高等学校电子信息学科“十二五”规划教材

# 随机信号分析基础

梁红玉 郑 霖 王俊义 樊孝明 编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校电子信息学科“十二五”规划教材

广西重点学科精品课程专业基础课教材

# 随机信号分析基础

梁红玉 郑 霖
王俊义 樊孝明 编



西安电子科技大学出版社

## 内容简介

本书为广西重点学科（通信工程和电子信息工程）精品课程的专业基础课教材，目的是帮助相关专业读者打下牢固的随机信号分析的基础，使其掌握现代信号分析和处理技术的研究方法，紧跟技术发展。全书共六章，主要包括随机信号的基本理论和分析方法。本书在回顾随机变量研究方法的基础上引出随机信号的相关概念，然后分别从随机信号的时域和频域讨论随机信号的特点，并对随机信号通过线性系统响应以及通信系统中常见的窄带随机信号进行了分析。

本书以概率论、高等数学和信号系统分析的基础知识为背景，既可以作为高等学校通信、电子信息类专业学生的教材，也可作为相关专业领域的师生、科研人员和工程技术人员的参考资料。

**图书在版编目(CIP)数据**

随机信号分析基础/梁红玉等编. —西安：西安电子科技大学出版社，2013.7

高等学校电子信息学科“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5606-3072-4

Ⅰ. ① 随…　Ⅱ. ① 梁…　Ⅲ. ① 随机信号—信号分析　Ⅳ. ①TN911.6

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 152334 号**

策划编辑　马乐惠

责任编辑　马乐惠　吴晓明

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　西安文化彩印厂

版　　次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张　10

字　　数　230 千字

印　　数　1～3000 册

定　　价　18.00 元

ISBN 978-7-5606-3072-4/TN

**XDUP　3364001-1**

# 前 言

随机信号分析是通信、电子信息类专业的主要专业基础课程之一。本书吸取了目前国内外同类教材的长处，在编者多年教学实践总结的基础上精心编写而成。设置该课程的目的是为了使通信、电子信息等相关专业学生全面掌握随机信号分析的基础理论和分析方法，并能将学到的理论和电子、通信等领域的知识相联系，掌握随机信号通过电子通信系统的分析和处理方法。同时，学习一些与现代信号处理理论相关的基础知识，以培养学生具备适应未来新的交叉学科发展的综合应用能力和创新能力。

本教材在内容的组织上，先介绍随机变量的相关知识，然后介绍随机信号的概念及特点；先介绍随机信号的时域分析方法，再介绍随机信号的频域分析方法；先阐述基本理论和基本方法，再以实例和实际应用加以说明。教材内容的这种组织方式，体现了“重视基础、强调实践、突出理论和实践相结合”的教学原则。

本书共分 6 章。第一章介绍概率论的基础知识，重点讲述随机变量的研究和分析方法，为后面的学习奠定基础。第二章介绍随机信号的基本概念、描述方式及其统计特性，分析了几种典型的随机信号和重要的高斯随机信号。第三章介绍随机信号的平稳性与各态历经性，分析了平稳随机信号自相关函数的特性以及各态历经性的意义与实际应用。第四章对随机信号进行了频域分析，给出了一般随机信号和平稳随机信号的功率谱密度及互功率谱密度。第五章介绍随机信号通过线性时不变系统的分析方法，讨论了噪声中信号处理的基本技术，并分析了匹配滤波器的基本原理。第六章讨论窄带随机信号的物理模型和数学模型，分析了窄带随机信号的统计特性及窄带随机信号通过包络检波器或者平方律滤波器后统计特性的变化。

本书建议教学学时数为 32～48 学时。为了满足不同教学需求并利于广大读者自学，书中对一些不做硬性要求的节或小节标注了“*”。本书条理清晰，图文并茂，深入浅出，对于初学者来说是一本较为基础的入门教材。

本书由梁红玉、郑霖、王俊义和樊孝明合作编写。其中，第一至四章由梁红玉编写；第五章由樊孝明和王俊义共同编写；第六章由郑霖和梁红玉共同编写。全书由梁红玉负责统稿、校对。

本书的编写得到了桂林电子科技大学通信研究所郑继禹教授和林基明教授的建设性的指导和规划，同时得到了桂林电子科技大学信息与通信学院通信工程系全体同仁的大力支持与帮助，在此表示诚挚的感谢。

