李仲来 主编

Wang Shenhuai
Shuxue Jiaoyu Wenxuan

王申怀

数学教育文选

王申怀 著

人民教育出版社

王申怀

WANG SHENHUAI

数学教育文选

01

[illegible]来 主编

王申怀 著

人民教育出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

王申怀数学教育文选/王申怀著．—北京：
人民教育出版社，2011.11
ISBN 978-7-107-24042-3

Ⅰ．①王…　Ⅱ．①王…　Ⅲ．①数学教学—文集
Ⅳ．①01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 238390 号

人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京人卫印刷厂印装　全国新华书店经销
2012 年 4 月第 1 版　　2012 年 4 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：9.25　插页：2　字数：229 千字
定价：20.50 元

序

我与王申怀认识于1962年秋，那时他刚从复旦大学数学系毕业，分配到北京师范大学数学系工作. 初到北师大安排在数学系几何教研室，至今算来与我相识已将近50年了. 现在王申怀教授邀请我为他的著作——《王申怀数学教育文选》作序，我感到这是一件很高兴的事情.

王申怀老师在北师大从事数学教育工作，从助教开始，历任讲师、副教授、教授，直至1999年年底退休，可以说积累了丰富的数学教学经验，出版一本教育文选是一件很有意义的事情. 王申怀老师在北师大数学系的工作大致可分两个阶段：第一阶段是从1962年至1990年左右，他在北师大数学系几何教研室做教学工作，曾主讲过解析几何、高等几何、微分几何等大学几何课程；第二阶段是1990年以后，由于工作需要，王申怀从几何教研室调至中学数学教育与数学史教研室工作，并担任数学系副主任，在这时期他主讲过数学教学论和初等数学研究，同时指导本科生在北师大附中等学校进行教学实习，从1995年后招收（数学）学科教学论硕士研究生和教育专业硕士研究生. 此外王申怀还担任《数学通报》和《数学教育学报》编委，同时受聘于教育部考试中心和北京教育考试院，担任普通高考和成人高考专升本的命题工作. 退休以后，本世纪初，王申怀教授参加了由我主编，人民教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书数学A版》的编写工作（担任数学2及选修2-1的分册主编）.

《王申怀数学教育文选》大体上由三部分组成：第一部分是有关初等数学研究方面的内容，这部分内容的主要文章有："π的数值是怎样计算出来的""正弦定理与欧氏平行公理的等价性""一个极值问题的新解"等. 这部分文章的特点是从纯数学知识方面来讨论初等数学的有关问题. 从文章的写法上来说是采用高观点的视角，也就是说是用高等数学的知识（如微积分、抽象代数、射影几何等知识）来统率、探讨初等数学问题.

第二部分是有关初等几何教材与教法的研究，同时介绍了一些国外的著名教材. 这部分内容的主要文章有："二次曲线中点弦性质的统一证明""圆锥曲线是椭圆、双曲线和抛物线的解析证明""美国 UCSMP 教材介绍"等，这些文章的主要读者对象是初涉中学数学教学的新教师，以期望能解决他们在教学实践及教材处理方面的某些疑惑或困难. 因此这部分内容的明显特点是有针对性与现实性.

第三部分是有关几何课程教改的探讨. 其主要文章有："论高师院校几何课中的思想和方法""几何课程教改展望""数学证明的教育价值""编写新教材中的一些感想"等，这些文章的特色是尽量利用现代教育学和心理学研究的成果来研究目前的几何课程改革，同时也总结了一些国内外几何课程改革的失败和成功的经验，以期望人们在今后的几何课程改革和编写教材方面少走弯路.

除了以上三部分内容以外，文选中还收集了王申怀教授撰写的一些杂谈，如："存在性证明之必要""4 维立方体""普拉托问题与道格拉斯""综合法、代数法谁优谁劣"等，这些文章短小精悍，读起来也颇有趣味.

总之，这本文选反映出王申怀教授在初等数学研究、数学教育理论研究、几何课程改革方面研究的成果. 同时也反映出王申怀教授对中学数学教学的关注. 这本文选对

师范大学数学专业的本科生以及数学教育专业的研究生都是很有价值的参考读物，同时对中学数学教师在教学实际与理论研究方面也有参考价值. 甚至某些文章对于开阔中学生的视野，提高他们的数学知识层面也有好处.

