\ddot{r} - \frac{\rho^2}{r^3} + F(r) = 0 \quad (1-7)$$

本例的非线性是由于旋转坐标系中的惯性和大范围运动中力场（或材料）的性质引起。

例 1-4 在转动的圆上的质点 考虑质量 m 无摩擦地沿半径为 R 的圆上运动，此圆则以匀角速度 Ω 绕其铅直径转动，如图 1-4 所示。作用在这质点上的力有重力 mg ，离心力 $m\Omega^2 R \sin\theta$ 和约束反力 N 。将这些力对圆心 O 取矩，并令力矩之和等于此质点关于点 O 的角动量变化率，得到

$$mR^2 \ddot{\theta} = m\Omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta - mgR \sin\theta \quad (1-8)$$

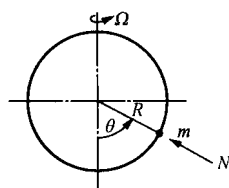


图 1-4 在光滑的转动

本例的非线性是由于旋转坐标系中的惯性和大运动中的几何性质引起。

1.2 定性分析方法

上节物理系统的运动性质可归纳成由形为

$$\ddot{u} + f(u) = 0 \quad (1-9)$$

的方程所控制。本节介绍一个有效的方法，用它来分析方程的解，可以得到许多特异的特征。

从式 (1-9) 直接得到

$$\int \dot{u} \ddot{u} dt + \int f(u) \dot{u} dt = h$$

或

$$\int \dot{u} d\dot{u} + \int f(u) du = h$$

或

$$\frac{1}{2} v^2 + F(u) = h \quad (1-10)$$

式中， $v \equiv \dot{u}$ ，而 h 是常数。对于机械系统，第一项实质上是动能，第二项是势能，而由初始条件决定的常数 h 是总能量。因此式 (1-10) 是能量守恒定律的表述。对于一个给定的 h 值，方程式 (1-10) 在 uv 平面（称为相平面）的解称为等能量线，或积分曲线，等能量线的各分支称为轨线。

轨线上的点代表系统在某一瞬时的运动状态，称为代表点，随着时间的流逝，代表点沿着轨线移动，移动的方向可以通过 $v = \dot{u}$ 来确定。显然，如果 v 是正的， u 必须增加。

将式 (1-9) 改写如下

$$\frac{1}{2}v^2 = h - F(u) \quad (1-11)$$

可以看出, 当且仅当 $h \geq F(u)$ 时 v 存在实数解, 并且轨线是关于 u 轴对称的。从式 (1-9) 还得到

$$\dot{v} = -f(u) \quad (1-12)$$

由此直接得出

$$\frac{dv}{du} = -\frac{f(u)}{v} \quad (1-13)$$

因为当轨线有水平切线 ($dv/du=0$) 时 $f(u)=0$, 有铅垂切线 ($dv/du=\infty$) 时 $v=0$ 。正如将要看到的, $f(u)$ 或 v 等于零的那些点是我们感兴趣的点。 v 和 $f(u)$ 同时为零的那些点则是特别感兴趣的点, 这些点处斜率不定, 称为奇点。奇点对应着加速度和速度同时为零, 所以它们是平衡点。因为除奇点外各处的斜率是唯一确定的, 所以除奇点处外, 轨线不能在任何别的地方相交。下面对于各种形式的函数 $F(u)$ 来决定轨线的形状。

先考虑 $F(u)$ 是单调函数的情形。图 1-5 表示 $F(u)$ 单调增加的情况, 此时每一等能量线只有一支 (一条轨线), 其形状似于开口向左的双曲线。显然在 $F(u)$ 单调减少的情况下将有开口向右的轨线。因为各轨线都不封闭, 所以这两种情况下运动都不是振荡的。