虽经多次统稿修改，但由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。对本书的任何指正和建议，可以发送到电子邮箱：lruby@guet. edu. cn，笔者深表感谢！

编 者

2012 年 12 月

# 目 录

# 第一章　随机变量基础

在电子通信系统中，被传输和处理的信号通常是具有不确定性的随机信号或者随机信号与确知信号的混合信号。随机信号的分析方法体现在随机性和信号性两方面。

随机性的理论基础是概率论及数理统计理论。本章首先对随机变量的要点做简单介绍，然后介绍随机变量的描述方法，并给出通信与信息处理领域中常见的一些随机变量的分布；重点讨论高斯随机变量及其一维分布的求解问题，供读者参考和选用。本章内容是研究随机信号随机性的基础。

## 1.1　概率基本术语

### 1.1.1　概率空间

**1. 随机现象**

在自然科学的研究中，人们对自然现象进行观察后得出：自然现象可分为确定现象和随机现象两类。确定现象是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，如上抛的石子必然会下落，异性电荷必然相互吸引等。随机现象是指只知道各种可能发生的结果，但无法准确判定哪一个结果将发生，如某城市每天出生的人口数量，某工厂每天产品的合格率、股市的行情等。

随机现象有两个主要特点：① 个别试验的不确定性；② 大量试验结果的统计规律性。概率论和数理统计是描述和研究随机现象统计规律性的数学学科，它们研究大量随机现象内在的统计规律、建立随机现象的物理模型并预测随机现象将要产生的结果。

在信息与通信系统中，随机现象更是大量存在，主要表现在信号、噪声、信道和通信业务这些物理对象中。例如信源中的数字信号、信道噪声干扰、接收检测、通信流量等。

**2. 随机试验**

为了建立随机现象的物理模型，引入随机试验的概念。随机试验必须满足下面 3 个特征：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行。

(2) 每次试验的结果并不唯一，并能事先确定所有的可能结果。

(3) 每次试验前结果不确定。

其中，随机试验中某个可能出现的结果称为样本点，记为 $\xi_i(i=1, 2, \cdots)$；随机试验所有可能出现的结果，即全体样本点构成的集合称为样本空间，记为 $\Omega$，$\xi_i\in\Omega(i=1, 2, \cdots)$；而事件是试验中“人们感兴趣的结果”构成的集合，是 $\Omega$ 的子集，常用大写字母 $A$、$B$、$C\cdots$ 等表示。事件和样本空间之间是包含关系，例如 $A\subset\Omega$。各种不同的事件的总体构成一个事件集合，称为事件域 $F$。事件域 $F$ 是集合的集合，事件和事件域之间的关系是属于的关系，如 $A\in F$。

**例 1.1**　随机抛一个骰子，观察出现的点数。

(1) 样本空间＝所有样本点，$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

(2) 事件 $A$ ＝“投掷结果为 3”＝$\{3\}\subset\Omega$。(说明：仅由一个样本点构成的事件叫做基本事件。)

(3) 事件 $B$ ＝“投掷结果为奇数”＝$\{1, 3, 5\}\subset\Omega$。

(4) 事件 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=\Omega$，包括所有样本点，为必然事件。

(5) 空集 $E=\varnothing$，不包含任何样本点，是不可能事件。

事件之间的关系及运算，与集合论中集合的关系与运算是相似的。

**3. 概率的公理化定义及性质**

概率论中有概率的统计定义和古典概率定义。下面重点介绍概率的公理化定义。

(1) 定义：设 $\Omega$ 是某随机试验的样本空间，$F$ 是定义在该样本空间 $\Omega$ 上的子集。若定义在事件域 $F$ 的一个集合函数 $P$ 满足下面三个条件：

① 非负性：对任何事件 $A$，均有 $P(A)\geqslant 0$ 成立，即

$$P(A)\geqslant 0, \forall A\in F \tag{1-1}$$

② 规范性：必然事件概率为 1，即

$$P(\Omega)=1$$

③ 完全可加性：若 $A_i$ $(i=1, 2, \cdots)$，且两两互不相容时，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1-2}$$

则称 $P$ 为概率。

显然，集合函数 $P$ 将每一个事件 $A$ 和区间$[0, 1]$内的数 $P(A)$ 对应起来，这个数 $P(A)$ 就是事件 $A$ 的概率，如图 1-1 所示。

