高考新题型研究组 编

数学

高考新题型

立意 情境 设问

北京教育出版社

高考新题型·数学

（立意、情境、设问）

《高考新题型研究组》编

北京教育出版社

（京）新登字202号

高考新题型·数学

（立意、情境、设问）

GAOKAO XINTIXING SHUXUE

《高考新题型研究组》编

*

北京教育出版社出版

（北京北三环中路6号）

邮政编码：100011

北京出版社总发行

新华书店北京发行所经销

北京昌平马池口印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　8.875印张　186000字

1995年2月第1版　1995年2月第1次印刷

印数：1—8000

ISBN7-5303-0597-2

G·571　定价：5.90元

前　言

考试是一种间接测量，主考者精心设计试卷、试题，通过被试者的作答，来测量考生的知识和能力水平，因此，试题是知识和能力的载体，它体现着考试的目的和内容。随着教育事业的发展，我国的考试制度在不断吸取国外考试的先进经验的基础上，又结合本国的传统特点，有了较大的发展，创造了具有中国特色的标准化考试。对于考试题型的研究工作，也在不断地深入，命题的技巧一年比一年有所提高。人们在研究选择题、填空题、材料分析题、简答题、论述题以及作文题的特点、功能的基础上，更深层地研究每一道试题的立意、情境和设问。它们在考查知识的同时，突出了注重能力的考查。这些全新面貌试题的出现，对中学的教学工作都起到了重要的作用。然而，也正是由于这样，许多考生感到不能适应，甚至不能正常地发挥考试的最佳水平，为了提高备考同学的应试能力，掌握新题型的结构特点，培养解题能力，我们特聘了一些考试的命题研究人员、学科专家，编写了这套丛书。

本丛书不是一般的复习资料，它是在分析总结新高考以来，试题编制特点的基础上，结合国家教委考试中心制定的《考试说明》中能力要求，作新题型解释。选题时也涉及了一些有典型意义的传统题型。

本丛书因编写时间仓促，难免有许多不当之处，请读者谅解。

高考新题型研究组

1994年10月

目　　录

第一部分

新题型例举说明

高考的主要功能是为高校选拔有学习潜能的新生，同时对中学教学培养学科能力有良好的影响，对中学教学产生良好的导向作用。

会考后的新高考数学试题较好地贯彻了“稳定大局、贯彻《说明》、调整难度、积极探索”的指导思想，注意体现测试“三基”、数学思想方法和四种能力的命题原则，坚持“出活题，考基础，考能力”的方向、做到“稳中有变、变中求新”。既注意保持命题逐年的相对稳定、又力求在总结经验的基础上，继续改革和发展。

随着考试改革的深入发展，命题的技巧也在不断地提高，每年高考都出现了一些新的题型，它们在“立意”、“情境”和“设问”三方面都表现了全新的面貌，更有效地在考查知识的基础上，注重考查能力，不仅提高了试题的效度和区分度，而且对中学的教学工作起到了良好的导向作用。

为了使备考的同学对新题型有所了解，提高他们的适应能力和解题能力，同时为教师不断研究和改进教学提供关于新题型方面的资料，有必要将会考后的高考(1991—1994年)新题型从“立意”、“情境”、“设问”诸方面进行分析研究、归纳总结。

下面按照数学科《考试说明》要求的题型——选择题、填空题、解答题，从代数（含三角）、立体几何、解析几何

的学科角度来研究归纳。

一、代数

(一)选 择 题 型

【新题型例举】

例 1 92(16) 对于定义域是 R 的任何奇函数 $f(x)$，都有(   )。

(A) $f(x)-f(-x)>0(x\in R)$

(B) $f(x)-f(-x)\leqslant 0(x\in R)$

(C) $f(x)f(-x)\leqslant 0(x\in R)$

(D) $f(x)f(-x)>0(x\in R)$

【题型说明】

该题的立意，在于考查考生对奇函数概念的理解。但在考查时，不是给出一个具体的函数来判断它的奇偶性，而是从奇函数一般性定义出发，来判断所给出的四个选项中哪一个正确。

由于已知 $f(x)$ 为奇函数，定义域是 R，则对于任意 $x\in R$，都有 $f(-x)=-f(x)$。故

$$f(x)f(-x)=-[f(x)]^2\leqslant 0$$

该题的正确答案为(C)，难度为0.88，是比较容易的题目，该题的设问虽然比较灵活，但多数考生能理解奇函数的定义。解答较好。但也有少数考生不清楚奇函数的概念，从而出现各种错误。