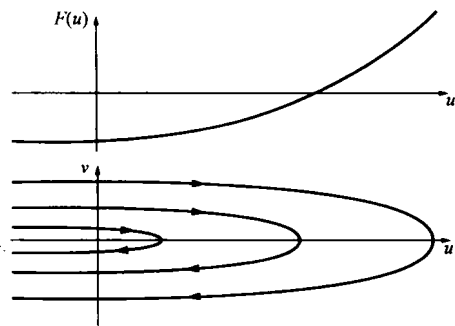


图 1-5 $F(u)$ 单调增加的情况

其次, 考虑 $F(u)$ 有一个极大值的情形。如图 1-6 所示, 当总能量 h 小于 h_0 时, 每一等能量线由两个分支组成, 它们与 u 轴相交, 其形状类似于双曲线的两个分支, 一支开口向右, 另一支开口向左。当 $h > h_0$ 时, 每一等能量线也由两个分支组成, 但此时它们不与 u 轴相交, 当 $h = h_0$ 时, 等能量线由四个分支组成, 它们在 S 点相接, 此点是一个奇点, 称为鞍点。经过鞍点的这些分支 (轨线) 称为分界线。再没有别的轨线经过 S 点, 而且, 这些分界线是所有其他轨线的渐近线。平衡点 S 是不稳定的, 因为 S 的邻域内除了两支分界线是趋向于它的外, 别的轨线都是偏离它的, 所以任何小的扰动都会使系统的状态越来越偏离它。

从鞍点邻域内分界线上的任何点出发, 沿着分界线到达鞍点本身, 都需要无限长的时间。这可以从下面的讲解得出。从式 (1-11) 得

$$\dot{u} = \pm [2h_0 - 2F(u)]^{\frac{1}{2}} \quad (1-14)$$

引进因变量变换 $x = u - u_0$, 此处 u_0 是鞍点的位置。于是函数 $h_0 - F(u)$ 在鞍点邻域内的展开有形式

$$h_0 - F(u) = h_0 - F(u_0 + x) = -\frac{1}{2}F''(u_0)x^2 + o(x^3) \quad (1-15)$$

这是因为 $F(u_0) = h_0$, $F'(u_0) = 0$ (参见图 1-6)。式中 $o(x^3)$ 表示从 x^3 开始的项的和。将式 (1-15) 代入式 (1-13) 并积分, 得从 $x_1 = u_1 - u_0$ 移动到 $x = u - u_0$, 所需时间的表达式

$$t = -[-F''(u_0)]^{-\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{x_1}\right) \quad (1-16)$$

注意到 u_0 是鞍点的位置, 有 $F''(u_0) < 0$, 因此当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 0 (u \rightarrow u_0)$ 。

第三, 考虑 $F(u)$ 有一个极小的情形, 如图 1-7 所示, 当 $h = h_0$, 等能量线退化成一个称为中心的奇点。当 $h < h_0$ 时没有实数解, 而 $h > h_0$ 时的等能量线是围绕中心 C 的闭 Liapunov 意义下是稳定的, 因为小扰动会导致 C 点的一条闭轨线, 沿此轨线系统的状态保持与 C 相接近。对应于闭轨线的运动是周期的, 但不一定是简谐的, 而且与线性系统不同, 非线性系统的周期是 h 的函数 (即与振幅有关)。周期可以从式 (1-14) 和图 1-7 找得, 为

$$T = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{u_2}{u_1} [2h - 2F(u)]^{-\frac{1}{2}} du \quad (1-17)$$