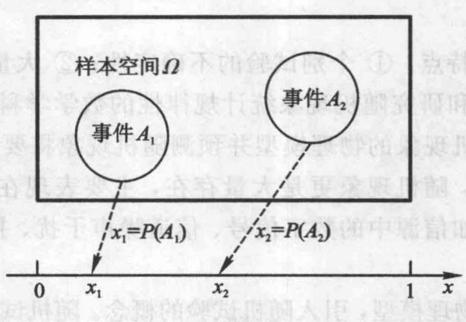


图 1-1　概率的定义

(2) 性质：

① 不可能事件的概率为 0，即

$$P(\varnothing)=0 \tag{1-3}$$

② 有限可加性：当存在 $A_i$ $(i=1, 2, \cdots)$，且两两互不相容(互斥)时，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1-4}$$

③ 逆事件的概率为

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1-5}$$

④ 单调性：

若 $B \subset A$，则：

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\text{，且 } P(B)\leqslant P(A) \tag{1-6}$$

⑤ 加法公式：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

次可加性：

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

一般地有，

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i\leqslant j=n}^{\infty}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k=n}^{\infty}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1-7}$$

**4. 概率空间**

至此，我们引进了研究随机性试验的三个基本组成部分：样本空间 $\Omega$、事件域 $F$ 和概率 $P$。对随机试验 $E$ 而言，样本空间 $\Omega$ 给出了它的所有可能的试验结果，$F$ 给出了由这些可能结果组成的各种各样的事件，而 $P$ 则给出了每一个事件发生的概率。这三部分构成的整体 $(\Omega, F, P)$ 称为随机试验 $E$ 的概率空间。概率空间是随机试验建模的基础。图 1-2 是随机试验、样本空间和概率空间的关系示意图。

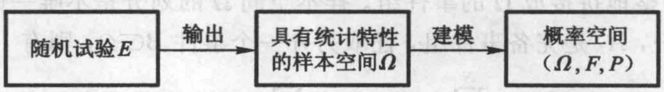


图 1-2　随机试验、样本空间和概率空间的关系

## 1.1.2　条件概率

条件概率是一个重要且实用的概念。因为在实际系统或工程问题中，除了要求单个事件发生的概率，有时候还要考虑该事件发生后对其他事件的影响。例如，在通信系统中，我们在接收端收到某个信号的同时要对发射端发出的信号做推测，或者是发某个符号时，要考虑接收端收到的是否是该符号。本节在介绍条件概率和事件独立的基础上，给出全概率公式和 Bayes 公式。

**1. 条件概率的定义**

设 $B$ 为一个概率不为零的事件，已知某次试验的样本点属于 $B$，考虑该样本点又同时属于另一事件 $A$ 的概率。即在事件 $B$ 发生的条件下，事件 $A$ 发生的概率，这个概率称为条件概率，记为 $P(A|B)$，定义为

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)>0 \tag{1-8}$$

当 $B$ 成为条件时，实际上相当于 $B$ 成为必然事件，即 $B$ 成为当前事件的全空间，因此需将概率 $P(AB)$ 放大 $1/P(B)$ 倍。

对于事件 $B\in F$，$P(B)>0$，条件概率有以下性质：

(1) 对于任意 $A\in F$，有 $0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$。

(2) $P(\Omega|B)=1$。

(3) 对任意可列个 $A_n \in F(n=1, 2, \cdots)$，如 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，则

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | B)$$

**2. 事件的独立**

当事件 $A$ 的发生不依赖于条件 $B$ 时，有 $P(A|B)=P(A)$，称事件 $A$ 与 $B$ 独立。由式(1-8)等价地有

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1-9}$$

因此称满足式(1-9)的事件 $A$ 和 $B$ 互相独立。注意“独立”与“互斥”的区别，互斥为 $P(AB)=0$。

推广到多个事件，设 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 为同一样本空间上的一组事件，若对任意的 $M(2 \leqslant M \leqslant N)$ 及任意 $M$ 个互不相同的整数 $i_1, i_2, \cdots, i_M$，满足

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_M}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_M}) \tag{1-10}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 互相独立。$N$ 个事件互相独立要求它们任意 $2 \leqslant M \leqslant N$ 之间都互相独立。

