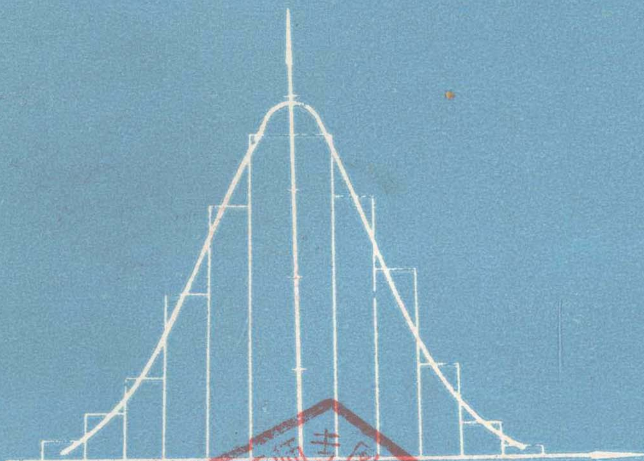
报考硕士研究生

高等数学函授教材

第二册　级数·多元微积分

张　明　尧



安徽大学数学系函授部

一九八五年六月

目 录

第一章　多元函数微分法及其应用

一　多元函数微分法

1　设$f(x+y,\ y/x)=x^2-y^2$，求$f(x,\ y)$。

【由　$x^2-y^2=(x+y)^2(1-y/x)/(1+y/x)$ 得$f(x,y)=$
$=x^2(1-y)/(1+y)$。

2　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$。

【由$|\sin(x^3+y^3)|\leqslant|x^3+y^3|\leqslant(|x|+|y|)(x^2+y^2)$ 得极根为0

3　证明或举例推翻下列结论；

（1）若二重极限存在，则两个两次极限都存在。（2）若在（a,b），f的二重极限存在为A，当x取任何与a邻近的值时，$\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=\varphi(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=A$。（3）若$f$在点（$a,b$）只有一个二次极限，则二重极限不存在。（4）若$f$在点（$a,b$）有两个不等的二次极限，则二重极限不存在。(5）若两个二次极限存在且相等，则二重极限必存在

【（1）一般不成立．例：$f(x,y)=(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$在(0，0)点二重极限为0，但两个二次极限都不存在。（2）结论成立．因二重极限存在，对任给$\varepsilon>0$，有$\delta(\varepsilon)>0$对一切适合$|x-a|<\delta$，$|y-b|<\delta$的定义域中的点（x，y），有$|\varphi(x)-A|<\varepsilon$，令$x\to a$得证.（3）一般不成立..例$f(x,y)=$
$=x\sin(1/y)$在（0，0）点。（4）结论成立．因若不然将与

(2)的结论矛盾.(5)一般不成立,例$f(x,y)=(x^2+y^2)/[x^2y^2+(x-y)^2]$ 在(0,0)两个二次极限为 0,但二重极限不存在(令$y=kx,x\to0$,当k取不同的值时极限也改变)。

4 证明：若可微函数$u=f(x,y,z)$满足方程(欧拉公式)

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$，即f为n次齐次函数。

【固定定义域中任一点(x_0,y_0,z_0)，对$F(t)=f(tx_0,ty_0,tz_0)/t^n(t>0)$关于$t$求导易得$F'(t)=0$，故对$t>0$，$F(t)=C$ (C为常数，令$t=1$定出$C=f(x_0,y_0,z_0)$，对$t<0$可仿上证之。

5 设$f(x,y,z)$是可微的n次齐次函数，则其偏导函数 f'_x,f'_y,f'_z均为 $n-1$次齐次函数。

【由$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$两边对x求偏导数并消去t 得 $f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z)$，$f'_1(\cdot,\cdot,\cdot,)$表示对第一个变量求导，这证明$f'_x$是$n-1$次齐次函数，同理可证其余。

6 设 $u=f(x,y,z)$为二次可微的n次齐次函数，证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u.$$

【先由$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$ $(t>0)$对t求导并取$t=1$证出欧拉公式 $f'_x(x,y,z)x+f'_y(x,y,z)y+f'_z(x,y,z)z=nf(x,y,z)$。然后将对$n-1$次齐次函数$\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$，$\partial u/\partial z$分别应用欧拉公式所得三式分别乘以$x,y,z$后再相加即得证。

