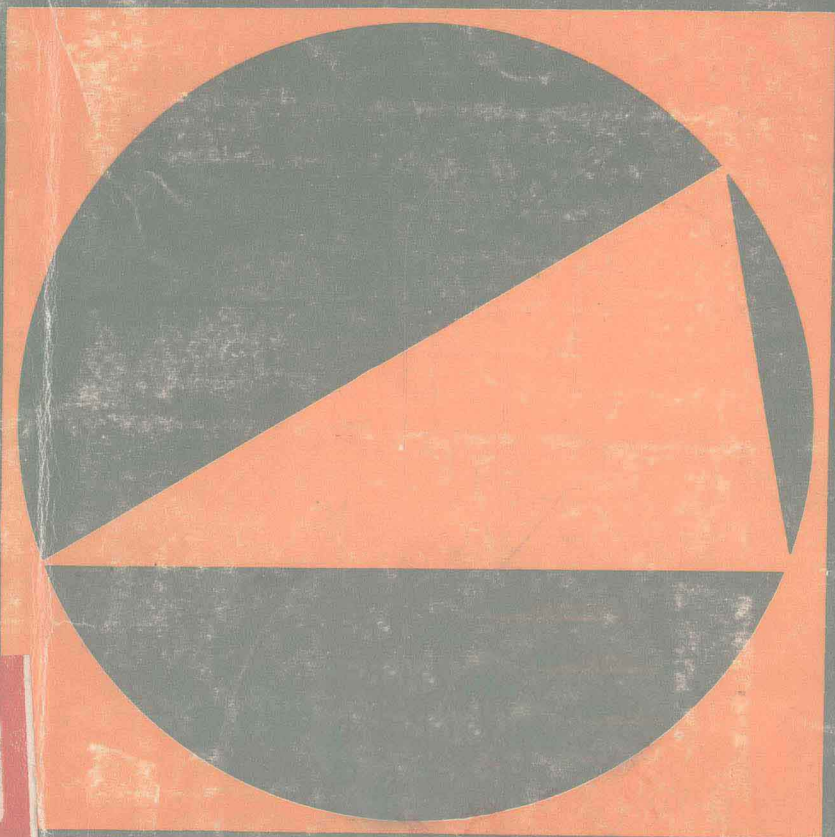


朱秉林 主编



数学教育学

(分 论)

大连海运学院出版社

数 学 教 育 学

(分 论)

朱秉林 主编

大连海运学院出版社

1988 年 · 大连

数学教育学(分论)

朱秉林 主编

大连海运学院出版社出版

辽宁师范大学计算机科学系微机排版

大连海运学院印刷厂印装

开本: 787×1092 1/32 印张: 12.75 字数: 274 千

1988 年 7 月第 1 版 1988 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1-5000

辽宁师范大学书稿出版编辑室供稿、发行

责任编辑: 穆 杰 封面设计: 巴 兰

责任校对: 舒 禾

ISBN 7-5632-0039-8/G·20 定价: 4.00 元

前 言

这本《数学教育学》(分论)是王鸿钧与王玉阁合编的《数学教育学》(总论)的延续和配套. 内容包括三个方面: 中学代数教学; 中学几何教学; 微积分初步教学. 各部分内容虽独立成篇, 自成系统, 但都紧扣中学数学教材教法课程的主题, 浑然一体, 交相映照.

本书第一篇由王玉阁负责编写、统稿(其中伊晓编写方程一章, 贺贤孝编写不等式一章, 另外还采用了曹伟丽、孟祥文提供的部分手稿); 第二篇由毕恩材执笔编写; 第三篇由朱秉林执笔编写. 朱秉林最后对全书作了修改、统稿和审定工作.

本书可作为高等师范院校数学系(科)、各类成人教育(本科、专科、电大、函大、夜大、职大)的教材, 也可供高等院校理工科师生、数学教育研究人员和中等学校数学教师阅读和参考. 数学教育学作为一门边缘性、综合性和富于实践性的科学, 目前尚在逐步建立过程中, 有些问题和观点还有待进一步探索. 加上成书时间仓促, 作者水平有限, 缺点和错误在所难免, 敬请读者指正.

在成书过程中, 王鸿钧教授自始至终给予极大的关心和支持, 并详细地审阅了部分原稿, 提出了许多宝贵的修改意见. 辽宁师范大学书稿出版编辑室为本书出版给予了许多有

益的指导.

另外,在编写过程中,曾参阅了兄弟院校的有关教材和资料,并吸取了国内外许多同行学者的宝贵经验和研究成果.值此付梓之际,编者深表谢忱.