**3. 全概率公式**

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 两两互斥(互不相容)，即 $\forall i \neq j$，且其并集等于样本空间，即 $\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个分割或完备事件组。完备事件组是既彼此互斥，又可以完整地拼接成 $\Omega$ 的事件组。样本空间 $\Omega$ 的划分是不唯一的。

若 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ 是完备事件组，任取另外一个事件 $B \subset \Omega$，则有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i) \tag{1-11}$$

该公式称为全概率公式，可以看出，全概率公式等价于 $P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(BA_i)$，其中，$BA_i$ 是图 1-3 中 $B$ 的局部子块，它们彼此互斥。

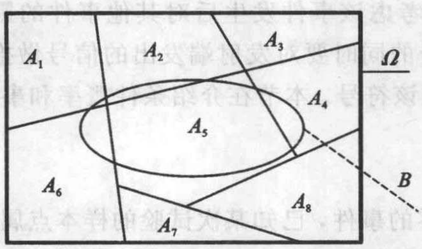


图 1-3　全概率公式

样本空间的分割实际上是对样本空间样本点的分组，对于不同组别的样本点，事件 $B$ 具有不同的条件概率。全概率公式揭示了在这种情况下事件 $B$ 的概率求法。

**例 1.2**　某通信网可以支持 3 种业务，第 1 种业务的概率是 0.3，第 2 种业务的概率是 0.2，第 3 种业务的概率是 0.5。对于第 1 种业务，在传输过程中发生阻塞的概率是 0.1，对于第 2、3 种业务，传输过程中发生阻塞的概率分别为 0.15 和 0.2。试求该通信网发生阻塞的总概率。

**解**　这道题目可以用全概率公式求解。

用 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 分别表示“一个业务是第 1、2、3 种业务 3 个事件，用 $B$ 表示“该通信网发生阻塞”这个事件，由全概率公式有

$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$$
$$=0.1\times 0.3+0.15\times 0.2+0.2\times 0.5=0.16$$

**4. 贝叶斯(Bayes) 公式**

设事件 $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个完备事件组，对任意事件 $B\in F$，$P(B)>0$，由条件概率公式(1-8) 和全概率公式(1-11) 得，在事件 $B$ 发生的条件下，事件 $A_i$ 的概率为

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(BA_i)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N}P(BA_j)}=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{N}P(B|A_j)P(A_j)}$$
$$i,j=1,2,\cdots,N \tag{1-12}$$

