

21世纪高等学校计算机教育实用规划教材

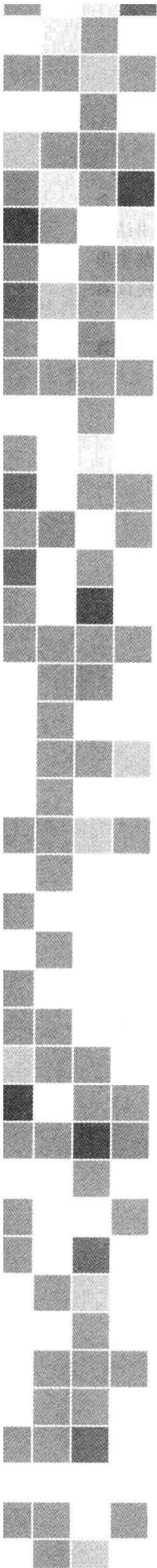
# 离散数学

孙道德 主编

王敏生 王秀友 副主编

清华大学出版社





21世纪高等学校计算机教育实

# 离散数学

孙道德 主编

王敏生 王秀友 副主编

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书共分为4篇:数理逻辑、集合论、代数系统、图论。数理逻辑包括命题逻辑和谓词逻辑;集合论介绍了集合、关系、函数等;代数系统介绍了群、环、域等;图论部分介绍了图的基本概念及特殊图。本书结合基本理论和基本方法详细介绍了这4部分在计算机中的实际应用。在编写过程中,以数理逻辑的基本思想为主线,将离散数学各个部分有机地结合起来,力求条理清楚、深入浅出,通过该课程的学习,可使读者掌握必备的离散数学知识,并提高其利用离散数学知识分析和解决实际问题的能力。

本书可作为一般本科院校计算机科学技术等相关专业的本科生和研究生的教学用书,也可作为计算机科学与技术以及研究人员的参考用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

离散数学/孙道德主编.--北京:清华大学出版社,2013

21世纪高等学校计算机教育实用规划教材

ISBN 978-7-302-29943-1

I. ①离… II. ①孙… III. ①离散数学 IV. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第203471号

责任编辑:魏江江 薛 阳

封面设计:常雪影

责任校对:李建庄

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:16.25

字 数:401千字

版 次:2013年7月第1版

印 次:2013年7月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:29.50元

# 出版说明

---

随着我国高等教育规模的扩大以及产业结构调整的进一步完善,社会对高层次应用型人才的需求将更加迫切。各地高校紧密结合地方经济建设发展需要,科学运用市场调节机制,合理调整和配置教育资源,在改革和改造传统学科专业的基础上,加强工程型和应用型学科专业建设,积极设置主要面向地方支柱产业、高新技术产业、服务业的工程型和应用型学科专业,积极为地方经济建设输送各类应用型人才。各高校加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的力度,从而实现传统学科专业向工程型和应用型学科专业的发展与转变。在发挥传统学科专业师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势的同时,不断更新教学内容、改革课程体系,使工程型和应用型学科专业教育与经济建设相适应。计算机课程教学在从传统学科向工程型和应用型学科转变中起着至关重要的作用,工程型和应用型学科专业中的计算机课程设置、内容体系和教学手段及方法等也具有不同于传统学科的鲜明特点。

为了配合高校工程型和应用型学科专业的建设和发展,急需出版一批内容新、体系新、方法新、手段新的高水平计算机课程教材。目前,工程型和应用型学科专业计算机课程教材的建设工作仍滞后于教学改革的实践,如现有的计算机教材中有不少内容陈旧(依然用传统专业计算机教材代替工程型和应用型学科专业教材),重理论、轻实践,不能满足新的教学计划、课程设置的需要;一些课程的教材可供选择的品种太少;一些基础课的教材虽然品种较多,但低水平重复严重;有些教材内容庞杂,书越编越厚;专业课教材、教学辅助教材及教学参考书短缺,等等,都不利于学生能力的提高和素质的培养。为此,在教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议下,清华大学出版社组织出版本系列教材,以满足工程型和应用型学科专业计算机课程教学的需要。本系列教材在规划过程中体现了如下一些基本原则和特点。