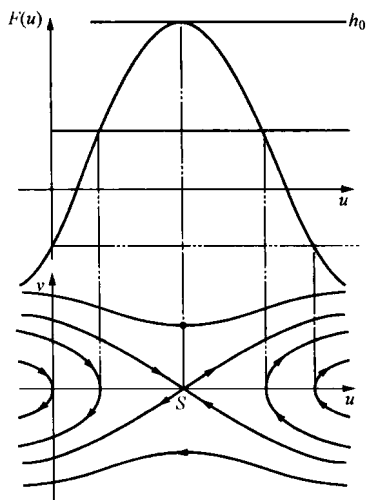


图 1-6 $F(u)$ 有一个极大值的情形

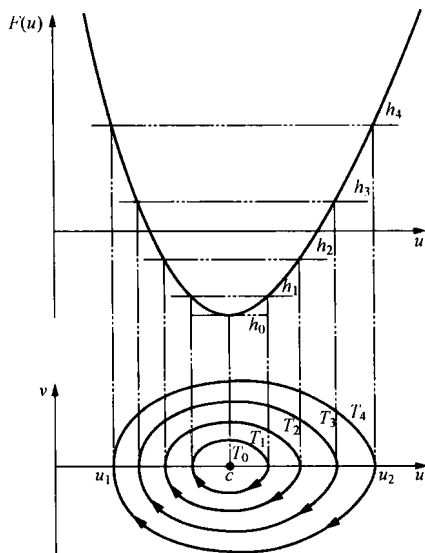


图 1-7 $F(u)$ 有一个极小值的情形

虽然中心和鞍点都是奇点, 但在它们的邻域中由小扰动引起的运动是大不相同的。接近奇点 u_0 时

$$h - F(u) = -\frac{1}{2} F''(u_0) x^2 + o(x^3) \quad (1-18)$$

式中 $x = u - u_0$, 如果运动是小的, 忽略高阶项后运动方程变为

$$x + F''(u_0)x = 0 \quad (1-19)$$

它的解是

$$x = c_1 \exp[\sqrt{-F''(u_0)}t] + c_2 \exp[-\sqrt{-F''(u_0)}t] \quad (1-20)$$

式中 c_1 和 c_2 是常数, 对于鞍点, $F''(u_0)$ 是负的, 所以其中一项指数衰减, 而另一项指数增长。对于中心, $F''(u_0)$ 是正的, 所以解是振荡性的, 由三角函数描述。由于这个缘故, 鞍点称为不稳定奇点, 而中心称为稳定奇点。

第四, 考虑极大值点和极小值点相接合而形成一个拐点的情形。如图 1-8 所示, 每一等能量线由一支构成, 它开口向左。 $h = h_0$ 的等能量线经过不稳定奇点 P , 它是一个非初等奇点或退化奇点, 可以设想是由 P 点左边的一个鞍点和 P 点右边的一个中心接合而成的结果。

前面的三种情形构成了 Lagrange-Dirichlet 定理的一个初等证明, 该定理表述如下: 如

果位能在一个平衡点有孤立极小值,那么此平衡状态是稳定的。这三种情形也构成了 Liapunov 的一个逆定理的初等证明,该定理表述为:如果位能在一个平衡点不取极小值,则平衡状态是不稳定的。

如果 $F(u)$ 或 $F'(u)$ 的函数形式给定,有时可以通过考察二阶导数来确定一个奇点是鞍点还是中心。显然,如果

$$\frac{d^2 F}{du^2} = \frac{df}{du} < 0$$

则是鞍点,如果

$$\frac{d^2 F}{du^2} = \frac{df}{du} > 0$$

则是中心。

作为一个例子,考虑方程

$$\ddot{u} + (1-u)(2-u) = 0 \quad (1-21)$$

它的奇点位置是

$$u = 1 \quad \text{和} \quad u = 2$$

由此得出

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=1} = 2u - 3 \Big|_{u=1} = -1$$