7 证明：若 f''_{xy} 与f''_{yx}都在点(x,y)连续，则

$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

【记$\varphi(x,y)=f(x+\triangle x,y)-f(x,y)$，在$\Phi=\varphi(x,y+\triangle y)-$ $-\varphi(x,y)$中先对y再对x用中值定理得$\Phi=f''_{yx}(x+\theta_2\triangle x,y+$ $+\theta_1\triangle y)\triangle x\triangle y(0<\theta_1,\theta_2<1)$，类似可证$\Phi=f''_{xy}(x+\theta_3\triangle x,$ $y+\theta_4\triangle y)\triangle x\triangle y\quad(0<\theta_3,\ \theta_4<1)$，令$\triangle x\to0$，$\triangle y\to0$由偏导函数连续性即得证。

8　若$u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r)$二次可微，证明：

$$\triangle u=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2$$

仅是r的函数，并求出这函数来。

【$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{du}{dr}$，$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{x^2}{r^3}\frac{du}{dr}+\left(\frac{x}{r}\right)^2\frac{d^2u}{dr^2}$，同理可求出$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$与$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$，最后 $\triangle u=\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}$.

9　设u、v均为x，y之函数，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，将

$$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y,\ \partial u/\partial y=-\partial v/\partial x$$

化成极座标形式。

【$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\operatorname{arctg}(y/x)$，$\partial u/\partial x=x/r\cdot\partial u/\partial r-$ $y/r^2\cdot\partial u/\partial\theta$，类似可得$\partial u/\partial y$，$\partial v/\partial x$，$\partial v/\partial y$之表达式．代入所给方程组，分别消去$\partial u/\partial r$与$\partial u/\partial\theta$得极坐标形式：$\partial u/\partial r=$ $=\partial v/\partial\theta$，$\partial u/\partial\theta=-r\partial v/\partial r$.

10　设u、v均二次可微，$\triangle$为拉普拉斯算子，证明

$$\triangle(u,v)=u\triangle v+v\triangle u+2\triangle(u,v),$$

这里$\triangle(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$.

【由△定义及求导法则即得.

11　设$u_1=u_1(x,y,z)$与$u_2=u_2(x,y,z)$均满足$\triangle u=0$，证明$\nu=u_1+(x^2+y^2+z^2)u_2$满足二重调和方程$\triangle(\triangle\nu)=0$

【直接计算并应用上题结果即可.

12　设$f(x,y,z)$为可微分m次的n次齐次函数．证

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

【对$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$两边关于t求m阶导数，由归纳法可证，左方的m阶导数为

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m}\frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\frac{\partial^m f(tx,ty,tz)}{\partial(xt)^{\alpha_1}\partial(yt)^{\alpha_2}\partial(zt)^{\alpha_3}}\cdot$$

$$\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}=t^{n-m}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z),$$

而右方的m阶导数为$n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y,z)$.
取$t=1$即得证.
证法二，$m=1$是欧拉公式，$m=2$见第6题，设对$m=k-1$结论成立，由第5题及归纳假设可得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1}f'_x=[(n-1)!/(n-k)!]f'_x\quad,$$

同理可对f'_y，f'_z得相应等式，三式各乘以x,y,z并相加即得证

13　求在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处函数$u=ax^2+by^2+cz^2$及$\nu=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$　$(a,b,c,m,n,p$为常数且$a^2+b^2+c^2\neq0)$二者梯度之间夹角θ当M_0移至无穷远时之极限.

【$\mathrm{grad}\,\nu=\{2ax_0+2m,\ 2by_0+2n,\ 2cz_0+2p\}$，　$\mathrm{grad}\,u=\{2ax_0,\ 2by_0,\ 2cz_0\}$．记　$ax_0=\alpha$，$by_0=\beta$，$cz_0=\gamma$，ax_0+m

$=\alpha_1$，$by_0+n=\beta_1$，$cz_0+p=\gamma_1$，则 $\cos\theta=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)/[\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2}]$，于是$\sin^2\theta=[(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2]\ /\ [(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2)]$．令$\delta=max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$，则$\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\delta$，当$M_0$移向无穷远时有$\delta\to+\infty$。记$q=max(|m|,|n|,|p|)$，就有$0\leqslant\sin^2\theta\leqslant[(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2]/[\delta^2\cdot(\delta^2-6q\delta-3q^2)]\to0$，故$\theta\to0$。