编 者

1988年3月于辽宁师范大学

目 录

第一篇 中学代数教学

第一章 中学代数教学概论

- § 1 代数学(科学代数) (1)
- § 2 中学代数 (5)

第二章 数的概念的教学

- § 1 当前的教学情况 (10)
- § 2 扩展数集的原则与方法 (10)
- § 3 数的概念教学中应注意事项 (18)

第三章 式的运算的教学

- § 1 地位与作用 (22)
- § 2 主要内容与教材安排 (23)
- § 3 教学中的注意事项 (26)

第四章 函数的教学

- § 1 函数定义的简史 (39)
- § 2 中学的函数教学 (42)
- § 3 现代函数定义的逻辑分析 (45)

§ 4 函数的不同侧面	(49)
§ 5 函数思维的培养	(53)

第五章 方程(组)的教学

§ 1 概 述	(57)
§ 2 方程的定义	(58)
§ 3 方程的分类	(59)
§ 4 方程(组)的同解性	(61)
§ 5 解方程的非同解变形	(68)
§ 6 列方程解应用题	(74)

第六章 不等式的教学

§ 1 大小关系与不等式	(87)
§ 2 中学代数中不等式的教学	(94)

第二篇 中学几何教学

第一章 中学几何教学的基本问题

§ 1 中学几何教学目标	(102)
§ 2 中学几何教学内容	(109)
§ 3 中学几何学习	(131)
§ 4 中学几何教学的几个问题	(140)

第二章 中学几何教学的主要问题

§ 1 概念及教学	(153)
§ 2 几何命题教学	(175)
§ 3 中学几何问题解决教学	(189)

第三篇 微积分的教学

第一章 绪 论

- § 1 微积分的发展概况 (192)
- § 2 中学微积分初步 (197)

第二章 极限的教学

- § 1 数列的极限 (203)
- § 2 函数的极限 (235)
- § 3 函数的连续性 (258)

第三章 导数与微分的教学

- § 1 导数的概念 (267)
- § 2 求导法则 (273)
- § 3 函数的微分 (293)
- § 4 导数的应用 (299)

第四章 不定积分的教学

- § 1 不定积分的概念 (324)
- § 2 不定积分的运算法则和直接积分法 (328)
- § 3 换元积分法和分部积分法 (331)
- [附录]关于“积不出”问题 (347)

第五章 定积分及其应用的教学

- § 1 定积分的概念 (360)
- § 2 定积分的计算 (367)

§ 3 定积分的应用	(374)
[附录]关于黎曼积分的几个等价定义	(384)
主要参考书目	(398)

第一篇 中学代数教学

第一章 中学代数教学概论

§ 1 代数学(科学代数)

一、代数学一词的来源

“代数学”一词来自拉丁文 algebra, 它又是从阿拉伯文来的. 大约公元 820 年, 阿拉伯人阿尔·花拉子米著了一本《代数学》(文词代数), 1140 年左右罗伯特把它译成拉丁文, 书名是“ilmaljabr Wa'l muquabalah”. Aljabr 是“还原”或“移项”的意思, Wa'l muquabalah 是“对消”, 即将两端相同的项消去的意思, 书名是《还原与对消的科学》. 后来第二个字渐渐被人们所忘记, 而 aljabr 这个字变成了 algebra, 这就是拉丁文的“代数学”. 1847 年英国人伟烈亚力来到中国, 他用中文写了一本《数学启蒙》(1853 年)介绍西方数学. 在序中说“有代数、微分诸书在, ……”这是第一次使用代数这个词来作为数学分科的名称. 1859 年我国清代数学家李善兰和伟烈亚力合译英国德·摩根的“Ele-

ments of Algebra”(1835 年), 正式定名为《代数学》. 这是我国第一本代数学书, 代数的名称就是这样来的.

二、代数学的三种观点

第一种观点是, 把代数看成是关于字母计算, 关于由字母构成的公式的变换以及关于解代数方程的科学. 阿尔·花拉子米的《代数学》, 韦达、笛卡儿引进字母表示法, 欧拉的《代数学引论》等都体现了这种观点. 第二种观点是, 把代数看成是关于研究代数方程理论的科学. 18 世纪末及 19 世纪初, 代数方程的解法问题逐渐地被人们认为是中心问题. 塔尔塔利亚、卡当、欧拉、高斯、阿贝尔、伽罗华等创造了与此问题有关的重要理论. 19 世纪中期, 谢尔的两卷代数问世了, 这在当时是一大创举——第一次叙述伽罗华理论. 在这部书里把代数定义为研究代数方程理论的科学. 第三种观点是, 把代数看成是研究各种代数结构的科学. 19 世纪后半期, 代数在力学、物理及数学本身找到了越来越多的研究对象, 如向量、矩阵、张量、旋量、超复数等. 对于这些研究对象, 需要研究它们的运算, 相应地使代数发生了质的变化. 20 世纪 30 年代, 范·德·瓦尔登的《近世代数》出版了, 它在阐述什么是代数的第三种观点中起了巨大的作用.