以及

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u=2} = 1$$

因此 $u=1$ 是一个鞍点,而 $u=2$ 是一个中心。在 $u=2$ 邻近存在振荡的解,而在 $u=1$ 邻近则没有。

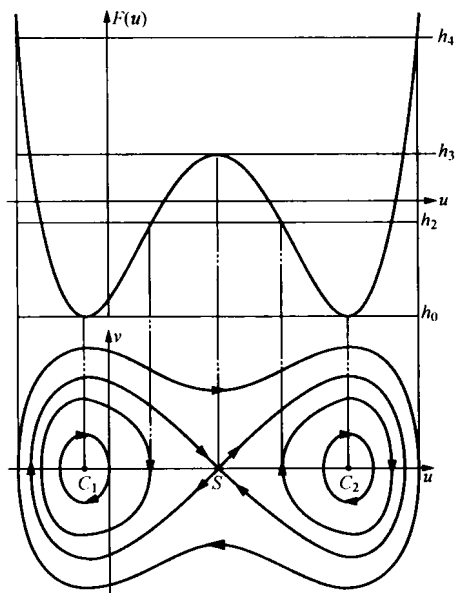


图 1-9 $F(u)$ 有一个极大值和两个极小的情形

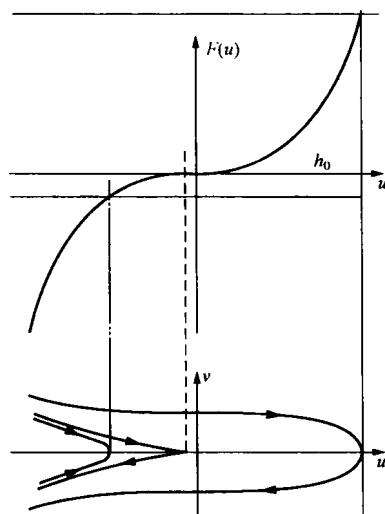


图 1-8 $F(u)$ 有一个拐点的情形

当 $F(u)$ 比上面所考虑的几种简单情形更为复杂时,相平面上的解可由上面的简单情形组合而成。如图 1-9 所示的例子,当 $h=h_0$ 时,等能量线由两个中心 C_1 和 C_2 所构成,而当 $h=h_3$ 时,等能量线同于在鞍点 S 相接的两条轨线(分界线)所构成。当 $h_0 < h < h_3$, 每一等能量线由两条闭轨线构成,一条围绕中心 C_1 , 而另一条围绕中心 C_2 。当 $h > h_3$ 时,每一等能量线由一条闭轨线构成,它围绕着两个中心和一个鞍点。这个例子说明系统的状态除了依赖于系统的一些参数外,还很强地依赖于初条件。

从上面的讨论中,可以认识到非线性系统与线性系统不同的几个运动特征。假定在运动的振幅趋于零的极限下,非线性方程的解接近于对应的线性方程的解(实际情况正是如此)。那么在中心的无

限小邻域内运动将由单个谐波来描述。但是正如前面的一些相图（图 1-7 和图 1-9）所清楚显示的，那些大振幅的闭轨线并非仅仅是那些振幅非常小的闭轨线的按比例放大。不过虽然轨线的开头有了显著的变化，但运动仍是周期的，所以可以用 Fourier 正弦和余弦展开式表示。这样，对于无限小运动，取展开式的一项来表示就足够精确了，但是当振幅增长时，要足够精确地表示解就需要取随之增长的项数了。因此可以预期，在非线性系统的运动中含有更高次的谐波，而且从式（1-17）看出，运动的周期依赖于振幅（也即依赖于 h ）。最后还可看出，围绕中心的轨线不一定是关于中心对称的。于是当振幅增长时，运动出现漂移，运动的中点不是中心（平面位置）。这种不对称是由于 $f(u)$ 在中心 $u=u_0$ 的邻域内的展开式中存在 x 的偶次项的结果。

1.3 定量分析方法

上节的例子已经说明，在中心的邻域内运动是振荡的，本节介绍求得这种振荡运动的近似表达式的几种方法。

考虑由方程

$$\ddot{u} + f(u) = 0 \quad (1-22)$$

所控制的系统，式中 $f(u)$ 一般是非线性函数。将原点移至中心 $u=u_0$ ，为此设

$$\tilde{x} = u - u_0 \quad (1-23)$$

于是式（1-22）变为

$$\ddot{\tilde{x}} + f(x + u_0) = 0 \quad (1-24)$$

假设 f 可以展开，则式（1-24）可改写为

$$\ddot{\tilde{x}} + \sum_{n=1}^N a_n x^n = 0 \quad (1-25)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0) \quad (1-26)$$

而 $f^{(n)}$ 表示关于自变量的 n 阶导数，对于中心， $f(u_0)=0$ ，而 $f'(u_0)>0$ 。

将方程（1-25）删去所有的非线性项得到一个线性方程，受此方程控制的系统称为对应的线性系统。非线性系统的响应基本上可以通过对应的线性系统的响应进行摄动来得到。有若干种方法可以实现摄动。下面分别加以介绍。

1.3.1 直接展开法

对于方程（1-25），假设其中的非线性项不一定是小量，求中心附近的振幅小而有限的运动。为了寻找描述运动的有效展开式，在展开式中引入一个无量纲小参数 ϵ ，它不表征系统的固有参数，只表征所求的运动振幅的量级是小的，同时它也有用来区分各级摄动量的作用。

假定方程（1-25）对于初条件

$$x(0) = \epsilon x_0, \quad \dot{x}(0) = \epsilon \dot{x}_0 \quad (1-27)$$

的解可以表示成如下展开式

$$x(t; \epsilon) = \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3(t) + \cdots \quad (1-28)$$

将式（1-28）代入式（1-25），因为 x_n 是与 ϵ 无关的，令 ϵ 的每幂次的系数等于零，并记 $a_1 = \omega_0^2$ ，就得到如下一组摄动方程：

ϵ 阶

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (1-29)$$

ϵ^2 阶

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -a_2 x_1^2 \quad (1-30)$$

ϵ^3 阶

$$\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 = -2a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^3 \quad (1-31)$$

在满足初条件方面,有如下两种选择:

选择一 可以将假定的展开式 (1-28) 代入初条件式 (1-27), 令 ϵ 相同幂次的系数相等, 其结果为

$$x_1(0) = x_0 \text{ 和 } \dot{x}_1(0) = \dot{x}_0 \quad (1-32)$$

$$x_n(0) = 0 \text{ 和 } \dot{x}_n(0) = 0, \text{ 对于 } n \geq 2 \quad (1-33)$$

于是根据式 (1-32) 决定 x_1 中的积分常数, 根据式 (1-33) 逐步决定 $x_n (n \geq 2)$ 的齐次解中所含的积分常数。

选择二 可以对所有的 $x_n (n \geq 2)$, 直到最后一步, 不考虑初条件和齐次解。但将 x_1 中的积分常数看作 ϵ 的函数, 按 ϵ 的幂次展开, 选择展开式中的系数使式 (1-27) 得到满足。

下面通过具体运算来说明这两种方法是等价的。

1. 根据第一种选择

方程 (1-29) 的解可以写成

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1) \quad (1-34)$$

式中, a_1 和 β_1 是常数。为满足初条件式 (1-32), 有

$$a_1 \cos \beta_1 = x_0$$

$$a_1 \sin \beta_1 = \dot{x}_0 / \omega_0 \quad (1-35)$$

将式 (1-34) 代入式 (1-30), 得到

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -a_2 a_1^2 \cos^2(\omega_0 t + \beta_1) = -\frac{1}{2} a_2 a_1^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\beta_1)] \quad (1-36)$$

式中已经利用了三角恒等式。方程式 (1-36) 的解为

$$x_2 = \frac{a_2 a_1^2}{6\omega_0^2} [\cos(2\omega_0 t + 2\beta_1) - 3] + a_2 \cos(\omega_0 t + \beta_2) \quad (1-37)$$

对于应于初条件式 (1-33), 有

$$a_2 \cos \beta_2 = -\frac{a_2 a_1^2}{6\omega_0^2} (\cos \beta_1 - 3) \quad (1-38)$$

$$a_2 \sin \beta_2 = -\frac{a_2 a_1^2}{3\omega_0^2} \sin 2\beta_1 \quad (1-39)$$

于是, 根据第一种选择, 有

$$x = \epsilon a_1 \cos(\omega_0 t + \beta_1) + \epsilon^2 \left\{ \frac{a_1^2 a_2}{6\omega_0^2} [\cos(2\omega_0 t + 2\beta_1) - 3] + a_2 \cos(\omega_0 t + \beta_2) \right\} + o(\epsilon^3) \quad (1-40)$$

式中, a_1 、 β_1 、 a_2 、 β_2 由式 (1-35) 和式 (1-38) 确定。

2. 根据第二种选择

方程 (1-29) 的解可能写成

$$x_1 = a \cos(\omega_0 t + \beta) \quad (1-41)$$

式中, a 和 β 是常数, 但把它们看作 ϵ 的函数。此刻暂不考虑初条件。

将式 (1-40) 代入式 (1-30), 得

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{1}{2} \alpha_2 a^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\beta)] \quad (1-42)$$

方程 (1-42) 的解 (不计齐次解) 为

$$x_2 = \frac{\alpha_2 a^2}{6\omega_0^2} [\cos(2\omega_0 t + 2\beta) - 3] \quad (1-43)$$

于是根据第二种选择有, 有

$$x = \epsilon a \cos(\omega_0 t + 2\beta) - 3 + \frac{\omega^2 a^2 \alpha_2}{6\omega_0^2} [\cos(2\omega_0 t + 2\beta) + 3] + o(\epsilon^3) \quad (1-44)$$

式中, 常数 a 与 β 由初条件确定。

下面说明, 对于相同的初条件, 总可将解式 (1-44) 化成解式 (1-40) 的形式。

将解式 (1-44) 代入初条件式 (1-27), 得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon x_0 &= \epsilon a \cos \beta + \frac{\epsilon^2 a^2 \alpha_2}{6\omega_0^2} (\cos 2\beta - 3) \\ \epsilon \dot{x}_0 &= -\epsilon a \omega_0 \sin \beta - \frac{\epsilon^2 a^2 \alpha_2}{3\omega_0} \sin 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

由式 (1-45) 可解出 a 与 β , 设解有如下形式

$$\left. \begin{aligned} \epsilon a &= \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \cdots \\ \beta &= B_1 + \epsilon B_2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (1-46)$$