(1) 面向工程型与应用型学科专业,强调计算机在各专业中的应用。教材内容坚持基本理论适度,反映基本理论和原理的综合应用,强调实践和应用环节。

(2) 反映教学需要,促进教学发展。教材规划以新的工程型和应用型专业目录为依据。教材要适应多样化的教学需要,正确把握教学内容和课程体系的改革方向,在选择教材内容和编写体系时注意体现素质教育、创新能力与实践能力的培养,为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。

(3) 实施精品战略,突出重点,保证质量。规划教材建设仍然把重点放在公共基础课和专业基础课的教材建设上;特别注意选择并安排一部分原来基础比较好的优秀教材或讲义修订再版,逐步形成精品教材;提倡并鼓励编写体现工程型和应用型专业教学内容和课程

体系改革成果的教材。

(4) 主张一纲多本,合理配套。基础课和专业基础课教材要配套,同一门课程可以有多本具有不同内容特点的教材。处理好教材统一性与多样化,基本教材与辅助教材,教学参考书,文字教材与软件教材的关系,实现教材系列资源配套。

(5) 依靠专家,择优选用。在制订教材规划时要依靠各课程专家在调查研究本课程教材建设现状的基础上提出规划选题。在落实主编人选时,要引入竞争机制,通过申报、评审确定主编。书稿完成后要认真实行审稿程序,确保出书质量。

繁荣教材出版事业,提高教材质量的关键是教师。建立一支高水平的以老带新的教材编写队伍才能保证教材的编写质量和建设力度,希望有志于教材建设的教师能够加入到我们的编写队伍中来。

21 世纪高等学校计算机教育实用规划教材编委会

联系人: 魏江江 weijj@tup.tsinghua.edu.cn

# 前言

随着计算机学科与技术的发展以及现在对计算机人才的需求的变化,对学生掌握的知识也将发生巨大的变化,不仅要求学生扩大理论范围的了解,同时要求学生增加实践知识的训练。离散数学是理论与实践结合紧密的科学,它是计算机科学与技术以及其他应用学科的理论基础。离散数学课程所传授的思想和方法,广泛地体现在计算机科学技术及相关专业的诸领域,通过对离散数学的学习,能够锻炼抽象思维和逻辑推理的能力,对科学计算、信息处理、软件工程、硬件设计、科学研究、日常事务和计算机应用都打下坚实基础,特别对从事计算机科学与理论研究的高层次计算机人员来说,更是一门必不可少的基础理论工具。

本书依据《中国计算机科学与技术学科教程 2002》中制定的关于离散数学的知识结构和体系为依据撰写,在内容选择上,力求做到理工科学生通俗易懂,理论联系实际,增强学生逻辑思维能力和学习方法的训练,阐述了离散数学证明问题的方法。在讲解原理的基础之上,结合现代先进的计算机科学技术,从内容和形式上发展本门学科,主要体现在:①加强了现代计算机科学、数字技术、图论与离散数学的结合;②更新和增加了离散数学应用实例。主要内容包含数理逻辑、集合与关系、函数、代数系统、图和树。内容设计增加帮助理解理论的习题分析,对于加强素质教育,培养抽象思维和逻辑表达能力,提高发现问题、分析问题、解决问题的能力起着引导和帮助作用。

教材编写力求体系严谨、选材适当、针对性强、有利教学,同时在素材组织上更加注重在计算机科学技术中的应用。注重语言的通俗性和符号的统一性、规范性、简洁性,注重逻辑思维能力的训练。将数理逻辑教学内容放在第一部分,在集合与关系、代数系统、图与树的教学内容中始终贯穿数理逻辑的推理思想,有效锻炼学生的严谨逻辑思维能力。

本书写作大纲和内容特色由孙道德教授提出,数理逻辑和集合论部分的写作由王秀友副教授执笔,代数结构和图论部分的写作由王敏生副教授执笔,最后由孙道德教授统稿,同时邀请了教学第一线的教师参与了工作,提出了很多的宝贵意见,并汲取了他们丰富的教学成果,在此向他们表示感谢。但是由于水平有限,问题甚至错误在所难免,谨请读者批评指正。