三、代数学简史

在距今约 3800 年以前, 古埃及和古巴比伦的数学史料中已有了一次方程和简单二次方程的记载, 古希腊的海伦曾求出方程 $x^2 + 4x = 896$ 的根. 丢番图的《算术》中提出了符号运算法则、解二次方程、特殊三次方程和不定方程, 被誉为代数学的鼻祖. 印度的婆罗摩笈多创立了一套符号来表示量的概念和描述运算, 给出负数的运算法则, 得

到方程 $x^2 + px - q = 0$ 的一个求根公式。婆什迦罗进一步讨论了无理方程，提出了负平方根问题，还给出了无理数的运算法则，从而打破了无理数与有理数之间的森严界限。阿尔·花拉子米的《代数学》中着重讨论了方程 $x^2 + px = q$ 的一般解法，系统明确地论了解方程的具体过程及其几何解释，还承认了方程的无理根。奥马·海亚姆《代数学》中较详尽地讨论了三次方程问题。中国由于较早地确立了十进位制记数法，加上算筹的广泛使用，使代数在中国数学中一直占优势地位，并在早期世界数学中独树一帜。公元前1世纪的《九章算术》中已有负系数表示的方程问题，较之印度早了6个世纪。《九章算术》中的“五家共井”问题是我国最早的不定方程问题，国外对此类问题研究均在中国之后。《孙子算经》的“孙子定理”和宋代的“大衍求一术”是世界数学史上引人注目的杰出成就，被公认为“中国剩余定理”，西方直到19世纪才有类似定理。《九章算术》中的分离系数法与消元法，直到17世纪莱布尼茨才着手拟定。11—13世纪，沈括利用“隙积术”，杨辉、朱世杰等利用“垛积招差术”给出某类级数求和的一般法则，其中有17世纪出现于西方的“帕斯卡三角形”和“有限差分公式”。13世纪李冶已找到求解一元高次方程的普遍方法——“天元术”，并很快被朱世杰推广到二元、三元、四元的高次联立方程组，名为“四元术”，录于《四元玉鉴》(1303年)中。这是一项奇迹般的创造，使中国古代代数学达到全盛时期。文艺复兴运动为代数学带来一系列重大突破。塔尔塔利亚、卡当和费拉里等先后找到一般三次方程和四次方程的代数解法，使

欧洲人在代数上首次超过东方人。卡当还与邦贝利解决了二次、三次、四次代数方程的公式求解问题。

现代代数学的奠基人之一是法国数学家韦达，他在《分析方法引论》中建立起抽象代数的符号，还研究了方程系数与根的关系，从而得到著名的“韦达定理”。17世纪西方代数中的显赫成就还有：英国纳皮尔的对数发明，牛顿的二项展开式推广，布里格斯第一批常用对数表的制定，法国的笛卡儿待定系数原理的引入和代数符号的改良，帕斯卡二项式展开定理的获得，等等。18世纪德国的高斯给出“代数基本定理”的第一个实质性证明，法国的拉格朗日、鲁菲尼和挪威的阿贝尔在一般五次方程不可能用根式求解方面做了重要工作，法国的伽罗瓦提出了群论，由此开创了近世代数的研究。18世纪末期，法国的勒让德、高斯等人创立了代数数论。19世纪最独特的创造是复变函数论，它是由欧拉、高斯、柯西等共同建树的。19世纪中期，爱尔兰的哈密顿和波兰的格拉斯曼创立了四元数，由此发展了超复数理论。19世纪后期，由于英国的西尔威斯特、凯莱和美国的皮尔斯父子等人的工作，逐步发展了线性代数这一学科。抽象代数是伴随抽象群的出现而兴起的。法国的若尔当和挪威数学家李，开创了李群与李代数。英国的布尔于1847年提出布尔代数，后由德国的弗雷格作了进一步发展。电子计算机的问世深刻地影响着代数学的发展趋向，诸如超高次方程的求解，含有几百个未知数的方程组求解等。近年来代数的分支越来越多，除上述学科外，还有新数值代数、组合代数、域论、格论、同调代数、代数几何、代数拓扑等等。

§2 中学代数

一、中学代数是一门综合性的学科

中学代数是教学科目，它根据中学教育的目的、中学生身心发展与数学学科发展来确定内容，它的主要内容是代数，但也涉及到分析数学、离散数学等几个分支的内容。近几年来三角学不单独设科，把它安排在代数中讲授。因此，中学代数成了一门综合性的学科。

二、中学代数的内容

根据现行普通中学数学教学大纲的规定(1986年版)，中学代数有以下内容：

1. 数的概念

算术数 $\xrightarrow{\text{引进负数}}$ 有理数 $\xrightarrow{\text{引进无理数}}$ 实数 $\xrightarrow{\text{引进虚数}}$ 复数

2. 式的运算

代数式(整式、分式、根式)，初等超越式(指数式、对数式、三角式、反三角式)。

3. 方 程

代数方程(整式方程、分式方程、无理方程)，简单初等超越方程(指数方程、对数方程、三角方程)。

4. 方程组

一次方程组，二次方程组，其他简单方程组。

5. 不等式

不等式解法(一元一次不等式、一元二次不等式与一元一次不等式组的解法)，不等式证明。

6. 函 数

函数的初步知识(正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数),基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数).