将式 (1-46) 代入式 (1-45), 有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon x_0 &= \epsilon A_1 \cos B_1 + \epsilon^2 \left[A_2 \cos B_1 - A_1 B_2 \sin B_1 + \frac{A_1^2 \alpha_2}{6\omega_0^2} (\cos 2B_1 - 3) \right] + \cdots \\ \epsilon \dot{x}_0 &= -\epsilon A_1 \omega_0 \sin B_1 - \epsilon^2 \left[A_2 \omega_0 \sin B_1 + A_1 B_2 \omega_0 \cos B_1 + \frac{A_1^2 \alpha_2}{3\omega_0} \sin 2B_1 \right] + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

比较方程两端同次幂的系数, 得

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A_1 \cos B_1 \\ -\dot{x}_0 / \omega_0 &= A_1 \sin B_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-48)$$

和

$$\left. \begin{aligned} A_2 \cos B_1 - B_2 A_1 \sin B_1 &= -\frac{A_1^2 \alpha_2}{6\omega_0^2} (\cos 2B_1 - 3) \\ A_2 \sin B_1 - B_2 A_1 \cos B_1 &= -\frac{A_1^2 \alpha_2}{3\omega_0} \sin 2B_1 \end{aligned} \right\} \quad (1-49)$$

式 (1-48) 与式 (1-35) 比较, 可见

$$A_1 = a_1, \quad B_1 = \beta_1 \quad (1-50)$$

将式 (1-50) 代入式 (1-49), 并根据式 (1-38), 有

$$\left. \begin{aligned} A_2 \cos \beta_1 - B_2 \sin \beta_1 &= a_2 \cos \beta_2 \\ A_2 \sin \beta_1 + B_2 \cos \beta_1 &= a_2 \sin \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-51)$$

方程 (1-51) 的系数行列式 $= a_1 \neq 0$, 方程有唯一的非零解。所以对一组有给定值的 a_1 、 β_1 、 a_2 、 β_2 , 必可唯一确定一组 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 的值。即根据初条件的两种不同选择, 都可得到相同的解。如果将解求至更高阶近似, 也有同样的结论, 以后根据第二种选择来满

足初条件。

将式 (1-41) 和式 (1-43) 代入式 (1-31), 得

$$\begin{aligned}\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 &= \frac{\alpha_2^2 a^3}{3\omega_0^2} [3\cos(\omega_0 t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)\cos(2\omega_0 t + 2\beta)] - \alpha_3 a^3 \cos^3(\omega_0 t + \beta) \\ &= \left(\frac{5\alpha_2^2}{6\omega_0^2} - \frac{3\alpha_3}{4}\right) a^3 \cos(\omega_0 t + \beta) - \left(\frac{\alpha_3}{4} + \frac{\alpha_2^2}{6\omega_0^2}\right) \cos(3\omega_0 t + 3\beta)\end{aligned}\quad (1-52)$$

式 (1-52) 的任何特解都包含

$$\left(\frac{10\alpha_2^2 - 9\alpha_3\omega_0^2}{24\omega_0^3}\right) a^3 t \sin(\omega_0 t + \beta)$$

这一项。如果继续这种直接展开法, 会出现包含因子 $t^m \cos(\omega_0 t + \beta)$ 和 $t^m \sin(\omega_0 t + \beta)$ 的一些项, 这样的项称为久期项。

因为存在久期项, 展开式 (1-30) 不是周期的。而且当 t 增加时, x_3/x_1 和 x_3/x_2 无界增长。因此展开式中后面的项并非总是对前面的项进行小的修正。所以说展开式 (1-30) 在 t 增加时不是一致有效的。

第 1.2 节的讨论已经指出, 非线性系统和线性系统相区别的特征之一是频率与振幅的相互影响。但在直接展开法中根本没有考虑此种关系。因此这种方法从一开始就是失败的。考虑频率与振幅的相互影响, 对直接展开法进行的一种修改是 Lindstedt-Poincaré' 方法, 该法在下面介绍。

1.3.2 Lindstedt-Poincaré' 方法 (L-P 法)

为考虑解与频率的非线性依赖关系, 使运动微分方程显含频率 ω , 为此引入变换

$$\tau = \omega t$$

其中, ω 是未知数, 它依赖于未知振幅。利用下面的导数变换式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = \omega \frac{d}{d\tau} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \omega \frac{d^2}{dt d\tau} = \omega \frac{d\tau}{dt} \frac{d^2}{d\tau^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}\end{aligned}$$