编著者

2013年3月

# 目 录

## 第 1 篇 数理逻辑

|                    |    |
|--------------------|----|
| 第 1 章 命题逻辑         | 3  |
| 1.1 命题及逻辑联结词       | 3  |
| 1.2 命题公式与真值函数      | 9  |
| 1.3 命题公式的等价与蕴涵     | 13 |
| 1.4 命题逻辑的推理理论      | 18 |
| 1.5 对偶与范式          | 25 |
| 1.6 其他逻辑联结词        | 33 |
| 1.7 逻辑联结词的功能完备集    | 36 |
| 命题逻辑小结             | 38 |
| 第 2 章 一阶谓词逻辑       | 39 |
| 2.1 基本概念           | 39 |
| 2.2 谓词合式公式与客体变元的约束 | 44 |
| 2.3 谓词公式的等价与蕴涵     | 48 |
| 2.4 谓词逻辑的推理理论      | 53 |
| 2.5 前束范式           | 58 |
| 一阶谓词逻辑小结           | 60 |

## 第 2 篇 集合与关系

|                |     |
|----------------|-----|
| 第 3 章 集合及其运算   | 63  |
| 3.1 集合的概念及其表示  | 63  |
| 3.2 集合的基本运算    | 66  |
| 3.3 集合中元素的计数   | 72  |
| 集合及其运算小结       | 78  |
| 第 4 章 二元关系     | 79  |
| 4.1 集合的笛卡儿积    | 79  |
| 4.2 二元关系       | 83  |
| 4.3 等价关系与集合的划分 | 102 |

|                      |            |
|----------------------|------------|
| 4.4 相容关系与集合的覆盖 ..... | 106        |
| 4.5 偏序关系 .....       | 108        |
| 二元关系小结 .....         | 114        |
| <b>第5章 函数</b> .....  | <b>115</b> |
| 5.1 函数的概念 .....      | 115        |
| 5.2 特殊的函数及特征函数 ..... | 117        |
| 5.3 逆函数与复合函数 .....   | 120        |
| 5.4 集合的势与无限集合 .....  | 123        |
| 函数小结 .....           | 126        |

### 第3篇 代数系统篇

|                         |            |
|-------------------------|------------|
| <b>第6章 代数结构</b> .....   | <b>129</b> |
| 6.1 代数系统的概念 .....       | 129        |
| 6.2 代数系统的运算及其性质 .....   | 131        |
| 6.3 半群与含么半群 .....       | 135        |
| 6.4 群与子群 .....          | 138        |
| 6.5 交换群与循环群 .....       | 143        |
| 6.6 陪集与拉格朗日定理 .....     | 147        |
| 6.7 同态与同构 .....         | 149        |
| 6.8 环与域 .....           | 155        |
| 代数结构小结 .....            | 159        |
| <b>第7章 格与布尔代数</b> ..... | <b>167</b> |
| 7.1 格的概念 .....          | 167        |
| 7.2 分配格 .....           | 174        |
| 7.3 有补格 .....           | 177        |
| 7.4 布尔代数与布尔表达式 .....    | 179        |
| 格与布尔代数小结 .....          | 190        |

### 第4篇 图论篇

|                     |            |
|---------------------|------------|
| <b>第8章 图论</b> ..... | <b>195</b> |
| 8.1 图的基本概念 .....    | 195        |
| 8.2 图的通路和连通性 .....  | 201        |
| 8.3 图的矩阵表示 .....    | 206        |
| 8.4 图的着色 .....      | 212        |
| 图论小结 .....          | 214        |

|                |     |
|----------------|-----|
| 第 9 章 特殊图形与算法  | 218 |
| 9.1 欧拉图及其应用    | 218 |
| 9.2 哈密顿图及其应用   | 222 |
| 9.3 平面图与对偶图    | 224 |
| 9.4 树与生成树      | 228 |
| 9.5 根树及其应用     | 231 |
| 9.6 图的匹配与匈牙利算法 | 236 |
| 特殊图形与算法小结      | 241 |
| 参考文献           | 247 |

# 第1篇

## 数理逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学。根据研究的对象和方法的不同,逻辑学分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。

数理逻辑是用数学方法研究推理规律的科学。所谓数学方法,就是引进一套符号系统来研究思维的形式结构和规律。因此,数理逻辑又称符号逻辑。它起源于公元 17 世纪,19 世纪英国的德·摩根和乔治·布尔发展了逻辑代数,20 世纪 30 年代数理逻辑进入了成熟时期,基本内容(命题逻辑和谓词逻辑)有了明确的理论基础,成为数学的一个重要分支,同时也是电子元件设计和性质分析的工具。冯·诺依曼,图灵,克林等人研究了逻辑与计算的关系。基于理论研究和实践,随着 1946 年第一台通用电子数字计算机的诞生和近代科学的发展,计算技术中提出了大量的逻辑问题,逻辑程序设计语言的研发更促进了数理逻辑的发展。除古典二值(真,假)逻辑外,科学家还研究了多值逻辑、模态逻辑、概率逻辑、模糊逻辑、非单调逻辑等。不仅有演绎逻辑,也还有归纳逻辑。计算机科学中还专门研究计算逻辑、程序逻辑、时序逻辑等。现代数理逻辑分为 5 个方面:逻辑演算、证明论、递归论(与形式语言语法有关)、模型论、公理化集合论(与形式语言的语义有关)。