14 设$u=f(x,y,z)$二次可微，l_1，l_2，l_3为三个互相垂直的方向，方向角各为α_j，β_j，γ_j，$(j=1,2,3)$。证明（记号见第8、10题）

(1) $\sum\limits_{j=1}^{3}(\frac{\partial u}{\partial l_j})^2=\triangle(u,u)$，　　(2) $\sum\limits_{j=1}^{3}\frac{\partial^2u}{\partial l_j^2}=\triangle u$。

【由方向导数定义可得

$$\frac{\partial^2u}{\partial l_j{}^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_j+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos^2\beta_j+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos^2\gamma_j+$$

$$+2(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha_j\cos\beta_j+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta_j\cos\gamma_j+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma_j\cos\alpha_j)$$

再利用 $\sum\limits_{j=1}^{3}\cos^2\alpha_j=\sum\limits_{j=1}^{3}\cos^2\beta_j=\sum\limits_{j=1}^{3}\cos^2\gamma_j=1$ 以及

$$\sum_{j=1}^{3}\cos\alpha_j\cos\beta_j=\sum_{j=1}^{3}\cos\beta_j\cos\gamma_j=\sum_{j=1}^{3}\cos\gamma_j\cos\alpha_j=0$$

即得（2）式。（1）式可仿此证之。

15 设$z=f(x,y)$为二元函数，$M(a,b)$为定点，证明或举例推翻以下结论：(1)若在M点$\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$都存在，则f在M点连续．(2)若在M点f连续且$\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$都存在，

则$\partial z/\partial x$与$\partial z/\partial y$在M的邻域内有界。(3)若在M点$\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$都存在，则f在该点可微。(4)若$\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ 在M 点存在且在M点的邻域中有界，则f在该点可微。(5)若$\partial z/\partial x$与$\partial z/\partial y$在M点连续，则f在M点可微。(6)若f在点M可微，则$\partial z/\partial x$与$\partial z/\partial y$存在且连续。

【(1)不一定，例：$f(x)=xy^2/(x^2+y^4)$ $(x^2+y^2\neq 0$时$)$及$=0(x=y=0$时$)$。易有 $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$，但当$x=y^2$，$y\to 0$时有$f\to\frac{1}{2}\neq f(0,0)$。

(2)不一定，例：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在(0，0)的两个偏导数均为0，且f在(0，0)连续，但$f'_x(x,y)=\sqrt{|xy|}/2x$ $(x\neq 0)$，$=0(x=y=0)$且对$(0,y)(y\neq 0)$无意义，对f'_y亦有类似结论。故它们在$(0,0)$的任何邻域内均无界。

(3)不一定，例1：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在(0，0)不可微，因令$y=kx$，则当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$时有$[f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y]/\rho\to\sqrt{|k|/(1+k^2)}\not\to 0$当$(k\neq 0$时$)$。例2：$f(x,y)=0$ $(xy=0$时$)$或1 $(xy\neq 0)$，它在(0，0)也必不可微，因不然f必在(0，0)连续，但当点(x,y)沿x轴或沿y轴分别趋于(0，0)时，f有极限值0，而当点(x,y)沿任何不与数轴相交的路经趋于(0，0)时f有极限1。

(4)不一定，例：$f(x,y)=xy/\sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\neq 0$时$)$及$=0(x=y=0$时$)$，$f'_x(x,y)=y^3/(x^2+y^2)^{3/2}$ $(x^2+y^2\neq 0$时$)$或$=0(x=y=0$时$)$，故$|f'_x|\leqslant 1$，同理可证$|f'_y|$有界。但

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$时 $\lim[f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)\cdot y]/\rho=\lim xy/(x^2+y^2)$不存在。

(5)结论成立，证明详见同济大学数学教研室编《高等数学》下册(第二版)P. 22。

(6)不一定，例：$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1}$($x^2+y^2\neq 0$时)或$=0$($x=y=0$时)。$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，$f'_x(1/\sqrt{2n\pi},0)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty(n\to\infty)$，故$f'_x$在(0，0)不连续，类似地$f'_y$在$(0,0)$也不连续.但当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$时，

