2014精英书系

跨考教育 WWW.KUAKAO.COM

考研数学

精英计划

概率论与数理统计常考题型11问

总策划◎跨考考研数学研究院　主编◎严守权　徐兵

专属90后的考研备考“资料包”

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学

精英计划

概率论与数理统计常考题型11问

总策划◎跨考考研数学研究院　　主编◎严守权　徐兵

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学精英计划概率论与数理统计常考题型 11 问 / 严守权, 徐兵主编.
北京: 北京理工大学出版社, 2013. 2

ISBN 978 - 7 - 5640 - 7388 - 6

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①严… ②徐… Ⅲ. ①概率论 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 ②数理统计 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 022637 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张 / 10
字　　数 / 200 千字
版　　次 / 2013 年 2 月第 1 版　2013 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 / 17.80 元

责任编辑/ 张慧峰
责任校对/ 周瑞红
责任印制/ 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

本书是我们献给考研学子的一份高效且实用的礼物。这是一本全方位、有特色、有成效、高品质的精品辅导书，本书特色如下：

1.综合考研命题趋势、题型的典型性和重要性，将问题分为A，B，C三级；

2.对重要解题技巧、典型运算错误以点拨形式列出；

3.在每个类型后都配以小结，进行综合点评；

4.在问题的最后，是评析和归纳。

本书必将开阔考生的视野，拓展考生的思维，为考生取得好成绩提供保障。

前　言

(一)

如何使考研数学的备考复习更加高效，又如何将复习的成果尽快转化为应试实战能力，这是每一位准备参加硕士研究生入学考试的朋友最为关心的问题。解决这个问题不是靠更多的资金投入，也不需要耗费更多的时间，而是靠对硕士研究生入学考试的内在规律和内容的把握，以及基于这种理解和把握下的对备考工作科学的规划和行之有效的方法。精英计划系列丛书的陆续出版，正是为广大考生朋友的备考工作提供了一种新思路、新途径和新方法。

《考研数学精英计划常考题型X问》是考研数学精英计划的一个重要组成部分，该系列丛书在综合考试大纲和历年考试分析的基础上，将考研数学最终归结为要集中解决的X个问题。这X问涵盖了实际考试中**最常见、最基本、也是最重要的内容，深刻回答了考研数学要考什么的问题。**与《考研数学精英计划最常考真假命题400条》相类似，《考研数学精英计划常考题型X问》也是目前市场上首次出现的将考研数学归纳为若干问题讲述的考研辅导书，书中体现了精英计划系列丛书所要强调的另外一个思想和理念：考研数学复习要突出重点、直达主题，提出问题、解决问题，带着问题学。这就为我们的备考复习提供了一个量化指标和努力的方向。如同打仗一样，踏踏实实地一个一个问题去复习，积小胜为大胜，攻城略地，最终达到全胜。还要说明的是，**《考研数学精英计划常考题型X问》不是简单的一题一问，而是一个综合类型，目的是引导大家学会综合运用所学知识，快速解决数学问题，这一点恰恰是我们备考复习必须要突破的关键点。**墩实基础，强化综合应用能力是我们精英计划系列丛书的两个基本点，既是出发点，又是着力点。《考研数学精英计划常考题型X问》和《考研数学精英计划最常考真假命题400条》相辅相承，共同构成一个更具针对性、更贴近实战和更加高效的考研数学备考复习体系。

将考研数学的内容归结为若干问题主要是基于以下几点的考虑：首先，基于考试科目(高等数学或微积分，线性代数和概率论与数理统计)的学科特点。它们作为数学基础学科，发展得已经十分成熟，体系和内容非常稳定，而且与时事无关。其次，全国硕士研究生入学考试数学考试开考以来，考试大纲历经多次变革已经到位，从2011**年开始，进入了卷库命题时代，出卷方式、考试类别、考试内容、考试要求和考卷的结构形式等都处在一个相对稳定的时期。**再次，近30年的考研真题说明，题型结构、风格特点等都很难有新的创意，可以预料，对以往试题的局部调整和重组，将是未来命题工作中的常态。最后，笔者从事考研辅导和辅导教材的编写工作20余年，熟悉全国硕士研究生入学考试数学考试的演变发展过程和背景，能准确把握考试的重点、难点、热点和变化趋势，因此也有能力对数学考试的内容进行科学的归纳总结，从而确保以问题带动备考复习方法的可靠性和有效性。