数理逻辑与计算机科学关系密切,在计算机科学的许多领域,如逻辑设计、人工智能、语言理论、程序正确性证明等方面,都有重要的应用。本篇介绍对计算机科学而言非常重要的数理逻辑基础知识——命题逻辑和谓词逻辑。



# 第1章

## 命题逻辑

学习要求：掌握命题、命题公式、重言式、等价式、蕴涵式等基本概念，能利用逻辑联结词或真值表、等价式与蕴涵式进行命题演算和推理。

表述客观世界的各种现象、人们的思想、各门学科的规则、理论等，除使用自然语言（这常常是有歧义性的）外，还要使用一些特定的术语、符号、规律等“对象语言”，这些都是所研究学科的一种特殊的形式化的语言，研究思维结构与规律的逻辑学也有其对象语言。本章就是讨论逻辑学中的对象语言——命题及其演算，它相当于自然语言中的语句。

命题逻辑也称命题演算或语句逻辑。它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的可推导关系。研究什么是命题、命题的表示、如何由一组前提推导一些结论等。

### 1.1 命题及逻辑联结词

#### 1. 命题的基本概念

首先从下面的例子加以分析。

- (1) 阜阳师范学院是一所普通师范类本科院校。
- (2) 2008 年，北京举办了奥运会。
- (3) 苏格拉底是要死的。
- (4) 中国人民是勤劳和勇敢的。
- (5) 鸵鸟是鸟。
- (6) 1 是质(素)数。
- (7) 下个月晴天多于阴天。
- (8) 公元 2050 年会出现生物计算机。
- (9) 太阳系外的星球上有人。
- (10) 他喜欢读书也喜欢运动。
- (11) 他在机房里或者在图书馆里。
- (12) 电灯不亮是灯泡或线路有毛病，或者是停电所致。
- (13) 如果  $a$  和  $b$  都是正数，则  $ab$  也是正数。
- (14)  $xy > 0$  当且仅当  $x$  和  $y$  都大于零。
- (15)  $101 + 1 = 110$ 。
- (16) 天气多好啊！

(17) 现在是什么时间?

(18) 全体起立!

(19)  $x > 2$ 。

(20) 我正在说谎。

在上述例子中(1)~(4),(12)和(13)是可以判断为对(真,成立)的陈述句,(5),(6),(14)是能够判断为不对(假,不成立)的陈述句,(7)~(9)在人类历史发展的长河中能够判断它是真或是假的陈述句,(10)和(11)根据“他”当时的情况能够判断出是真或是假的陈述句,(15)在二进制计算中为真,在十进制计算中为假,也还是可以判断为真或为假的陈述句,(16)是感叹句,(17)是疑问句,(18)是命令句,(19)中的  $x$  是一个未知数(变量),无法判断是真还是假,(20)是无法判断真假的悖论。从以上的分析中可以看出,表达思想的语句有不同的类别,数理逻辑中研究的是出现得较多而又比较规范的语句——可以判断出真或假的陈述句。

**定义 1.1** 凡是能判断是真或是假的陈述句称为命题。

如前面的例中(1)~(15)都是命题,(16)~(20)都不是命题。

命题的值为真或假。今后约定用 1 表示真,0 表示假,除 T 和 F 以外的大写英文字母或它们后面跟上数字如 A, A1, B5, Pi 等或[数字](如[123],[28]……)表示命题,称为命题标识符。

如 P: M8085 芯片有 40 条引线,或[12]: M8085 芯片有 40 条引线。P 或[12]称为命题“M8085 芯片有 40 条引线”的标识符。当命题标识符代表一个确定的命题时(如 P 或[12], A: 人总是要死的),称为命题常元,当命题标识符代表非确指的命题时,称这样的命题标识符为命题变元。