例 2 94(15) 定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和，如

果 $f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，那么(　　)。

(A) $g(x)=x$，$h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$，

$$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$，$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

【题型说明】

该题的立意，是让考生根据给出的数学结论，运用已有的知识去进行判断。

该题的情境，是多数考生并不熟悉，“定义在$(-\infty,+\infty)$上的任意函数$f(x)$都可以表示成一个奇函数$g(x)$和一个偶函数$h(x)$之和”，其中$g(x)$和$h(x)$如何用$f(x)$进行表示，多数考生也不清楚，该题也没有要求考生去进行表示。

该题的设问，是给出函数$f(x)=\lg(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，再给出四个选项，让考生去判断哪个选项符合给出的结论。

该题着重考查奇函数和偶函数的概念，并能判断函数的奇偶性。

在给出的四个选项中，只有(B)中的$g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$不是奇函数，其余(A)、(C)、(D)中的$g(x)$都是奇函数；再分析$(A)$、$(C)$、$(D)$中的$h(x)$，(D)中的

$h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$不是偶函数，而$(A)$、(C)中的$h(x)$都是偶函数；于是只有在(A)和(C)中进行选择，但(A)不满足$f(x)=g(x)+h(x)$，因为$g(x)+h(x)=x+\lg(10^x+10^{-x}+2)=x+\lg(10^x+1)^2-x=2\lg(10^x+1)\neq f(x)=\lg(10^x+1)$。所以只有(C)正确。故选(C)。

对于题目给出的结论"定义在$(-\infty, +\infty)$上的任意函数$f(x)$都可以表示成一个奇函数$g(x)$和一个偶函数$h(x)$之和"。不少考生在高考之后还在探求，引起了考生的兴趣。

事实上，对于任意函数$f(x)$，$x\in(-\infty, +\infty)$，其中奇函数$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，偶函数

$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$。

由已知$f(x)=\lg(10^x+1)$，则

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$=\frac{\lg(10^x+1)-\lg(10^{-x}+1)}{2}=\frac{x}{2}.$$

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{\lg(10^x+1)+\lg(10^{-x}+1)}{2}$$

$$=\frac{2\lg(10^x+1)-x}{2}=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}.$$

因此，由求出的$g(x)$和$h(x)$可知，要选(C)。

该题创设的立意、情境、设问的角度、方式新颖、灵活。不少考生解答不好，解答不好的主要原因有：

（1）看不明白题意，总想把给出的结论具体化，把 $g(x)$ 和 $h(x)$ 分别用 $f(x)$ 表示出来，但又表示不出来，因此不少考生就空着没答。

（2）思维不够灵活，不能利用结论去进行验算，利用排除法去进行筛选。

例3　92(14)　设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，公比 $q=2$，且 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_{30}=2^{30}$，那么 $a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdots\cdots a_{30}$ 等于（　　）。

(A) 2^{10}　　(B) 2^{20}　　(C) 2^{16}　　(D) 2^{15}

【题型说明】

该题的立意，考查等比数列的基础知识，灵活应用等比数列的知识进行有关的变形，考查分析问题和解决问题的能力。

该题的设问比较新颖、灵活，要求考生能灵活地运用概念和等比数列的通项公式，来选择适当的方法、合理、简捷的进行变形，才能解决。

解法一　$\because$ 公比 $q=2$，

$$\therefore\quad a_1\cdot a_2\cdot a_3=\frac{a_3}{4}\cdot\frac{a_3}{2}\cdot a_3=\frac{a_3^3}{8}.$$

因而，$a_3^3=8a_1\cdot a_2\cdot a_3$，

同理　$a_6^3=8a_4\cdot a_5\cdot a_6$，

$a_9^3=8a_7\cdot a_8\cdot a_9$，

……………………

$a_{30}^3=8a_{28}\cdot a_{29}\cdot a_{30}$.