(二)

《考研数学精英计划常考题型X问》的**主要特色包括：**每一问的问题在整个考研数学中

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

的位置、趋势、难易度，以及对该问题的复习建议；问题的核心内容、重要内容和外延，及问题之间的相互关系；问题所涉及的重要知识点的归纳、梳理、诠释和必要的提示；重要题型的应对思路、算法和注意事项等。

在问题的分析和讨论上，我们主要通过精选典型例题来说明问题的内涵和外延、题型特点和难易度；在算法上，尽可能提供多种解法，对于重要方法和提示，以点拨方式列出。为了更贴近考研实际，选题尽可能以历年真题为主，同时也补充必要的题型以便更全面地诠释问题；在结构上，我们综合考研的命题趋势、题型的典型性、重要性、问题的外延和发展，将例题分为 A、B、C 三级。A、B 级题更典型、更符合当前考研数学的命题趋势，当然也是大家复习的重点，C 级通常是对题型可能出现的外延或扩展做最后的补充。在每个类型后都配以精妙的小结，进行综合点评。

（三）

根据我们多年的辅导、教学经验，我们发现：**对于每个参加数学考试的考生而言，数学基础固然重要，但考试成绩的好坏关键还在于后期的复习是否到位。**基础薄弱的考生只要踏实认真，同样可以厚积薄发，取得优异成绩。我们深信《考研数学精英计划常考题型 X 问》系列丛书的推出将会为你们的成功飞跃插上隐形的翅膀。

（四）

《考研数学精英计划概率论与数理统计常考题型 11 问》是在对考试大纲和历年考试真题高频考点的分析研究基础上归纳总结出的问题，并对其作系统的分析和介绍。概率论与数理统计的考试内容应该以随机变量的分布为主线，以能集中反映随机现象基本特征的随机变量的数字特征及其应用为主要内容，而随机事件及其概率和基本概型是讨论随机变量的分布的基础。基于这个思想，数理统计应该以抽样分布为主线，解决以个体推断总体的问题。概率论与数理统计部分最终归纳为 11 个问题，其中有 6 个问题是随机变量分布问题，即离散型随机变量的问题、连续型随机变量的分布问题（2 个）、一般类型的随机变量分布问题以及最重要的正态分布问题、统计部分的抽样分布问题。另外两个是关于随机事件和基本概型的问题，第一个是关于随机变量的数字特征问题，第二个是关于数理统计的参数估计问题。概率论与数理统计中唯一没有涉及的是假设检验问题，这部分内容仅限于数学一，且该内容除了在 1998 年的考试中出现过以外，以后从未考过，所以可以忽略。

作　者

目　录

第 1 问　随机事件之间有哪些重要关系？如何判断？

一、题型概述

随机事件之间的重要关系及其讨论是概率论的重要基础之一，随机事件之间的重要关系主要指包含关系、相等关系、互斥（不相容）关系、对立关系和相互独立关系. 随机事件之间的重要关系的推断及概率计算在实际考试中经常出现在选择题中，这类题没有复杂的运算，难度应该不大，但由于考生容易忽略，有时得分率并不高. 在具体处理这类题型时，大体可以从三个角度入手：

（1）对于随机事件的包含关系、相等关系、互斥（不相容）关系、对立关系等主要依据随机事件的运算性质或文氏图推断.

（2）对随机事件的独立性应依据概率公式判断.

（3）注意区分在有条件下与无条件下事件发生概率的异同.

二、典型例题

1. 随机事件的包含关系、相等关系、互斥（不相容）关系及对立关系的讨论（A 级）

例 1（90—3）　设 A,B 为两个随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是（　　）.