式(1-12) 被称为 Bayes 公式。

对上面公式做简单说明如下：

(1) $P(A_i)(i=1,2,\cdots,N)$ 为事件发生的概率，称为先验概率，它在试验前就已给定。

(2) $P(A_i|B)$ 是观测到 $B$ 出现的条件下，事件 $A_i$ 发生的概率，为后验概率。

(3) $P(B|A_j)$ 是事件 $A_j$ 试验后转移成事件 $B$ 的概率，为转移概率。

贝叶斯公式正是基于结果 $B$ 推测某种起因 $A_i$ 的可能性的方法。可应用于研究因果推测、信息传输与信号检测等问题。

**例 1.3**　二进制对称信道模型如图 1-4 所示，设信道输入为 0 或 1，信源发出 0 的概率为 $q$，信道传输差错概率为 $p$，试求：

(1) 信道输出为 0 和 1 的概率；

(2) 输出为 1 的条件下输入是 1 的概率以及输出是 0 的条件下输入为 1 的概率。

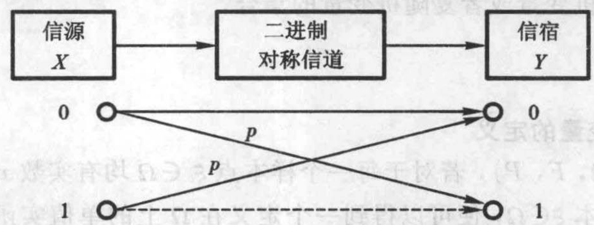


图 1-4　二进制对称信道传输模型

**解**　先考虑原因，样本空间 $\Omega_X=\{0,1\}$，由已知得先验概率 $P(X=0)=q$，可以得出

$$P(\Omega_X)=1\Rightarrow P(X=1)=1-q$$

则当信源发出为 1 时，接收到为 0 的概率为

$$P(Y=0|X=1)=p$$

对称信道同理，当信源发出为 0 时接收到为 1 的概率为

$$P(Y=1|X=0)=p$$

结果样本空间为 $\Omega_Y=\{0,1\}$，因此有

$$P(Y=1|X=1)=P(Y=0|X=0)=1-p$$

(1) 由全概率公式得到

$$P(Y=1)=P(Y=1|X=0)P(X=0)+P(Y=1|X=1)P(X=1)$$
$$=pq+(1-p)(1-q)=1-(p+q)+2pq$$

同理有

$$P(Y=0)=P(Y=0|X=0)P(X=0)+P(Y=0|X=1)P(X=1)$$
$$=(1-p)q+p(1-q)=p+q-2pq$$

(2) 题中所求即为 $P(X=1|Y=1)$ 和 $P(X=1|Y=0)$，由 Bayes 公式得到

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P(Y=1|X=1)P(X=1)}{P(Y=1|X=1)P(X=1)+P(Y=1|X=0)P(X=0)}$$
$$=\frac{(1-p)(1-q)}{(1-p)(1-q)+pq}=\frac{1-(p+q)+pq}{1-(p+q)+2pq}$$

同理有

$$P(X=1|Y=0)=\frac{P(Y=0|X=1)P(X=1)}{P(Y=0|X=1)P(X=1)+P(Y=0|X=0)P(X=0)}$$
$$=\frac{p(1-q)}{p(1-q)+(1-p)q}=\frac{p-pq}{p+q-2pq}$$

# 1.2 随机变量及其分布

前面已经建立了随机现象的数学模型——概率空间($\Omega$, $F$, $P$)，随机试验的样本空间为一般意义下的集合，不方便讨论与分析。本节引入概率空间($\Omega$, $F$, $P$)上随机变量的概念，随机变量概念的引入使概率论的研究对象由具体事件抽象为随机变量。将样本空间映射到一维实数域 **R** 或其子集，转到实数域进行讨论。样本点映射为实数值，事件映射为实数或复数集合(实随机变量或复随机变量)，变量的定义域就是样本空间，值域就是一维实随机变量、多维实随机变量或者复随机变量的集合。

## 1.2.1 随机变量

### 1. 一维实随机变量的定义

设概率空间为$\{\Omega, F, P\}$，若对于每一个样本点 $\xi_k\in\Omega$ 均有实数 $x_k=X(\xi_k)$，$x_k\in\mathbf{R}$ 与之对应，对于所有样本 $\xi\in\Omega$，便可以得到一个定义在 $\Omega$ 上的单值实函数 $X(\xi)$；若每个实数 $x$ 的数集$\{X(\xi)\leqslant x\}$仍然是事件域 $F$ 中的事件，则称这个单值实函数 $X(\xi)$ 为一维实随机变量，简写为 $X$。一维实随机变量的定义如图 1-5 所示。

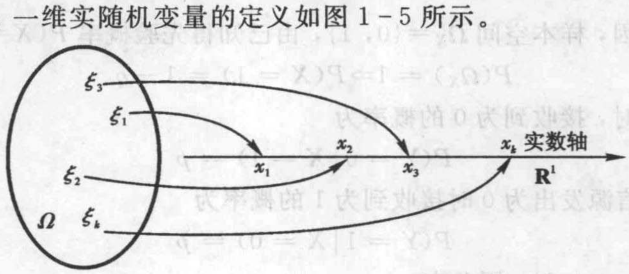


图 1-5　一维实随机变量的定义

下面对一维实随机变量做简要说明。

(1) 样本 $\xi_k$ 是样本空间上的点，所对应的实数 $x_k$ 是某个实数集 $\mathbf{R}^1$ 上的点。因此，一维实随机变量 $X(\xi)$ 就是从原样本空间 $\Omega$ 到新空间 $\mathbf{R}^1$ 的一种映射，如图 1－5 所示。

(2) 随机变量 $X(\xi)$ 总是对应一定的概率空间($\Omega$, $F$, $P$)。为了书写简便，没有特殊要求时不必每次写出随机变量 $X(\xi)$ 的概率空间($\Omega$, $F$, $P$)。

(3) 随机变量 $X(\xi)$ 是关于 $\xi$ 的单值实函数，简写为 $X$。本书规定用大写英文字母 $X$, $Y$, $Z$, …表示随机变量，用相应的小写字母 $x$, $y$, $z$, …表示随机变量的可能取值，用 $\mathbf{R}^1$ 表示一维实随机变量的值域。