将以上10个等式左右两边分别相乘，得

$$(a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdots\cdots a_{30})^3=8^{10}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_{30}).$$

已知 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_{30}=2^{30}$。

$\therefore\quad (a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdots\cdots a_{30})^3=8^{10}\cdot 2^{30}=2^{60}$。

$\therefore\quad a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdots\cdots a_{30}=2^{20}$。故选(B)。

解法二 先求首项 a_1，用通项公式进行计算来求。

$\because$ 公比 $q=2$，

$\therefore\quad a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_{30}$

$=a_1\cdot 2a_1\cdot 2^2a_1\cdots\cdots 2^{29}a_1$

$=a_1^{30}\cdot 2^{1+2+3+\cdots+29}=a_1^{30}\cdot 2^{15\times 29}$

已知 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdots a_{30}=2^{30}$

$\therefore\quad a_1^{30}\cdot 2^{15\times 29}=2^{30}$。

$$\therefore\quad a_1=\frac{2}{\sqrt[30]{2^{15\times 29}}}=\frac{1}{\sqrt{2^{27}}}.$$

于是，$a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdots\cdots a_{30}$

$=2^2a_1\cdot 2^5a_1\cdot 2^8a_1\cdots\cdots 2^{29}a_1$

$=a_1^{10}\cdot 2^{2+5+8+\cdots+29}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2^{27}}}\right)^{10}\cdot 2^{5\times 31}$$

$$=\frac{1}{2^{5\times 27}}\cdot 2^{5\times 31}=2^{20}.$$

该题是选择题中比较难的题目，难度为0.38，多数考生得零分。从上面提供的两个解法可以看出，解法1比较灵活、简便，解法2比较繁琐，计算量比较大，多数考生由于计算出错而失分，但是解法2又是解题的一般正常的思考方法，由于考生缺乏灵活运用知识、选择简便方法的能力，造成多数考生失分。

也有一部分考生由于对概念理解的错误，认为由 $a_1\cdot a_2\cdot$

$a_3 \cdots\cdots a_{30}=2^{30}$，就直接得出

$$a_3 \cdot a_6 \cdot a_9 \cdots a_{30}=2^{10}.$$

故选(A)。这显然是错误的。

例 4 93(15) 已知 a_1，a_2，a_3，…，a_8 为各项都大于零的等比数列，公比 $q\neq1$，则(　　)。

(A)$a_1+a_8>a_4+a_5$　　(B)$a_1+a_8<a_4+a_5$

(C)$a_1+a_8=a_4+a_5$

(D)a_1+a_8 和 a_4+a_5 的大小关系不能由已知条件确定

【题型说明】

该题的立意，是考查两个实数比较大小的方法及恒等变形的能力。但考查时是通过等比数列，考查等比数列的概念和通项公式，同时考查初中代数中因式分解等方面的知识。

解法一 $(a_1+a_8)-(a_4+a_5)=a_1+a_1q^7-a_1q^3-a_1q^4$

$=a_1(1+q^7-q^3-q^4)=a_1[(1-q^3)-q^4(1-q^3)]$

$=a_1(1-q^3)(1-q^4)$。

由已知条件 a_1，a_2，a_3，…，a_8 各项都是正的，故有 $a_1>0$，$a_1q>0$，$\therefore q>0$ 且 $q\neq1$。

在 $a_1(1-q^3)(1-q^4)$ 中，$a_1>0$，$q>0$ 且 $q\neq1$，不论 $0<q<1$ 或 $q>1$，都 $1-q^3$ 与 $1-q^4$ 同号，因此有 $(1-q^3)(1-q^4)>0$，故 $a_1(1-q^3)(1-q^4)>0$。