以上是我对《王申怀数学教育文选》的一些粗浅看法，供广大读者阅读时参考.

刘绍学

2011 年 4 月

目录

目录

目录

一、几何与初等数学研究

■ π 的数值是怎样计算出来的*

大家都知道，圆的周长与它的直径之比是个常数，通常称它为圆周率，用希腊字母 π 来表示. π 不但在理论研究方面有很重要的地位，而且在生产实践中也常用到它. 因此，自古以来人们对圆周率 π 就进行了详细的研究，并用各种方法来计算出它的数值. 下面我们简单地介绍一下圆周率 π 是怎样计算出来的.

（一）利用圆的内接和外切正多边形的边长来计算 π

为了计算圆周率 π，我们首先考虑能否算出一个半径为 R 的圆的周长. 如果我们已求得此圆的周长，那么只需把它和圆的直径相比就能得到圆周率 π. 因此，求圆周率的问题在某种意义上就可归结为求圆的周长.

显然，一个圆的周长总是大于其内接正多边形的周长，且总是小于其外切正多边形的周长. 而且当正多边形的边数不断增加时，它的周长就越来越接近圆的周长. 所以为了求圆的周长我们先来求圆的内接和外切正多边形的周长.

假设 a_n 和 a_{2n} 分别表示内接于半径为 R 的圆的正 n 边形和正 $2n$ 边形的一边长，那么成立

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}. \tag{1}$$

假设 A_n 和 A_{2n} 分别表示外切于半径为 R 的圆的正 n 边形和正 $2n$ 边形的一边长，那么成立

* 本文原载于《中学理科教学》，1978（5）：25-29.

$$A_{2n}=\frac{2RA_n}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}. \qquad (2)$$

我们现在来证明公式（1）和公式（2）.