(A) $P(A+B)=P(A)$　　(B) $P(AB)=P(A)$

(C) $P(B|A)=P(B)$　　(D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

解析　本题主要考查随机事件的包含关系的概念以及在包含关系下随机事件的概率，可以从两个角度考虑，一是将 $B\subset A$ 转换为等价形式 $A+B=A$，二是文氏图，如图 1-1，均容易判断选项(A)正确，选之. 另外，由图 1-1，应有 $P(B|A)=1$，$P(AB)=P(B)$，$P(B-A)=0$.

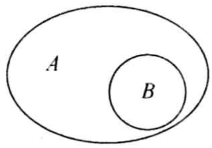

图 1-1

例 2（01—4）　对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B\subset B$ 不等价的是（　　）.

(A) $A\subset B$　　(B) $\bar{B}\subset\bar{A}$　　(C) $A\bar{B}=\varnothing$　　(D) $\bar{A}B=\varnothing$

解析　本题主要考查随机事件的等价关系（即相等关系）的概念以及随机事件的恒等运算，类似上题，$A\cup B\subset B$，即 $A+B=B$，可知 $A\subset B$，又由德·摩根律，有 $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}=\bar{B}$，可知 $\bar{B}\subset\bar{A}$. 进而将 $A=\Omega-\bar{A}$ 代入等式 $\bar{A}\bar{B}=\bar{B}$，有 $\bar{B}-A\bar{B}=\bar{B}$，即 $A\bar{B}=\varnothing$，由排除法，$\bar{A}B=\varnothing$ 与 $A\cup B\subset B$ 不等价，故选择(D).

本题难度系数　0.930

例 3（09—3）　设事件 A 与 B 互不相容，则（　　）.

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A)=1-P(B)$　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

解析　本题主要考查随机事件的互不相容（即互斥）的概念以及在互不相容关系下随机事件概率的恒等运算. 事件 A 与 B 互不相容，即 $A\cap B=\varnothing$，$P(A\cap B)=0$，进而有

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1.$$

故选择(D).

本题难度系数　0.807

例 4(91—3)　设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容的事件，则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A)$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容　　(B)$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　　(D)$P(A-B)=P(A)$

解析　题型与例 3 相似，主要考查随机事件的互不相容(即互斥)，事件相互对立及事件相互独立的概念以及在互不相容关系下随机事件概率的恒等运算. 事件 A 与 B 互不相容，即 $A\cap B=\varnothing$，有 $P(A\cap B)=0$，从而有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A),$$

故选择(D). 另外，若 A 和 B 是对立事件，则 $A\cap B=\varnothing$，同时有 $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$，若 A 和 B 不是对立事件，则 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 必相容，由于题设未明确 A 和 B 是否对立，因此不能确定 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相容性. 又两个概率不为零的不相容事件一定不互相独立，即 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，因此(A)，(B)，(C)均不正确.

例 5(87—3)　设 A,B 为两个事件且 $P(AB)=0$，则(　　).

(A)A 与 B 互斥　　(B)AB 是不可能事件

(C)AB 未必是不可能事件　　(D)$P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解析　本题主要考查不可能事件，互不相容事件以及零概率事件的概念与相互关系. 三者关系应该是，事件 A 与 B 互不相容即 AB 是不可能事件，则必有 $P(AB)=0$，但反之不然. 如任何一个连续型随机变量取任何实数值的概率均为零，但并非一定是不可能的事件，故应选择(C). 要强调的是，除事件的独立性外，一般情况下，由事件的概率不能推断事件的特征，如由 $P(A)=1$ 不能推断 A 是必然事件. 另外，一般情况下，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，故(D)不正确.

例 6(90—3)　以 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B)“甲、乙两种产品畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

解析　本题主要考查随机事件的设定及对立事件的概念. 为了更清晰地作出判断，宜先将事件符号化再利用事件运算解答. 若以 A_1 表示事件“甲种产品畅销”，A_2 表示事件“乙种产品滞销”，则 $A=A_1A_2$，由德·摩根律，其对立事件为 $\overline{A}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_1}+\overline{A_2}$，表示事件“甲种产品滞销或乙种产品畅销”，故选择(D).