$\therefore$ $a_1+a_8>a_4+a_5$，故选(A)。

解法二 $\because a_1+a_8>0$，$a_4+a_5>0$。

$\therefore$ $(a_1+a_8)-(a_4+a_5)$ 的符号与 $(a_1+a_8)^2-(a_4+a_5)^2$ 的符号相同，又 $a_1a_8=a_4a_5$，

$\therefore$ $(a_1+a_8)^2-(a_4+a_5)^2$

$=a_1^2+2a_1a_8+a_8^2-a_4^2-2a_4a_5-a_5^2$

$=a_1^2+a_8^2-a_4^2-a_5^2$

$=a_1^2+a_1^2q^{14}-a_1^2q^6-a_1^2q^8$

$=a_1^2(1-q^6)-a_1^2q^8(1-q^6)$

$=a_1^2(1-q^6)(1-q^7)$。以下解略。

解法三 利用等比数列的性质来解

$$(a_1+a_8)-(a_4+a_5)=(a_1-a_4)+(a_8-a_5)$$

$$=a_1(1-q^3)-a_5(1-q^3)=(1-q^3)(a_1-a_5).$$

当$0<q<1$时，此正数等比数列单调递减，$1-q^3$与a_1-a_5同为正数；当$q>1$时，此正数等比数列单调递增，$1-q^3$与a_1-a_5同为负数。故有$(a_1+a_8)-(a_4+a_5)$恒正。即$a_1+a_8>a_4+a_5$。

该题是高考中等难度试题，理科难度为0.50，文科为0.46。解答此题的方法比较多，考生若是用特殊值法，不妨取$a_1=1$、$q=2$，也能得出正确的结论。

考生解答该题的主要错误有：只知道做减法，但缺泛恒等变形能力，得不出上面恒等变形的结果，如$a_1(1-q^3)(1-q^4)$，$a_1^2(1-q^6)(1-q^8)$……，因此无法进行判断；有的考生虽然得到了上面的结果，但不能确定它们的符号，因此也得不出正确的结论。

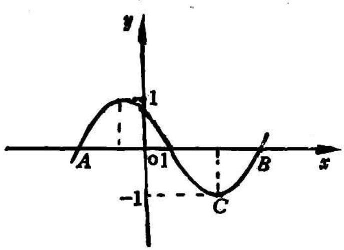

图 1

该题实际上是将一个数列问题从不等式的角度进行设问。因此要运用不等式的有关知识和证明不等式的有关方法。

例5 91(14) 如果图1是周期为2π的三角函数$y=f(x)$的图象，那么$f(x)$可以

写成(　　)。

(A) $\sin(1+x)$　　(B) $\sin(-1-x)$

(C) $\sin(x-1)$　　(D) $\sin(1-x)$

【题型说明】

该题的立意，由给出函数的图象，进行观察、分析，利用函数的性质，来确定函数的解析式。

题目的情境是周期为 2π 的三角函数的图象，最大值为1，最小值为-1，图象过$(1, 0)$点。

本题的难度为0.55。题目灵活、解法也比较多，但由于不少考生缺乏观察分析的能力，不知如何利用三解函数的有关性质，不能正确解答。

解法一　用观察分析法。因为点$(1, 0)$在曲线上，即当$x=1$时，有$f(x)=0$，显然(A)、(B)选项不能成立。又当$x=0$时，$\sin(-1)<0$，故(C)也不成立。只有(D)正确。

解法二　把$y=\sin x$的图象向左平移$(\pi-1)$个单位，则得，

$$y=\sin[x+(\pi-1)]=\sin[\pi+(x-1)]$$

$$=-\sin(x-1)=\sin(1-x)。故选(D)。$$

当然也可以把$y=\cos x$的图象向左平移$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$个单位，则得

$$y=\cos\left[x+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=\cos\left[\frac{\pi}{2}+(x-1)\right]$$

$$=-\sin(x-1)=\sin(1-x)。$$

解法三　设$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，利用图象给出的已知

条件来求 ω 和φ。

因为，当$x=1$时，$f(x)=0$。得

$$\omega+\varphi=0.$$

利用函数的周期为 2π，可知 $A(1-\pi,\ 0)$，$B(1+\pi,\ 0)$，则有 $C\left(1+\frac{\pi}{2},\ -1\right)$。且

$$\sin\left[\omega\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+\varphi\right]=-1.$$