设内接正 $2n$ 边形的中心角为θ，其一边长 $AB=a_{2n}$（如图 1），那么

$$\sin\theta=\frac{a_n}{2R}.$$

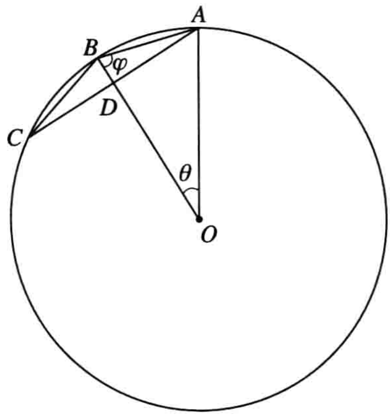

图 1

设$\angle ABO=\varphi$，那么

$$\varphi=\frac{\pi-\theta}{2}，或 \theta=\pi-2\varphi.$$

所以

$$\cos\theta=\cos(\pi-2\varphi)=-\cos 2\varphi=2\sin^2\varphi-1.$$

设 AC 为内接正 n 边形的一边长，即 $AC=a_n$，则$AD=\frac{a_n}{2}$. 所以

$$\sin\varphi=\frac{a_n}{2a_{2n}},$$

因此

$$\cos\theta=\frac{a_n^2}{2a_{2n}^2}-1.$$

但是 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以

$$\left(\frac{a_n}{2R}\right)^2+\left(\frac{a_n^2}{2a_{2n}^2}-1\right)^2=1,$$

化简得

$$a_{2n}^4-4R^2a_{2n}^2+R^2a_n^2=0.$$

把 a_{2n} 作为未知数，解得

$$a_{2n}^2=\frac{4R^2\pm\sqrt{16R^4-4a_n^2R^2}}{2}=2R^2\pm R\sqrt{4R^2-a_n^2},$$

因为 $a_{2n}\leqslant R$，因此根式前的“+”号不合题意，故

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}.$$

设外切正 $2n$ 边形的中心角为 2θ（如图 2），

则
$$\tan\theta=\frac{A_{2n}}{2R},$$

$$\tan 2\theta=\frac{A_n}{2R},$$

又因为
$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

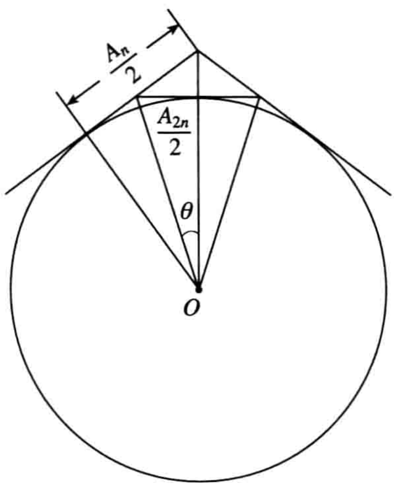

图 2

所以
$$\frac{A_n}{2R}=\frac{2\cdot\frac{A_{2n}}{2R}}{1-\frac{A_{2n}^2}{4R^2}}=\frac{4RA_{2n}}{4R^2-A_{2n}^2},$$

因此得
$$A_nA_{2n}^2+8R^2A_{2n}-4R^2A_{2n}=0,$$

解得
$$A_{2n}=\frac{2R(\pm\sqrt{4R^2+A_n^2}-2R)}{A_n}.$$

因为 $A_{2n}>0$，所以根式前的“－”号不合题意．所以

$$A_{2n}=\frac{2R(\sqrt{4R^2+A_n^2}-2R)}{A_n}=\frac{2RA_n}{2R+\sqrt{4R^2+A_n^2}}.$$

公式（1）和公式（2）证毕．

因为圆的内接或外切正六边形的边长是很容易计算的，所以我们如果连续运用公式（1）和公式（2）就可以很快地算出正 12，24，48 和 96 边的内接和外切正多边形的周长．如果取圆的直径为 $1\left(即 R=\frac{1}{2}\right)$，由公式（1）和公式（2）就可以得出圆周率 π 的不足和过剩近似值．用这种方法来计算 π 的数值大约在公元前 3 世纪，由希腊数学家阿基米德（Archimedes）首先提出，人们把这种方法称为古典方法．阿基米德曾计算出 π 是介于数 $\frac{223}{71}$ 和 $\frac{22}{7}$ 之间，如果取二位小数，π 便是 3.14．

我国古代有许多数学家对圆周率也都有过很好的研究．大约在公元 3 世纪，刘徽只通过圆的内接多边形，便求得 π 的近似值为 3.14 或 $\frac{157}{50}$（没受阿基米德影响）．大约在公元 5 世纪，祖冲之得到 π 的近似值在 3.141 592 6 和3.141 592 7之间，这说明六位小数都是正确的．这在当时世界上是最好的结果，这个成绩几乎保持了一千年，到 16 世纪欧洲人才得到这个结果（有关我国古代对圆周率的研究请参阅有关中国数学史，这里不再详述）．

在 17 世纪以前，人们计算圆周率 π 就是利用上述方法. 下面简单地列出 17 世纪以前人们计算 π 的结果.

大约在公元 150 年，亚力山大的托勒密（Ptolemy）用古典方法得到 π 的近似值为 3.141 6；

1150 年印度数学家 Bhaskara 曾用 $\sqrt{10}$ 作为 π 的近似值；

1579 年法国数学家韦达（F. Viete）通过计算一个 $6\times2^{16}=393\ 216$ 边的正多边形的周长得到 π 的九位小数；

1610 年德国人 Van Ceulen 用了几乎一生的精力，计算了一个 2^{62} 个（有 17 位数字!）边的正多边形，得到 π 的 35 位小数. 从 Van Ceulen 的工作可以看出如果不改进计算的方法，想要得出 π 的更精确的数值几乎是不可能了.

（二）利用无穷级数来计算 π

在介绍利用无穷级数来计算 π 之前，我们先给出一个把 π 展开为无穷乘积的例子.

韦达在 1579 年首先发现了一个有趣的等式

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots \qquad (3)$$

从这个等式可以看出，π 可以写为无穷乘积的形式. 证明这个公式并不困难. 考虑一个单位圆，则它的内接正方形的一边长为 $\sec\theta(\theta=45^\circ)$；

内接正 8 边形的 2 边之和为 $\sec\theta\cdot\sec\dfrac{\theta}{2}$；

内接正 16 边形的 4 边之和为 $\sec\theta\cdot\sec\dfrac{\theta}{2}\cdot\sec\dfrac{\theta}{4}$；

……

显然可以得出最后的结果是越来越接近于 $\dfrac{1}{4}$ 圆周长，即

$$\sec\theta\cdot\sec\frac{\theta}{2}\cdot\sec\frac{\theta}{4}\cdot\cdots\quad\to\frac{\pi}{2},$$

因此

$$\frac{2}{\pi}=\cos\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{4}\cdot\cdots$$

但是 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$，$\cos\frac{\theta}{4}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$等. 因此就得到（3）式.