简单地说，随机变量实际上就是样本空间为一维实数域 $\mathbf{R}^1$ 其子集的概率空间。

**2. 二维及多维实随机变量**

多维随机变量亦称随机向量，随机向量在矩阵分析和信号处理中非常重要，例如雷达回波信号的幅度和相位需要两个不同的随机变量来描述。仿照一维实随机变量的定义，二维随机变量用($X$, $Y$)来表示，它可以认为是从原样本空间 $\Omega$ 到新空间 $\mathbf{R}^2$ ($xoy$ 平面)的一种映射，即样本空间 $\Omega$ 中任意 $\xi$ 映射为二维空间平面上的一个随机点，如图 1－6 所示。同理，$n$ 维随机变量则用($X_1$, $X_2$, …, $X_n$)表示，它可推广到 $n$ 维空间上的一个随机点。依次类推，样本空间 $\Omega$ 中任意 $\xi$ 映射到复数空间即是复随机变量。

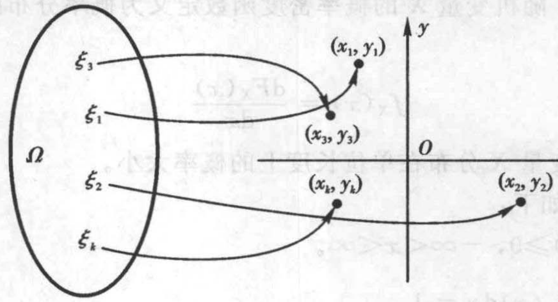


图 1－6　二维实随机变量的定义

**3. 随机变量的分类**

按照随机变量的可能取值，其可以分为两种基本类型，即离散随机变量和连续随机变量。离散随机变量仅可取得有限个或者可数多个数值，例如移动通信系统用户在某一段时间内对基站的呼叫次数就属于离散型的随机变量；而连续型的随机变量其取值连续且占据某一区间，例如通信系统中接收机的噪声电压就是连续随机变量。本书以连续型随机变量为研究对象进行讨论和分析。

## 1.2.2　随机变量统计描述

上节对随机变量与一般变量进行了概念的推广。通常的变量只要考虑其可能的取值，而不考虑其取值的可能性大小；而随机变量由于是随机现象的输出，所以不仅要考虑其可能的取值，更重要的是还要考虑各个取值的可能性大小，即概率大小。通过大量实验发现，随机变量的取值具有一定的统计规律。因此，通常采用概率分布函数或者分布律和概率密度函数对随机变量的统计规律进行描述。

**1. 一维连续实随机变量 $X$ 的概率分布函数与概率密度函数**

(1) 概率分布函数。对随机变量 $X$，定义任意实数 $x\in\mathbf{R}^1$ 的函数

$$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} \tag{1-13}$$

为 $X$ 的概率分布函数或累积分布函数，记为 $F_X(x)$，其中，实数 $x$ 为随机变量 $X$ 的可能的取值。

$F_X(x)$ 表示随机变量 $X$ 的取值落在 $(-\infty, x]$ 区间上的概率，简单而言，即事件 $\{X \leqslant x\}$ 的概率。例如在电子系统中，测量某元器件两端电压不小于 3 伏的试验结果就是求其概率分布。

概率分布函数性质如下：

① $F_X(x)$ 为单调非降函数，即当 $x_2 > x_1$ 时，$F_X(x_2) > F_X(x_1)$。

② $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = F_X(+\infty) = 1$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$。

③ 分布函数右连续，即 $F_X(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$。

因此，若已知随机变量 $X$ 的分布函数，就可以知道 $X$ 落在任一区间上的概率，从这个意义上说，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性。

④ 随机变量在 $(x_1, x_2]$ 区间内的概率为

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) \tag{1-14}$$

(2) 概率密度函数。随机变量 $X$ 的概率密度函数定义为概率分布函数 $F_X(x)$ 对可能取值状态 $x$ 的导数，即

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1-15}$$

$f_X(x)$ 的含义即为随机变量 $X$ 分布在单位长度上的概率大小。

概率密度函数性质如下：

① 非负性：　$f_X(x) \geqslant 0$，$-\infty < x < \infty$。

② 归一性：　$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$ 。

③ $P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x$ 。

一维概率分布函数和一维概率密度函数可以充分地说明连续随机变量取值落在某一区间或者单位区间的概率。值得注意的是，连续型随机变量在某点取值的概率为 0。图 1-7 表示了连续型随机变量的概率密度和分布函数。