所以 $\omega\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+\varphi=-\frac{\pi}{2}$，又 $\omega+\varphi=0$

得，$\frac{\pi}{2}\omega=-\frac{\pi}{2}$，故 $\omega=-1$，$\varphi=1$。

因此，得 $f(x)=\sin(-x+1)=\sin(1-x)$。

从上面给出的解法看，当然解法一是比较简便的，把数量关系、位置特征和给出的图形有机地结合起来，合理地进行筛选。

例 6　94(12)　设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$，则函数 $f^{-1}(x)$ 的图象是图 2 中的(　　)。

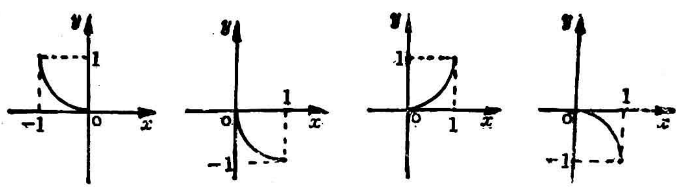

图　2

【题型说明】

该题的立意，考查函数 $f(x)$ 和它的反函数 $f^{-1}(x)$ 之间的关系，函数 $f(x)$ 的图象和它的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象之间的关系。从而考查考生对概念理解的程度。

该题的情境是给出原函数和它的反函数的图象，让考生能通过原函数判断出它的反函数的图象。

解法一：因函数 $f(x)$ 的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 0$，故 $f^{-1}(x)$ 的值域是 $-1\leqslant y\leqslant 0$。故可排除(A)和(C)。

函数 $f(x)$ 的图象为(A)，圆弧的圆心为(0，1)，故 $f^{-1}(n)$ 的图象的圆心为(1，0)，故从(B)和(D)中选(B)。

解法二：求函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数，由 $y=1-\sqrt{1-x^2}$，$\sqrt{1-x^2}=1-y, 1-x^2=(1-y)^2$，$x=-\sqrt{1-(y-1)^2}$，即 $f^{-1}(x)=-\sqrt{1-(x-1)^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$。

故 $f^{-1}(x)$ 的图象为(B)。

解此题时，不少学生采用解法2，但对于圆弧的圆心位置分不清楚，故有不少考生选错(D)。

例7　将数字1、2、3、4填入标号为1、2、3、4的四个方格里，每格填一个数字，则每个方格标号与所填的数字均不相同的填法有(　　)。

(A)6种　(B)9种　(C)11种　(D)23种

【题型说明】

该题的立意，考查排列的概念，分析问题和解决问题的能力。

该题的情境和设问，很有特色，需要考生运用排列的基本概念，进行操作，具体排出来，就可得出解答，着重考查

了考生思维的灵活性，考查了考生运用已有知识分析问题和解决问题的能力。

解 四个方格的标号依次为

$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$

按题目的要求，将数字1、2、3、4填入上面标号为1、2、3、4的四个方程格里，每格填一个数字，每个方格的标号与所填的数字均不相同。

将1填入第2个方格里，其它每个方格所填数字与方格的标号均不相同的填法有三种：

2 1 4 3

3 1 4 2

4 1 2 3

将1填入第3个方格里，其它每个方格所填数字与方格的标号均不相同的填法有三种：

2 4 1 3

3 4 1 2

4 3 1 2

将1填入第4个方格里，其它每个方格所填数字与方格的标号均不相同的填法有三种：

2 3 4 1

3 4 2 1

4 3 2 1

因此，共有9种填法．故选(B)．

本题难度为0.44．由于该题要求能力较高，多数考生做的不够好。