方程 (1-25) 变为

$$\omega^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots = 0 \quad (1-53)$$

由此看出方程 (1-53) 已经显含运动的实际频率 ω_0 。但 ω 与 x 都是未知量, 求它们为如下展开式的近似解

$$x(\tau; \epsilon) = \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + \epsilon^3 x_3(\tau) + \cdots \quad (1-54)$$

$$\omega(\epsilon) = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \epsilon^3 \omega_3 + \cdots \quad (1-55)$$

式 (1-55) 右端的第一项 $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1}$ 是已知的线性频率, 后面各未知项是对线性频率的修正。方程 (1-53) 含两个未知量 x 与 ω , 要确定它们必须附加一个补充条件, 选取频率的修正项使得展开式 x 中的每一项都是 τ 的周期函数。

将式 (1-54)、式 (1-55) 代入式 (1-53), 有

$$(\omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \cdots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \cdots) + \sum_{n=1}^N \alpha_n (\epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \epsilon^3 x_3 + \cdots)^n = 0 \quad (1-56)$$

令 ϵ 、 ϵ^2 和 ϵ^3 的系数等于零，并注意到 $\alpha_1 = \omega_0^2$ ，就得到

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = 0 \quad (1-57)$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 \right) = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} - \alpha_2 x_1^2 \quad (1-58)$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 \right) = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} - 2\alpha_2 x_1 x_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} - \alpha_3 x_1^3 \quad (1-59)$$

将式 (1-57) 的通解写成

$$x_1 = a \cos \phi \quad (1-60)$$

式中

$$\phi = \tau + \beta_0 \quad (1-61)$$

而 a 和 β_0 是常数，将式 (1-60) 代入式 (1-58) 得

$$\omega_0^2 \left(\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 \right) = 2 \left(\omega_0 \omega_2 a - \frac{3}{8} \alpha_3 a^3 + \frac{5}{12} \frac{\alpha_2^2 a^3}{\omega_0^2} \right) \cos \phi - \frac{1}{4} \left(\frac{2\alpha_2^2}{3\omega_0^2} + \alpha_2 \right) a^3 \cos 3\phi \quad (1-62)$$

因此必须令 $\omega_1 = 0$ ，否则 x_2 将包含久期项 $\omega_1 \omega_0^{-1} a \tau \sin \phi$ 。不计齐次解，式 (1-62) 的解为

$$x_2 = -\frac{\alpha_2 a^2}{2\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\phi \right) \quad (1-63)$$

将得到的 x_1 和 x_2 代入式 (1-47) 并考虑到 $\omega_1 = 0$ ，得到

$$\omega_0^2 \left(\frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 \right) = 2 \left(\omega_0 \omega_2 a - \frac{3}{8} \alpha_1 a^3 + \frac{5}{12} \frac{\alpha_2^2 a^3}{\omega_0^2} \right) \cos^3 \phi \quad (1-64)$$

为了消去 x_3 中的久期项，必须令

$$\omega_2 = \frac{(9\alpha_3 \omega_0^2 - 10\alpha_2^2) a^2}{24\omega_0^3} \quad (1-65)$$

于是由式 (1-23)、式 (1-44)、式 (1-45)、式 (1-50) 和式 (1-53)，得出

$$u = u_0 + \epsilon a \cos(\omega t + \beta_0) - \frac{\epsilon^2 a^2 \alpha^2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta_0) \right] + o(\epsilon^3) \quad (1-66)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\alpha_1} \left(1 + \frac{9\alpha_3 \alpha_1 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \epsilon^2 a^2 \right) + o(\epsilon^3) \quad (1-67)$$

加上初条件式 (1-26)，有

$$\epsilon x_0 = \epsilon a \cos \beta_0 - \frac{\epsilon^3 a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2\beta_0 \right)$$

和

$$\epsilon \dot{x}_0 = -\epsilon a \omega \sin \beta_0 - \frac{\epsilon^2 a^2 \alpha_2 \omega}{3\alpha_1} \sin 2\beta_0 \quad (1-68)$$