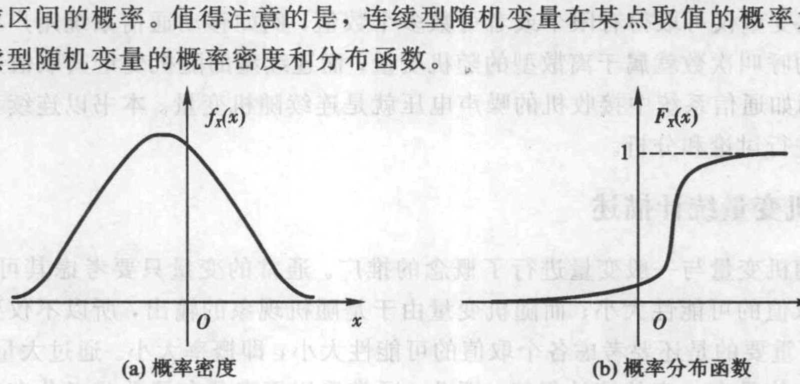


图 1-7　连续型随机变量的概率密度和概率分布函数

**例 1.4**　在通信系统中，一条消息的传输时间 $X$ 是一个随机变量，它服从指数概率分布，即 $P(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$，$(x > 0)$，其中 $\lambda$ 是一个正常数。试求 $X$ 的概率分布函数和概率密

度函数，并求出 $P(1/\lambda<X\leqslant 2/\lambda)$。

**解** $X$ 的概率分布函数为

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=1-P(X>x)$$

因此有

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

$X$ 的概率密度函数为

$$f_X(x)=F'_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\leqslant 0\end{cases}$$

根据概率分布函数定义有

$$P(1/\lambda<X\leqslant 2/\lambda)=F_X(2/\lambda)-F_X(1/\lambda)=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$$

**2. 二维及多维连续实随机变量的概率分布函数与概率密度函数**

根据以上讨论，我们不难将其推广到两个随机变量（二维分布）或更多随机变量（多维分布）的情况。$n$ 个随机变量构成 $n$ 维随机变量，记为$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。也可用列向量形式表示为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$。从概率空间的概念可以看出，$n$ 维随机变量的样本空间为 $n$ 维实数空间 $\mathbf{R}^n$（$n$ 维欧氏空间）。以后对多维随机变量研究中，为了简便，经常用一个随机向量来表示 $n$ 维随机变量。随机向量常用大写字母 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \cdots$等表示。对于二维或多维随机变量，采用联合概率特性来描述其统计规律。

1）二维随机变量的联合概率分布函数

仿照一维随机变量概率分布函数的定义，任意取 $x, y\in\mathbf{R}^1$，称

$$F_{XY}(x, y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y) \tag{1-16}$$

为$(X, Y)$的联合概率分布函数。它表示随机变量在 $X\leqslant x$，且 $Y\leqslant y$ 这样一个联合事件的概率。

联合分布函数 $F_{XY}(x, y)$具有以下性质：

① $F_{XY}(x, y)$分别对 $x$，$y$ 单调不减。

② $F_{XY}(x, y)$对每个变量均为右连续。

③ $0\leqslant F_{XY}(x, y)\leqslant 1$，且有 $F_{XY}(x, -\infty)=0$，$F_{XY}(-\infty, y)=0$ 和 $F_{XY}(+\infty, +\infty)=1$。

④ $P\{a<X\leqslant b;\ c<Y\leqslant d\}=F_{XY}(b, d)-F_{XY}(a, d)-F_{XY}(b, c)+F_{XY}(a, c)$，如图 1-8 所示。

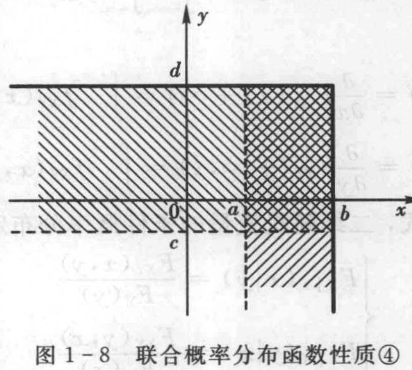


图 1-8 联合概率分布函数性质④