**注意:** 命题变元不是命题,只有对命题变元用一个确定的命题代入后,才能确定其值是 1 还是 0。

**定义 1.2** 用一个确定的命题代入一个命题标识符(如 P),称为对 P 进行指派(赋值或解释)。

再看前面例中的(1)~(6),这些命题不能再分解为更简单的能判断其值为 1 或 0 的陈述句了,这类命题称为原子命题。在(7)中,如果表示下个月晴天多于阴天为原子命题 P,则下个月晴天少于阴天是 P 的否定;(10)可分解为原子命题 P: 他喜欢读书,Q: 他喜欢运动,用联结词“也”联结起来;(11)可分解为原子命题 P: 他在机房里,Q: 他在图书馆里,用联结词“或者”联结起来;(13)可分解为原子命题 P:  $a$  是正数,Q:  $b$  是正数,R:  $ab$  是正数,用联结词“和”与“如果…,则…”联结起来;(14)可分解为原子命题 P:  $xy > 0$ ,Q:  $x > 0$ ,R:  $y > 0$ ,用联结词“当且仅当”与“都”联结起来,这类由联结词、标点符号和原子命题构成的命题称为复合命题。

## 2. 逻辑联结词

在日常生活、工作和学习中,自然语言里常常使用下面的一些联结词,例如:非、不、没有、无、并非、并不等来表示否定;并且,同时、以及、而(且)、不但……而且……、一边……一边……、虽然……但是……、既……又……、尽管……仍然、和、也、同、与等来表示同时;虽然……也、可能……可能、或许……或许、等和“或(者)”的意义一样;若……则……、当……则……与“如果……那么”的意义相同;充分必要等同“一样”,相同与“当且仅当”的意义一样。即在自然语言中,这些逻辑联结词的作用一般是同义的。在数理逻辑中将这同义的联结词

也统一用符号表示,以便书写、推演和讨论。现定义常用联结词如下。

**定义 1.3** 给定一个命题  $P$ ,可以由  $P$  得到一个新命题“ $\neg P$ ”,读成“非  $P$ ”或“ $P$  的否定”。 $\neg P$  的取值依赖于  $P$  的取值,即定义运算表如表 1.1 所示。

表 1.1

| 命 题 | $P$ | $\neg P$ |
|-----|-----|----------|
| 真值  | 1   | 0        |
|     | 0   | 1        |

例如  $P$ : 阜阳是一个大城市

$\neg P$ : 阜阳是一个不大城市或阜阳不是一个大城市

**注意:**

- (1) 不同的陈述句可能确定同一个命题;
- (2) 否定是一个一元运算。

**定义 1.4** 两个命题  $P$  和  $Q$  产生的一个新命题记为  $P \wedge Q$ ,读成“ $P$  与  $Q$ ”或“ $P$  和  $Q$  的合取”。合取的运算表如表 1.2 所示。

表 1.2

| 命 题 | $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 真值  | 1   | 1   | 1            |
|     | 1   | 0   | 0            |
|     | 0   | 1   | 0            |
|     | 0   | 0   | 0            |

如  $P$ : 他喜欢读书, $Q$ : 他喜欢运动, $P$  和  $Q$  的合取为  $P \wedge Q$ : 他喜欢读书也喜欢运动。

又如  $A$ : 猫吃鱼, $B$ :  $2+2=0$ ,则  $A \wedge B$ : 猫吃鱼而且  $2+2=0$ 。

**注意:**

(1) 在日常语言中使用“与”时,通常是两个命题之间具有某种联系。但在数理逻辑中,并不要求两个命题之间有任何联系。因为数理逻辑所研究的是推理的形式关系,并不涉及推理中的前提和结论的具体内容。

(2) 合取是一个二元运算。

(3) 不要见到“与”、“和”就使用联结词  $\wedge$ ,例如“张三与李四是同学”。这里的“与”和数理逻辑中所使用的“与”是不同的,整个句子是简单陈述句。

**定义 1.5** 两个命题  $P$  或  $Q$  产生一个新命题,记为  $P \vee Q$ ,读成“ $P$  析取  $Q$ ”,析取的运算表如表 1.3 所示。

表 1.3

| 命 题 | $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|-----|-----|-----|------------|
| 真值  | 1   | 1   | 1          |
|     | 1   | 0   | 1          |
|     | 0   | 1   | 1          |
|     | 0   | 0   | 0          |