$\lim[f(x,y)-f(0,0)-xf'_x(0,0)-yf'_y(0,0)]/\rho=0$，故在(0，0)可微。

16 设$f(x,y,z)$为n次齐次多项式，证明 $d^nf(x,y,z)=n!f(dx,dy,dz)$。

【任一n次齐次多项式可表为$Ax^py^qz^r$($p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，$r\geqslant 0$ $p+q+r=n$)型项的和，而$d^n(Ax^py^qz^r)=C_n^{p+q}d^{p+q}(x^py^q)\cdot d^r(z)^r$ $=C_n^{p+q}[C_{p+q}^p\cdot d^p(x^p)d^q(y^q)d^r(z^r)]=n!dx^pdy^qdz^r$，故得证。

17 设$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，$f(x,y,z)=xy^2z^3$。在以下两情形中分别计算$f'_x(1,1,1)$：(1)$z=z(x,y)$是由题给方程定义的隐函数，(2)$y=y(x,z)$是由同一方程定义的隐函数。

【记$F=x^2+y^2+z^2-3xyz$，则在(1)中有

$$z'_x(1,1) = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = -\frac{F'_x(x,1,1)|_{=1}}{F'_z(1,1,z)|_{=1}} = -1,$$

$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\Big|_{(1,1,1)} = \frac{d}{dx}f(x,1,1)\Big|_{x=1} + \frac{d}{dz}f(1,1,z)\Big|_{z=1}\cdot z'_x(1,1) = -2$。在(2)中有$y'_x(1,1)$

$$= -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)} = -1 \text{及} \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z),z)]\Big|_{(1,1,1)}$$

$= -1$。

（注）请读者研究上述二导数值不等的原因。

18 设$x = x(y,z)$，$y = y(x,z)$，$z = z(x,y)$为由$F(x,y,z) = 0$定义的函数，求$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$。

【由隐函数求导公式有$\partial x/\partial y = -(\partial F/\partial y)/(\partial F/\partial x)$等等，故其值为$-1$。

19 设$x = \varphi(u,v)$，$y = \psi(u,v)$，求反函数$u = u(x,y)$和$v = v(x,y)$的一阶偏导函数。

【用全微分法解较简单．从一阶微分式

$$dx = \varphi'_1 du + \varphi'_2 dv, \qquad dy = \psi'_1 du + \psi'_2 dv$$

解得 $du = (\psi'_2 dx - \varphi'_2 dy)/K$，$dv = (\varphi'_1 dy - \psi'_1 dx)/K$，于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial\psi}{\partial v},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{K}\frac{\partial\psi}{\partial u},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

其中 $K = \varphi'_1\psi'_2 - \varphi'_2\psi'_1$。

（注）请读者续求反函数的诸二阶偏导数。

20　设Z是由$z=x+y\varphi(z)$所定义的（变数x与y的）隐函数$u=f(z)$，证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\}.$$

【由 $z=x+y\varphi(z)$ 得 $dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$，解得 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$后易证得$\partial u/\partial y=f'(z)\partial z/\partial y=f'(z)\varphi(z)\cdot\partial z/\partial x=\varphi(z)\partial u/\partial x$，$n=1$得证，设$n=k$结论成立，则

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}[\varphi^k(z)\partial u/\partial x]\}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\{\partial[\varphi^k(z)\cdot\partial u/\partial x]/\partial y\}$$

对任意可微函数$g(z)$有（用$n=1$的结论）

$\partial[g(z)\partial u/\partial x]/\partial y=g'(z)[\varphi(z)\partial z/\partial x]\partial u/\partial x+g(z)\partial[\varphi(z)\cdot\partial u/\partial x]/\partial x=[\varphi(z)\partial u/\partial x]\partial g(z)/\partial x+g(z)\partial[\varphi(z)\cdot\partial u/\partial x]/\partial x=\partial[\varphi(z)g(z)\partial z/\partial x]/\partial x$，特别取$g(z)=\varphi^k(z)$代入之，然后将所得结果代入$\partial^{k+1}u/\partial y^{k+1}$即得$n=k+1$的结论。

21　令$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，将$\omega=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2$改写成极坐标形式。