本题难度系数　0.540

例 7(92—4)　设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　　).

(A)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C)$P(C)=P(AB)$　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$

解析　本题主要考查随机事件的包含关系及概率的性质与运算. 有两种判断方法：

方法 1　由题设直接推导，即由题设，$C\supset AB$，则 $P(C)\geqslant P(AB)$，又

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1,$$

即有 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

方法 2 排除法，即由题设，$C\supset AB$，但未必有 $C=AB$ 或 $C=A+B$，应排除选项(C)，(D). 另在条件 $AB\subset C$ 下，不妨取 $A=B=C$，代入选项(A)，有

$$P(A)\leqslant P(A)+P(A)-1,$$

即 $P(A)\geqslant 1$，与概率性质不符，排除选项(A).

综上讨论，故选择(B).

本题难度系数 0.600

点拨 如例题 7 方法 2，在对于较为抽象的问题作推断时，可在条件允许范围内选择特例，可以很快排除不合题意的选项，是一常用有效的推断方法.

例 8(97—4) 设 A,B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=$ ________.

解析 本题主要考查随机事件的对立关系及交集的运算律. 由

$$(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})=(\bar{A}B+AB+B)(\bar{A}\bar{B}+A\bar{B}+\bar{B})=B\bar{B}=\varnothing$$

知 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=0$.

本题难度系数 0.680

小结 随机事件的包含关系、相等关系、互斥(不相容)关系及对立关系的讨论和判断，从例题真题标明的时间看，这是概率论与数理统计试题中常态题，应注意复习到位.

随机事件的包含关系、相等关系、互斥(不相容)关系及对立关系的讨论和判断，所涉及的属于基础知识范畴，从难度系数看难度不大，其中例 1 至例 4，主要讨论两个事件的包含、相等、互斥及对立关系，这部分内容一般是考生所熟悉的，而且容易借助文氏图或事件的恒等运算对选项作出推断，因此得分率在 80% 以上. 但从例 5 到例 8，得分不理想，主要问题如下：

(1)将由事件关系推出概率性质的因果关系颠倒，如例 5，由概率 $P(AB)=0$ 推断 A,B 互斥这是十分错误的.

(2)对由事件关系出发引出的概率关系式的判断缺少思路和办法. 如例 7，其中选项(C)和(D)尚可利用文氏图作推断，但选项(A)和(B)就必须结合 3 个知识点，即 $P(C)\geqslant P(AB)$，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，$P(A+B)\leqslant 1$ 才能推断，这种情况下，取特例 $A=B-C$ 的方法应该是一个好的选择.

(3)对应用问题，不善于采用符号化的方法处置，如例 6.

(4)对事件的运算，即对集合的运算不熟练，如例 8，该题虽然得分率达到 0.68，但就题目实际难度而言不够高.

2. 关于随机事件独立性的讨论 (B 级)

例 9(03—4) 对于任意二事件 A 和 B，有(　　).

(A)若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 一定独立

(B)若 $AB\neq\varnothing$，则 A,B 有可能独立

(C)若 $AB=\varnothing$,则 A,B 一定独立

(D)若 $AB=\varnothing$,则 A,B 一定不独立

解析　本题主要考查事件的相容性和独立性的关系. 严格地说,两个事件之间的"互斥"与"相互独立"之间没有任何关系,它们是不同层面上的两个概念. 因此 $AB\neq\varnothing$ 时,A,B 可能独立,也可能不独立,故选择(B).

又若 $P(A)=\frac{1}{5},P(B)=\frac{1}{2},P(A|B)=\frac{2}{3},P(AB)=\frac{1}{3}\neq 0$,显然 $AB\neq\varnothing$,但 A,B 不独立,因此(A)不成立. 而当 $AB=\varnothing$ 时,$A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$,A,B 相互独立,否则不相互独立. 故(C),(D)也不成立.