为了求解式 (1-58)，将 a 和 β_0 展成 ϵ 的幂级数，并令 ϵ 同次幂的系数不相等，就可得到确定级数各项系数的方程。

对照 1.2 节中的定性讨论，本节 L-P 方法给出了：①描述系统周期运动的表达式；②频率与振幅的关系式（这是要求运动的表达式具有周期性的直接结果）；③在表达式的高阶项中的高次谐波；④漂移项 $-\frac{1}{2} \epsilon^2 a^2 \alpha_2 \alpha_1^{-1}$ 。

1.3.3 多尺度方法(导数展开法)

回到由 L-P 法所提到的解式(1-65)和式(1-66),把它们改写,有

$$x = \varepsilon a \cos\left(\sqrt{\alpha_1}t + \frac{9\alpha_3\alpha_1 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2}a^2\varepsilon^2t + \beta_0\right) - \frac{\varepsilon^2 a^2 \alpha_2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3}\cos\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cos\left(2\sqrt{\alpha_1} + \frac{9\alpha_3\alpha_1 - 10\alpha_2^2}{12\alpha_1^2}a^2\varepsilon^2t + 2\beta_0\right)\right] + \dots \quad (1-69)$$

从式(1-69)可见, x 不仅依赖于 ε 和 t , 而且依赖于 $\varepsilon^2 t$, 如果求更高次近似, 还将依赖于 $\varepsilon^4 t$ 、 $\dots$ 。因此对于一般情形, 可将解看成除依赖于 t 与 ε 外, 还依赖于 εt 、 $\varepsilon^2 t$ 、 $\varepsilon^3 t$ 、 $\dots$, 即

$$x(t; \varepsilon) = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t, \dots, \varepsilon)$$

或

$$x(t; \varepsilon) = x(T_0, T_1, T_2, T_3, \dots, \varepsilon) \quad (1-70)$$

式中

$$T_n = \varepsilon^n t (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1-71)$$

因为 ε 是小参数, 所以 T_n 代表不同的时间尺度。例如设 $\varepsilon = 1/60$, 则 T_0 尺度的变化可看为时钟秒针的变化, T_1 尺度的变化可看为分针的变化, 而 T_2 尺度的变化可看为时针的变化。这样 T_0 代表快尺度, T_1 代表较慢尺度, T_2 代表更慢尺度, 等等。于是, 可以设想以不同的时间尺度来观察 x 的变化, 即不定义 x 为 t 的函数, 而定义 x 为 $T_0, T_1, T_2, \dots$ 的函数。

为此, 将方程(1-25)中的自变量 t 变为 $T_0, T_1, T_2, \dots$, 于是关于 t 的导数变为关于 $T_0, T_1, T_2, \dots$ 的偏导数展开式。即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (1-72)$$

假定式(1-25)的解可以表示成形如

$$x(t; \varepsilon) = \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 x_3(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (1-73)$$

的展开式。其中所需的独立时间尺度的个数取决于此展开式算到哪一阶。如果展开式算到 $o(\varepsilon^2)$, 那么需要 T_0 和 T_1 。在本节中把展开式算到 $o(\varepsilon^3)$, 所以需要 T_0, T_1 和 T_2 , 将式(1-72)和式(1-73)代入式(1-25), 并令 $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ 的系数为零, 则

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (1-74)$$

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - \alpha_2 x_1^2 \quad (1-75)$$

$$D_0^2 x_3 + \omega_0^2 x_3 = -2D_0 D_1 x_2 - D_1^2 x_1 - 2D_0 D_2 x_1 - 2\alpha_2 x_1 x_2 - \alpha_3 x_1 \quad (1-76)$$

方程(1-74)的通解为

$$x_1 = a(T_1, T_2, \dots) \cos[\omega_0 T_0 + \beta(T_1, T_2, \dots)] \quad (1-77)$$

这里 a 与 β 都不是常数, 而是慢尺度时间 T_1, T_2 的时间函数。这是因为 x_1 是 $T_0, T_1, T_2, \dots$ 的函数, 且方程(1-74)中 x_1 的导数是关于 T_0 的偏导数。 a 与 β 关于 $T_1, T_2, \dots$ 的函数关系要由各级近似解中消去久期项的条件来确定。

将式(1-77)代入式(1-75), 得

$$D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = 2(\omega_0 T_0 + \beta) D_1 a + 2\omega_0 a \cos(\omega_0 T_0 + \beta) D_1 \beta - \frac{1}{2} \alpha_2 a^2 \cos(2\omega_0 T_0 + 2\beta) \quad (1-78)$$