【视r、φ为中间变量，x、y为自变量，容易求得

$$d^2r=d[(x/r)\cdot dx+(y/x)\cdot dy]=(ydx-xdy)^2/r^3,$$

$$d^2\varphi=d[(x/r^2)\cdot dy-(y/r^2)\cdot dx]=-2r^{-4}(xdy-ydx)(xdx+ydy)$$

将它们代入 $d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}dr^2+2\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}drd\varphi+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}d^2r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi$ 可将d^2u用自变量x、y的微分及相应函数表出，由此易得公式

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\qquad(1)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\qquad (2)$$

相加即得 $\omega=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$。

22 设$u(x,y)$有二阶导数存在，证明$u(x,y)=f(x)g(y)$之充要条件是 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\quad(u\neq 0)$

【必要性由计算即得证，为证充分性，记$\nu=\partial u/\partial y$，则所给方程变形为$u\partial\nu/\partial x=\nu\partial u/\partial x$，由$u\neq0$得$(u\cdot\partial\nu/\partial x-\nu\cdot\partial u/\partial x)/u^2=0$，即$\partial(\nu/u)/\partial x=0$故$\nu/u=\varphi_1(y)$。即$(\partial u/\partial y)/u=\varphi_1(y)$，解得 $\ln u=\int\varphi_1(y)dy+\varphi_2(x)$，于是 $u=exp\{\int\varphi_1(y)dy+\varphi_2(x)\}=f(x)g(y)$。（其中$exp(x)=e^x$）。

23 设$F(x)=\int_0^x f(x,t)dt$，f有一阶连续偏导数，求$F'(x)$。

【$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\int_0^x\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}dt+\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\int_x^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt=\int_0^x f_1'(x,t)dt+\lim\limits_{\Delta x\to0}f_2'(x+\Delta x,x+\theta\Delta x)=\int_0^x f_1'(x,t)dt+f_2'(x,x)$，这里$f_1'$与$f_2'$分别表示对第一及第二个变元求偏导数。

24 设$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，φ在$(0,0)$邻域内连续，问：（1）φ满足什么条件时，$f_x'(0,0)$与$f_y'(0,0)$存在？（2）φ满足什么条件时，f在$(0,0)$可微？

【$\lim\limits_{\Delta x\to0+}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0+}\frac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$

$=\varphi(0,0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x,x)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$$

$=-\varphi(0,0)$,

故$f'_x(0,0)$存在，当且仅当$\varphi(0,0)=-\varphi(0,0)$即$\varphi(0,0)=0$，类似可证，$f'_y(0,0)$存在之充要条件仍是$\varphi(0,0)=0$

为在（0，0）可微，$f'_x(0,0)$与$f'_y(0,0)$也必须存在，故也需$\varphi(0,0)=0$.由可微性定义，需$\Delta f=f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)=o(\rho)$，即需$\Delta f/\rho\to 0\ (\rho\to 0)$令$\Delta x=\rho\cos\theta$，$\Delta y=\rho\sin\theta$，则 $\Delta f/\rho=|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)/\rho=|\cos\theta-\sin\theta|\varphi(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$，它当$\varphi(0,0)=0$时趋于0 $(\rho\to 0)$。故在（0，0）可微的充要条件仍是$\varphi(0,0)=0$。

二　微分法之应用

25　求椭球面$x^2+y^2+z^2-xy=1$在各坐标面上之投影。

【先求在Oxy面上之投影，投影区域之边界系由椭球面上这种点的投影点构成：该点向Oxy面所作垂线恰在过该点的切平面内，即曲面在该点之法线与Oxy面平行，该点法向量为$\vec{n}=\{2x-y,\ 2y-x,\ 2z\}$，　故这种点应满足方程组$2z=0$，$x^2+y^2+z^2-xy=1$，即向$Oxy$面投影域之边界是$Oxy$面上的圆周$x^2+y^2-xy=1$，同理，在$Oxz$及$Oyz$面上投影域之边界线分别为两平面上的椭圆$\frac{3}{4}x^2+z^2=1$及椭圆$\frac{3}{4}y^2+z^2=1$。

26　求函数$z=(ax+by+c)/\sqrt{1+x^2+y^2}\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$

之极值，

【用极坐标变为$z=(ar\cos\varphi+br\sin\varphi+c)/\sqrt{r^2+1}$，由$\partial z/\partial r=0$，$\partial z/\partial\varphi=0$ 得 $a\cos\varphi+b\sin\varphi-cr=0$，$-ar\sin\varphi+br\cos\varphi=0$。