本题难度系数　0.623

例 10(03－3)　将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件(　　).

(A)A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B)A_2,A_3,A_4 相互独立

(C)A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D)A_2,A_3,A_4 两两独立

解析　本题主要考查多个随机事件相互独立和两两独立的概念. 判断必须严格按定义式计算验证.

由题设,事件 A_1,A_2 相互独立,故

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2))=P(A_1\overline{A_2})=\frac{1}{4}.$$

同理有 $P(A_2A_3)=P(A_2\overline{A_1})=\frac{1}{4}$,而

$$P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

可知 A_1,A_2,A_3 两两独立,但 A_1,A_2,A_3 不相互独立.

又 $A_4=A_1A_2,A_4A_3=\varnothing,P(A_4)=\frac{1}{4},P(A_3)=\frac{1}{2},P(A_3A_4)=0\neq P(A_3)P(A_4)$,

可知 A_2,A_3,A_4 不两两独立,也不相互独立. 故选择(C).

本题难度系数　0.330

例 11　设 A,B,C 为三个相互独立事件,且 $0<P(C)<1$,则在下列给定的 4 对随机事件中不相互独立的是(　　).

(A)$\overline{A+B}$ 与 C　　(B)$\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$

(C)$\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$　　(D)$\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

解析　本题主要考查多个随机事件相互独立的概念及性质. 由于 A,B,C 是三个相互独立事件,因此其中任意两个事件的和、差、交、逆与另一事件或其逆也必相互独立,从而可以判断选项(A)、(C)、(D)给定的 3 对随机事件相互独立,故用排除法,选择(B).

例 12(00－4)　设 A,B,C 三个事件两两独立,则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是(　　).

(A)A 与 BC 独立　　(B)AB 与 $A\cup C$ 独立

(C)AB 与 AC 独立　　(D)$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

解析 类似上例，本题主要考查多个随机事件相互独立和两两独立的概念. 判断必须严格按定义式计算验证. 先从必要性入手. 设 A,B,C 为三个相互独立事件，类似上例引用的性质，可以判定 A 与 BC 独立，仅有选项(A)正确. 可进一步验证充分性. 由于设 A,B,C 三个事件两两独立，且 A 与 BC 独立，从而有

$$P(BC)=P(B)P(C),P(ABC)=P(A)P(BC),$$

因此

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

故选择(A).

本题难度系数 0.420

例 13(00—1) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________ .

解析 本题主要考查事件相互独立的概念及事件概率的运算. 首先要准确理解类似“A 发生 B 不发生的”表述的含义，以及 A 和 B 相互独立时，A 和 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 和 B，$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也相互独立的结论，并建立方程.

依题设，有

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9},$$

及

$$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B),[1-P(\overline{A})]P(\overline{B})=P(\overline{A})[1-P(\overline{B})],$$

即有 $P(\overline{A})=P(\overline{B})$，从而解得

$$P(\overline{A})=\frac{1}{3},P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}.$$

本题难度系数 0.670

例 14(02—4) 设 A,B 是任意两个事件，其中 $0<P(A)<1$，证明 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 是事件 A,B 相互独立的充分必要条件.

分析 本题主要考查事件相互独立的概念，条件概率及其运算. 即证 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 与 $P(AB)=P(A)P(B)$ 等价.

证 由于 $0<P(A)<1$，知条件概率 $P(B|A)$，$P(B|\overline{A})$ 均存在.

必要性证明. 若 A,B 相互独立，则有 $P(B|A)=P(B)$，$P(B|\overline{A})=P(B)$，从而有 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

充分性证明. 若 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则有

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)[P(B)-P(AB)].$$

从而有 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A,B 相互独立.

本题难度系数 0.760

例 15(03—4) 对于任意两个事件 A,B，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})}}$$

称为事件 A,B 的相关系数.

(1)证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数为零；

(2)利用随机变量相关系数的性质证明 $|\rho|\leqslant 1$.