7. 概率与统计

统计初步, 概率初步.

8. 其 他

等差数列、等比数列、数学归纳法、排列与组合、二项式定理、三角形解法等.

在中学代数的这些内容中, 主要是数的概念、式的运算、方程与函数. 其中, 数的概念是基础, 式的运算是关键, 方程与函数是两个重点. 一般来说, 初中阶段侧重方程, 高中阶段侧重函数, 这是多年来中学代数教材的体系.

关于中学代数教材的安排还有如下体系.

(1)按结构观点安排教材 就是把教材公理化、代数化与结构化. 这是法国布尔巴基学派、国际上新数运动的观点. 这种安排脱离中学教育目标太远, 而且学生接受起来也感到困难.

(2)按分析观点安排教材 就是按函数观点处理中学代数的内容. 这是德国克莱茵提出的观点. 这种安排突出了分析的观点, 但有些不属于分析范畴的内容就不好解释了.

(3)按代数观点安排教材 就是按既注意运算又加强逻辑的方法处理中学代数的内容. 如 Holmes 等人著的《代数》就是这种体系.

以上三种教材体系, 目前我国尚难实行.

三、中学代数的教学目的

中学代数的教学目的包括如下三个方面:

(1)知识教育 使学生切实学好数的概念、式的运算、方程和函数以及数列、排列、组合等有关概念、法则、性质、公式和数学方法.

(2)发展教育 应有计划地发展学生的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题与解决问题能力、自学能力、创造思维能力等.

(3)思想教育 对学生进行思想教育是有必要的,也是可能的.中学代数中蕴藏着许多辩证唯物主义的观点,如对立统一、相互转化、螺旋上升等.另外,我国对代数学科的发展、贡献也是比较大的,如商高定理、杨辉三角、秦九韶法、祖率等.这些都是进行思想教育的好素材.通过中学代数的教育,可培养学生的坚强意志、克服困难的精神、实事求是的作风等,同时,这也是本学科的教学任务之一.

四、中学代数教学中的注意事项

(1)中学代数是教学科目,教学中应处理好科学代数与中学代数的关系.既要注意科学的严谨性,又要注意学生认识的能动性.

(2)中学代数的内容庞杂,教学中应注意主次分明.例如,数的概念、式的运算、方程与函数等内容既重要,学习时间又长,因而必须把它们当做重点内容来学.教学中应强调通性与通法,不应过分强调某些特殊的技巧与方法.数的运算律、指数律、函数的一般性质、方程的同解理论等都是中学代数中的通性.配方法、待定系数法、数学归纳法、换元法、消元法等都是中学代数中的通法.这些通性与通法,应指导学生学好.当然,也应根据具体问题具体对待的原则,对于某些经常用到的特殊方法(如一元二次方程解法中

的因式分解法)也不应忽视.

(3)培养学生的逻辑思维能力,特别是推理论证能力是中学代数教师义不容辞的责任.在初中一年级的代数教学中有意识、有计划地培养学生的逻辑思维能力特别是推理论证能力,将会减轻初中二年级学习平面几何的困难.在中学各年级的代数教学中,注意培养学生逻辑思维能力,有助于提高中学生的逻辑思维水平,并有利于提高中学数学教学质量.

(4)中学代数教学中,应贯穿“指导学生会学、会想与会用”的思想.这就是一要指导学生主动地学习而不是让学生被动地接受;二要指导学生的学习方法而不是让学生“模仿加记忆”;三要培养学生思考问题的能力而不是让学生死记硬背;四要指导学生能运用所学知识解决问题而不是使学生成为容纳知识的仓库.

(5)中学代数教学中应注意解决好几个转折.第一,从算术到代数的转折,也就是从具体的数字表示的数值计算到用抽象的字母表示的数与式的运算.第二,从常量到变量的转折,也就是函数概念的引入.第三,从有限思想到无限思想的转折,也就是由有理数到无理数的引入.也就是函数概念的引入.第四,从必然到或然的转折,也就是概率与统计的引进.

(6)中学代数教学中,应注意体现启发式教学思想,对古今中外行之有效的教学方法,应批判地继承与借鉴.既不要盲目照搬,也不要一概排斥.例如,对讲解法既不要认为它是传统教学方法,就一概否定;也不要抱残守缺,不予改进.又如,对发现法既不要认为它是国外的新方法,就全盘照搬;也不要大搞排外,不予实验.