（一）若a、b不同为0，由第二个方程得$r=0$或$a\sin\varphi=b\cos\varphi$，①若$r=0$，由第一个方程知必须 $a=0$，$\varphi=0$，π，2π 或必须$b=0$，$\varphi=\pi/2$，$3\pi/2$，在$a=0$时得 $\partial^2z/\partial r^2=-c$，$\partial^2z/\partial r\partial\varphi=\pm b$，$\partial^2z/\partial\varphi^2=0$，$(-c)\cdot0-(\pm b)^2<0$，故在这种点无极值，同理，在$r=0$，$b=0$，$\varphi=\pi/2$，$3\pi/2$ 时也无极值。②若 $a\sin\varphi=b\cos\varphi$，则$\cos\varphi=\pm a/\sqrt{a^2+b^2}$，$\sin\varphi=\pm b/\sqrt{a^2+b^2}$，易见 $c\neq0$（否则将有 $a=b=0$，与题设矛盾），于是有$r=(a\cos\varphi+b\sin\varphi)/c=\pm\sqrt{a+b^2}/c$，为保证$r\geqslant0$，应取$\cos\varphi$及$\sin\varphi$与$c$同号，此时$x=a/c$，$y=b/c$，$z''_{rr}=-c(1+3r^2)/(1+r^2)^{5/2}$，$z''_{\varphi\varphi}=-cr^2/(1+r^2)^{1/2}$，$z''_{r\varphi}=0$，

$z''_{rr}z''_{\varphi\varphi}-(z''_{r\varphi})^2>0$，故 $c>0$时$z''_{rr}<0$，取极大值

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$c<0$时 $z''_{rr}>0$，取极小值$-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 。

（二）若$a=b=0$，必$c\neq0$，静止点为（0，0）易证$c>0$时$z=c$为极大值，$c<0$时$z=c$为极小值。

（注）请试用直角坐标直接解之，并作比较。

27 求变量x，y的隐函数z的极值，这里

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$$

【用求微分解之，微分所给方程（易见$z=2$时不可微），对$z\neq2$得静止点为$x=1$，$y=-1$（相应有$z=6$及$z=-2$）在静止点易求得$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0$(当$dx^2+dy^2\neq0$且

$Z=6$时），故$x=1$，$y=-1$时取极大值$z=6$，又易证$x=1$，$y=-1$时z也取极小值-2，$z=2$是球的切平面与OZ轴平行之处，故在该点不取极值。

28 求函数$z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$在限制条件$x^2+y^2=1$下的极值点。

【用拉格朗日不定乘数法解，作 $F=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2)$，由$x^2+y^2=1$知$x$与$y$不全为0，故需方程组$\partial F/\partial x=0$，$\lambda y\partial F/\partial y=0$有非零解，于是系数行列式为0：$\begin{vmatrix}A-\lambda & B\\ B & C-\lambda\end{vmatrix}=0$。若$(A-C)^2+4B^2=0$，则$z=A(x^2+y^2)=A$为常数，不必讨论了，若$(A-C)^2+4B^2\neq0$，则有二相异根$\lambda_1$，$\lambda_2$（不妨设$\lambda_1>\lambda_2$）。相应得$x_{1,2}=\pm(\lambda_1-C)/\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}$，$y_{1,2}=\pm(\lambda_1-A)/\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}$，$x_{3,4}=\pm(\lambda_2-C)/\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}$，$y_{3,4}=\pm(\lambda_2-A)/\sqrt{B_2+(\lambda_2-A)^2}$。相应解得

$$z(x_j,y_j)=(Ax_j+By_j)x_j+(Bx_j+Cy_j)y_j=(\tilde{\lambda}_j x_j)x_j+(\tilde{\lambda}_j y_j)y_j=\tilde{\lambda}_j(j=1,2,3,4,\ \tilde{\lambda}_1=\tilde{\lambda}_2=\lambda_1,\ \tilde{\lambda}_3=\tilde{\lambda}_4=\lambda_2)$$。因函数z在单位圆周上连续且不为常数，故必取到相异的最大及最小值，于是函数在(x_1,y_1)及(x_2,y_2)取最大值λ_1（也是极大值），在(x_3,y_3)及(x_4,y_4)取最小值λ_2（也是极小值）。