分析　本题主要考查事件独立性和相关系数的概念，及将事件间的关系化为随机变量的关系的方法.是一道多个知识点汇集的综合题，其中将事件间的关系化为随机变量的关系是概率论常用的方法，也是本题解题的关键.

证　(1)由 ρ 的定义式，$\rho=0$ 当且仅当

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

即 A,B 相互独立.

(2)设随机变量 X,Y 分别为

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 出现},\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不出现},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 出现},\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不出现},\end{cases}$$

于是 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-P(A) & P(A)\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-P(B) & P(B)\end{pmatrix}$，有

$$EX=P(A),EY=P(B),$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=P(A)-(P(A))^2=P(A)P(\overline{A}),$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=P(B)P(\overline{B}),$$

$$P(AB)=P\{X=1,Y=1\}=1\times P\{XY=1\}+0\times P\{XY=0\}=EXY.$$

所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=P(AB)-P(A)P(B),$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho.$$

因此事件 A,B 的相关系数即为 X,Y 的相关系数，从而由随机变量的相关系数的基本性质，有 $|\rho|\leqslant 1$.

本题难度系数　0.263

小结　随机事件独立性的讨论始终是考研要面对的问题，而且一直延续到概率论与数理统计问题的方方面面.从以上历年考研真题可以看到，随机事件独立性的题型，主要有四类：一是涉及独立性概念本身，即对若干随机事件相互独立和两两独立的概念的理解，如例10.这也是许多考生较为模糊的概念之一.一个重要结论是，若干随机事件相互独立则必定两两独立，但若干随机事件两两独立未必相互独立；二是对事件独立的充分性和必要性的判别，如例12、例13、例14，不论在什么情况下，关键是判断事件 $A,B(A,B,C)$ 独立，唯一可靠的依据是验证概率定义式 $P(AB)=P(A)P(B)(P(ABC)=P(A)P(B)P(C))$；三是若干相互独立的随机事件中部分事件及其运算之间的独立性的判别，如例11，一个重要结论是，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 相互独立，则其中任意个部分事件的和、差、交、逆与其余部分事件的和、差、交、逆也必相互独立；四是事件的独立与事件的互斥、对立等之间的关系，如例9，例13.需要明确的是，严格讲，“互斥”、“对立”与“相互独立”之间没有任何关系，它们是不同层面上的两个概念，从判别角度上说，前者只能由事件的定义和运算判断，而后者只能由

概率式判定. 当事件 A,B 的概率非零时，A,B 相互独立必相容，而 A,B 相容未必独立. 不少考生误认为两事件不相容就一定独立，是绝对错误的.

在讨论事件独立性概念时，经常要通过概率计算验证，因此要熟练掌握事件概率的计算方法. 由于选择题例 10 需要经过多次运算才能判断，难度系数仅有 0.33，说明考生在这方面有所欠缺. 另外，例 15 将事件的独立性与随机变量的相关系数联系起来，这种转换是概率论的一个重要方法，但一些考生对这种方法的运用显得生疏，对题中"用随机变量相关系数的性质证明"的提示不知从何入手，难度系数仅 0.263，也应引起考生复习时关注. 总体上，独立性的问题是考生所熟悉的，因此其难易度大致在 0.6 上下，当然仍有提升空间.

3. 关于随机事件的无条件概率与条件概率（C级）

例 16(93—4)　假设事件 A,B 满足 $P(B|A)=1$，则(　　).

(A)A 是必然事件　　(B)$P(B|\overline{A})=0$

(C)A 包含事件 B　　(D)$P(A-B)=0$

解析　本题主要考查条件概率公式. 可用三种方法.

方法 1　直选法. 由 $P(B|A)=1$，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A),$$

从而有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)=0.$$

故选择(D).