$P$ : 他在机房里,  $Q$ : 他在图书馆里,  $P \vee Q$ : 他在机房或图书馆里。

又如  $P_1$ : 他是游泳冠军,  $P_2$ : 他百米是赛冠军,  $P_1 \vee P_2$ : 他是游泳冠军或百米赛冠军。

$A$ : 猫吃鱼,  $B$ :  $2+2=0$ ,  $A \vee B$ : 猫吃鱼或者  $2+2=0$ 。

注意:

(1) 析取可细分为两种,一种是“不可兼或”,另一种是“可兼或”,如  $P_1 \vee P_2$ 。有的将不可兼或记为  $\bar{\vee}$ ,可兼或记为  $\vee$ 。显然  $\vee$  包含  $\bar{\vee}$ ,故着重考虑  $\vee$  的情形。

(2) 在自然语言或形式逻辑中,用来析取联结的对象往往要求属于同一类事物,但是在数理逻辑中不做这种限制,例如  $A \vee B$ : 猫吃鱼或者  $2+2=0$  是允许存在的命题。

(3) 析取是一个二元运算。

**定义 1.6** 设  $P, Q$  是两个命题,“若  $P$  则  $Q$ ”是一个新命题,记为  $P \rightarrow Q$ ,读成  $P$  推出  $Q$  (或  $Q$  是  $P$  的必要条件,  $P$  是  $Q$  的充分条件),  $P$  称为条件联结词“ $\rightarrow$ ”的前件,  $Q$  为“ $\rightarrow$ ”的后件。

如  $P$ : 河水泛滥,  $Q$ : 周围的庄稼被毁。  $P \rightarrow Q$ : 若河水泛滥,则周围的庄稼被毁。

$A$ :  $2 < 3$ ,  $B$ : 今天阳光明媚。  $A \rightarrow B$ : 若  $2 < 3$ ,则今天阳光明媚。

条件联结词的运算表如表 1.4 所示。

表 1.4

| 命 题 | $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ |
|-----|-----|-----|-------------------|
| 真值  | 1   | 1   | 1                 |
|     | 1   | 0   | 0                 |
|     | 0   | 1   | 1                 |
|     | 0   | 0   | 1                 |

注意:

(1) 条件联结词联结的前件与后件不限定于同一类事物。“如果  $P$ , 则  $Q$ ”有很多不同的表述方法: 若  $P$ , 就  $Q$ ; 只要  $P$ , 就  $Q$ ;  $P$  仅当  $Q$ ; 只有  $Q$  才  $P$ ; 除非  $Q$ , 才  $P$ ; 除非  $Q$ , 否则非  $P$ , ……。

(2) 从真值表定义可知,前件取假值时无论后件的取值是真还是假,条件联结词产生的新命题都取值为真,即采取的是“善意的推定”。例如:

一位父亲对儿子说:“如果星期天天气好,就一定带你去动物园。”问:在什么情况下父亲食言?

父亲的可能情况有如下 4 种:

- a) 星期天天气好,带儿子去了动物园;
- b) 星期天天气好,却没带儿子去动物园;
- c) 星期天天气不好,却带儿子去了动物园;
- d) 星期天天气不好,也没带儿子去动物园。

显然, a)、d) 两种情况父亲都没有食言; c) 这种情况和父亲原来的话没有相抵触的地方,当然也不算食言; 只有 b) 这种情况,答应的事却没有做,应该算是食言了。b) 对应着“前件真后件假”的情况,使得蕴涵式为假,而其他三种情况都使得蕴涵式为真。

(3) 条件联结词为一个二元运算。

**定义 1.7** 设  $P, Q$  是两个命题, “ $P$  当且仅当  $Q$ ”是一个新命题, 记为  $P \leftrightarrow Q$ ,  $\leftrightarrow$  称为**双条件**, 它的运算表如表 1.5 所示。

表 1.5

| 命 题 | $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|-----|-----------------------|
| 真值  | 1   | 1   | 1                     |
|     | 1   | 0   | 0                     |
|     | 0   | 1   | 0                     |
|     | 0   | 0   | 1                     |

双条件是数学上考虑得最多, 也是大家比较熟悉的, 可以举出许多例子。如, 我没有收到信当且仅当没有人给我写信, 它的值为 1。约定在整数范围内讨论,  $P: 2+2=0, Q: \text{IBM-PC 是一种微型计算机}, P \leftrightarrow Q: 2+2=0$  当且仅当 IBM-PC 是一种微型计算机, 此命题取值为 0。