（注）请读者作$x=\cos t$，$y=\sin t$化为单变量极值问题解之，并作比较。

29 若$n\geqslant1$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，证明$(x^n+y^n)/2\geqslant[(x+y)/2]^n$。

【考虑函数$z=(x^n+y^n)/2$在条件$x+y=a$（$a>0$，$x\geqslant0$，

$y\geqslant 0$)下的极值。易求得静止点为$(a/2, a/2)$，将此点值与在边界点（0，a），（a，0）的值比较知结论成立。

（注）1：请将求极值函数与限制条件交换再证明之，并作比较。2：此题可用凸函数理论简单获证，详见有关论著。

30 证明或举例推翻下述结论：
（1）函数在过点$M_0(x_0, y_0)$的每条直线上都在M_0点取极小（大）值，则函数在该点取极小（大）值，（2）函数在域中仅有一个极值怀疑点，且在该点取极大（小）值，则必在该点取最大（小）值。

【（1）一般不成立.例：$f(x, y)=(x-y^2)(2x-y^2)$，在过原点的每条直线$y=kx$及直线$x=0$上都以$f(0,0)=0$为极小值，但对$a>0$有$f(a, \sqrt{1.5a})=-0.25a^2<0$,故$f$在原点不取极小值。
（2）一般不成立。例：$f(x, y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，易证它在闭矩形域$|x|\leqslant 5$，$|y|\leqslant 1$内部仅有一个极值怀疑点（0，0），且在（0，0）取极大值$f(0,0)=0$,但它并不是f在该域上的最大值，例如$f(5, 0)=25>0$。
（注）对一元函数结论（2）成立，这反映了多元函数与一元函数有很大的差别。

31 讨论函数极值：（1）$z=y^2+x^4$ (2)$z=y^2+x^3$

【静止点均为（0，0），（1）因$z\geqslant 0$，$z(0,0)=0$，故在（0，0）取极小值.（2）对$x=2y>0$有$z(2y,y)>0$，对$x=-(2y)^{2/3}$. $y>0$，有$z<0$，故在（0，0）不取极值，

（注）在此二例中二阶偏导数判别极值类型的方法失效。

32 证明不等式$\sqrt[4]{xyzt}\leqslant(x+y+z+t)/4$

【研究函数$u=xyzt$在条件$x+y+z+t=4c(c>0)$下的最

大值即可．注意静止点为P_0（c，c，c，c），本题不存在最小值，且当点（x，y，z，t）趋于讨论区域的边界（即至少有一个变元为0）时有$u=0$，故最大值在P_0达到。

（注）①也可从限制条件解出一个变元代入u中化为无条件极值问题求解.②也可考虑函数$u=x+y+z+t$在条件$xyzt=c^4$（$c>0$）下的最小值（要求x，y，z，$t>0$），对各种证法的优劣，请读者自行比较。③此题可推广到n个变元的情形，试推广这个结论。

33 求 $u=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i>0)$ 在条件$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i=a$下的最小值（$a>0$，$x_i>0$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$n$）.

【将限制条件改为 $\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i=\ln a$计算较简单．由拉格朗日乘数法得静止点为 P_0 $(\sqrt[\alpha_1]{\lambda/\alpha_1}$, $\cdots$, $\sqrt[\alpha_n]{\lambda/\alpha_n})$，相应有 $\lambda=(a\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[\alpha_i]{\alpha_i})^{1/\beta}$ 这里$\beta=\sum\limits_{1}^{n}\alpha_i^{-1}$）及$u(P_0)=\beta\lambda$．易见$\beta\lambda$即为所求者。

34 由直圆柱及直圆锥作顶构成一个立体。当其全表面积为Q时，求有最大体积的尺寸。

【设圆柱部分底半径为R，高为h，圆锥母线与底面夹角为α，则$\pi R^2+2\pi Rh+\pi R^2/\cos\alpha=Q$，$R>0$，$h>0$，$0\leqslant\alpha<\pi/2$，体积为$V=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\mathrm{tg}\alpha$．由不定乘数法得$\sin\alpha=2/3$，$h=(1+1/\sqrt{5})R$，$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{Q/\pi}$，相应有$V_0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{Q^3/\pi}$)．较困难的是验证$V_0$是最大值．易见$R^2$，