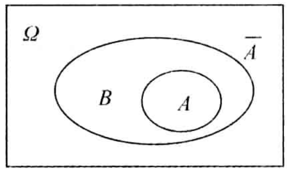

图 1-2

方法 2　排除法. 见反例，若设事件 $A=\{$取一等品$\}$，$B=\{$取一等品或二等品，统称合格品$\}$，现任取 1 件产品，若已知为一等品，则该产品必为合格品，即有 $P(B|A)=1$，但 A 并非必然事件，A 也不包含事件 B，且 $P(B|\overline{A})\neq 0$. 因此仅(D)正确.

方法 3　图解法. 依题意，A 发生，则 B 必发生，如图 1-2 所示. 显然选项(A)，(B)，(C)不正确，故选(D). 或直选(D).

本题难度系数　0.350

例 17(96—4)　已知 $0<P(B)<1$，且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$，则下列选项成立的是(　　).

(A)$P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

(B)$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C)$P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D)$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

解析　本题主要考查条件概率公式及在有条件下概率的加法公式及其运算. 由条件概率公式，有

$$\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}.$$

由于 $0<P(B)<1$，可知

$$P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B).$$

故选择(B). 另外，一般情况下，有条件成立的概率计算公式，换了条件未必成立，因此(A)不正确，又(C)仅当事件 B 与事件 A_1,A_2 相互独立情况下成立，(D)仅当 A_1,A_2 为完备

事件组的情况下成立，由排除法，仅(B)正确.

本题难度系数　0.700

例 18(98—1)　设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有(　　).

(A)$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　(B)$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　　(D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$

解析　本题主要考查条件概率公式，事件独立性和概率的运算. 由条件概率公式

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}B)}{1-P(A)},$$

有

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(\overline{A}B).$$

由公式 $P(\overline{A}B)+P(AB)=P(B)$，所以有

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)[P(B)-P(AB)],$$

即 $P(AB)=P(A)P(B)$. 故选择(C).

本题难度系数　0.690

例 19(94—3)　设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则(　　).

(A)事件 A 和 B 互不相容　　(B)事件 A 和 B 互相对立

(C)事件 A 和 B 互不独立　　(D)事件 A 和 B 相互独立

解析　本题主要考查条件概率公式，事件独立性和互不相容的概念. 由条件概率的计算公式及

$$\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{1-P(B)}=1$$

整理得 $P(AB)=P(A)P(B)$，故选择(D).

本题难度系数　0.711

> **点拨**　由于由概率公式不能推断事件的相容性和对立关系，可排除(A)，(B)，在剩下的选项中容易确定(D).

例 20(06—1)　设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0,P(A|B)=1$，则必有(　　).

(A)$P(A\cup B)>P(A)$　　(B)$P(A\cup B)>P(B)$

(C)$P(A\cup B)=P(A)$　　(D)$P(A\cup B)=P(B)$

解析　本题主要考查条件概率公式、加法公式和乘法公式. 由加法公式和乘法公式，

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(B),$$
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A).$$

故选择(C).

本题难度系数　0.688

例 21(12—1)　设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$________.

解析 本题主要考查条件概率公式，概率性质和计算公式. 属于基本运算的题型. 由条件概率公式

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})},$$

其中

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=\frac{1}{2}-P(ABC).$$

由于 A,C 互不相容，即 $AC=\varnothing$，$P(AC)=0$，又 $ABC\subset AC$，得 $P(ABC)=0$，代入得 $P(AB\overline{C})=\frac{1}{2}$，故

$$P(AB|\overline{C})=\frac{3}{4}.$$

例 22(93—5) 在 10 件中有 4 件是不合格产品，从中任取两件，已知所取的两件中至少有一件是不合格品，则另一件也是不合格的概率为__________.

解析 本题主要考查古典概型与条件概率. 解题时首先设定好事件，方法不同设定随之而定.