**注意:**

(1) 双条件联结词联系的命题不限定属于同一类事物。

(2) 双条件是一个二元运算。

这 5 种逻辑联结词也可以称为逻辑运算, 与一般数的运算一样, 可以规定运算的优先级, 规定的优先级顺序依次为  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 。如果出现的逻辑联结词相同, 且又没有括号时, 则按从左到右的顺序运算。如果遇到有括号时就先进行括号中的运算。

考察“电灯不亮是灯泡或线路有毛病, 或者是停电所致”。令  $P$ : 电灯亮,  $Q$ : 灯泡有毛病,  $R$ : 线路有毛病,  $S$ : 停电。则可将该语句符号化为  $Q \vee R \vee S \rightarrow \neg P$ 。

### 3. 命题的符号化

把一个用文字叙述的命题写成由命题标识符、联结词和圆括号表示的命题公式, 称为符号化。命题的符号化在数理逻辑中尤为重要, 是进行推理的基础。

符号化的步骤:

- (1) 找出所有的原子命题。
- (2) 确定句中连接词是否能对应于并且对应于哪一个命题联结词。
- (3) 正确表示原子命题和选择命题联结词; 要按逻辑关系翻译而不能凭字面翻译。
- (4) 用正确的语法把原命题表示成由原子命题、联结词和圆括号组成的命题公式。

例如: 将下列命题符号化。

- (1) 豆沙包是由面粉和红小豆做成的。
- (2) 苹果树和梨树都是落叶乔木。
- (3) 王小红或李大明是物理组成员。
- (4) 王小红或李大明中的一人是物理组成员。
- (5) 由于交通阻塞, 他迟到了。
- (6) 如果交通不阻塞, 他就不会迟到。
- (7) 他没迟到, 所以交通没阻塞。
- (8) 除非交通阻塞, 否则他不会迟到。

(9) 他迟到当且仅当交通阻塞。

提示:

(1) 分清复合命题与简单命题。

(2) 分清“相容或”与“排斥或”。

(3) 分清必要与充分条件及充分必要条件。

答案: (1) 是简单命题; (2) 是合取式; (3) 是析取式(相容或); (4) 是析取式(排斥或);

设  $P$ : 交通阻塞,  $Q$ : 他迟到

(5)  $P \rightarrow Q$ ; (6)  $\neg P \rightarrow \neg Q$  或  $Q \rightarrow P$ ; (7)  $\neg Q \rightarrow \neg P$  或  $P \rightarrow Q$ ; (8)  $Q \rightarrow P$  或  $\neg P \rightarrow \neg Q$ ;

(9)  $P \leftrightarrow Q$  或  $\neg P \leftrightarrow \neg Q$ 。

可见(5)与(7), (6)与(8) 相同(等值)。

## 1-1 习 题

1. 判断下列语句是否是命题。

(1)  $a+b$ 。

(2)  $x>0$ 。

(3) 请进!

(4) 所有的人都是要死的,但有人不怕死。

(5) 我明天或后天去苏州。

(6) 我明天或后天去苏州的说法是谣传。

(7) 我明天或后天去北京或天津。

(8) 如果买不到飞机票,我哪儿也不去。

(9) 只要他出门,他必买书,不管他余款多不多。

(10) 除非你陪伴我或代我雇辆车,否则我不去。

(11) 只要充分考虑一切论证,就可得到可靠见解;必须充分考虑一切论证,才能得到可靠见解。

(12) 如果只有懂得希腊文才能了解柏拉图,那么我不了解柏拉图。

(13) 不管你和他去不去,我去。

(14) 侈而惰者贫,因力而俭者富。(韩非:《韩非子·显学》)

(15) 骐骥一跃,不能十步;驽马十驾,功在不舍;锲而舍之,朽木不折;锲而不舍,金石可镂(《荀子·劝学》)。

2. 将下列命题符号化。

(1) 我一边看书一边听音乐。

(2) 天下雨了,我不去上街。

(3) 实函数  $f(x)$  可微当且仅当  $f(x)$  连续。

(4) 除非你努力,否则你就会失败。

(5) 合肥到北京的列车是中午十二点半或下午五点五十分开。

(6) 优秀学生应做到思想身体学习都好。

3. 设命题  $A_1, A_2$  的真值为 1,  $A_3, A_4$  两命题的真值为 0, 求下列命题的真值。