方法 1 从超几何分布角度. 记事件 $A=\{$取出两件至少有一件是不合格品$\}$，$B=\{$取出两件都是不合格品$\}$，则 $AB=B$，$P(AB)=P(B)$，并有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3},P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}.$$

因此所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{15}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{5}.$$

方法 2 从连续抽取角度. 记事件 $A=\{$取出两件至少有一件是不合格品$\}$，$B=\{$取出两件都是不合格品$\}$，$A_i=\{$第 i 次取出不合格品$\}(i=1,2)$，于是

$$A=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2+A_1A_2,B=A_1A_2.$$

因此所求概率为

$$\begin{aligned}P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}&=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2+A_1A_2)}\\&=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)}\\&=\left(\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right)\div\left(\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right)=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

本题难度系数 0.060

小结 以上例题表明条件概率及围绕条件概率展开事件关系的讨论、概率计算公式变换和概率计算是考研中的常见题，从时间分布上看早期出现的频率相对较高. 从题型特点看，绝大多数讨论都要用到条件概率公式. 由于一般情况下，条件概率公式只

能推导与概率计算相关的选项，不能推断事件的对立、互斥、包含等关系，因此在选择题中相关选项是应排除的，如例16，例19中看到的结果．于是条件概率的讨论主要有三种类型，一种是与独立性的判断有关，如例18，例19．另一种是在有条件下成立的概率计算公式在变换条件或无条件下是否成立的讨论．如例17，例21，总的说，在有条件下成立的概率计算公式在变换条件或无条件下未必成立，而在无条件下成立的概率计算公式在有条件下仍然成立．正确的结论最终要经过计算确认，因此需要熟悉相关的概率性质和加法和乘法公式及运算．还有一种是条件概率的计算题，如例21，例22．由于条件概率的推断题为常见题，涉及的公式有限，总体上难度不大，难度系数基本保持0.70的水平．而计算题难度差异很大，例22难度系数仅为0.06，极为少见，多数考生求的是“两件都是不合格品”的概率，问题出在没有真正理解题意和条件概率的意义．

三、问题评析与归纳

（1）就概率论与数理统计的知识体系而言，随机事件设定、运算以及它们相互之间的关系是属于最基础的部分．从历年考试情况看，一方面，它们是选择题重要候选内容之一，并均衡出现在考试中，虽分值不高，但不可忽视．另一方面，在概率应用题中对随机事件的设定往往是关键的一步，因为符号化的过程体现对一个问题的解读和解题的思路．一个好的设定，是顺利解题的前提．从考试得分率看，这部分往往是考生的弱项，应予以重视．

（2）随机事件的包含关系、相等关系、互斥（不相容）关系、对立关系与相互独立关系是不同层面上的两个关系类型．前者是以集合及其运算形式定义和推导的，因此相关题目的推断主要依靠事件的恒等运算，其中最常用的是德·摩根律，或者用文氏图，借助几何直观作出判断，往往是一个行之有效的方法．

需要再次强调的是，随机事件的包含关系、相等关系、互斥（不相容）关系、对立关系不能由概率值判定．常见的错误是：由 $P(A)=1$ 误认为 A 是必然事件，由 $P(B)=0$ 误认为 B 是不可能事件，由 $P(AB)=0$ 误认为 A,B 是互斥事件．而后者是依概率关系确定的，因此判断相互独立只能依据 $P(AB)=P(A)P(B)$．由两事件对立（或互斥）事件推断独立，或由两事件独立推断事件对立（或互斥）都是错误的．

（3）在事件关系的讨论中最重要的是相互独立关系．注意以下要点：

①关于事件独立性的判断．实际考试中主要有两种方法：

一种是选择题或论证题中，必须按定义计算验证 $P(AB)=P(A)P(B)$．

与独立性定义等价的结论有

$$P(B|A)=P(B|\overline{A})\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)\Leftrightarrow P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1,$$

其中 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$．

一种是在应用题中，根据题意确认事件的独立性，不必计算验证．如有放回抽取问题中每次抽取中发生的事件与其他次抽取中发生的事件相互独立，又如在贝努里重复试验中发生的事件相互独立．

②注意区分事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 相互独立与事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两独立的概念．有结论：$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 相互独立，则 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两独立．但其逆命题不成立．

③注意掌握关于事件独立性更为一般性的结论：即若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 相互独立，则

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com