但是如果利用公式（3）来计算 π 是很困难的. 因为这必须进行很多次开方运算，如果想要得到 π 更精确的数值，计算量就会非常大，以至无法实现.

1671 年苏格兰人 J. Gregorg 把 arctan x 展开成无穷级数

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\ (-1\leqslant x\leqslant 1)\qquad(4)$$

(关于这个公式的证明超出了本文所讨论的范围，这里不再叙述了)

但是他没有注意到当 $x=1$ 时上述级数便变为

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\qquad(5)$$

这个事实首先由莱布尼茨（Leibniz）在 1674 年指出. 因此人们通常把（5）式称为莱布尼茨公式❶. 但是级数（5）收敛得很慢，因此用它来计算 π 也得不出更精确的数值.

❶ 关于莱布尼茨公式的初等证明见《数学通报》1955 年 2 月第 10～15 页题为“对于数 π 的沃利斯公式、莱布尼茨公式和欧拉公式的初等推导”一文.

1706 年马信（J. Machin）注意到等式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}. \tag{6}$$

这个等式的证明是不难的. 设 $\alpha=\arctan\frac{1}{5}$，$\beta=\arctan\frac{1}{239}$；那么 $\tan\alpha=\frac{1}{5}$，$\tan\beta=\frac{1}{239}$. 由此可知，$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{5}{12}$，$\tan 4\alpha=\frac{120}{119}$，所以 $\tan(4\alpha-\beta)=\frac{\tan 4\alpha-\tan\beta}{1+\tan 4\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=1$，故 $\arctan(4\alpha-\beta)=\frac{\pi}{4}$，即为（6）式. 因此只要算出 $\arctan\frac{1}{5}$ 和 $\arctan\frac{1}{239}$，利用（6）式就能很快地得出 π 的数值. 为此我们把（4）式中的 x 分别取$\frac{1}{5}$和$\frac{1}{239}$再代入（6）式便得

$$\begin{aligned}\pi&=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}\\&=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\right.\\&\qquad\left.\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\cdots\right)-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right).\end{aligned} \tag{7}$$

（7）式称为马信公式. 如果我们要依上述公式计算出 π 的七位小数，只需上面已写出的那些项就够了.

$\frac{16}{5}=3.2$	$\frac{16}{3\times 5^3}=0.042\ 666\ 67$
$\frac{16}{5\times 5^5}=0.001\ 024$	$\frac{16}{7\times 5^7}=0.000\ 029\ 26$
$+)\frac{16}{9\times 5^9}=0.000\ 000\ 91$	$+)\frac{16}{11\times 5^{11}}=0.000\ 000\ 03$
3.201 024 91（＋）	0.042 695 96（－）

$$\begin{array}{r} 3.201\ 024\ 91 \\ -)\ 0.042\ 695\ 96 \\ \hline 3.158\ 328\ 95 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} \dfrac{4}{239}=0.016\ 736\ 40 & (+) \\ -)\ \dfrac{4}{3\times 239^3}=0.000\ 000\ 10 & (-) \\ \hline 0.016\ 736\ 30 & \end{array}$$

因此，

$$\pi\approx 3.158\ 328\ 95-0.016\ 736\ 30=3.141\ 592\ 65,$$

其中前面七位小数是正确的.

由上面的计算过程可知，我们利用马信的方法大约只需用半个小时就可计算出 π 的七位小数. 但是如果用古典的方法，韦达为了得到 π 的九位小数竟需计算一个正393 216边形的周长！因此由于计算方法的改进就能很快地计算出 π 的更精确的数值. 马信在 1706 年曾利用公式（7）把 π 计算到 100 位小数.

1844 年 Dase 利用级数（4）及等式

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8} \tag{8}$$

（这个等式的证明留给读者自己来证）把 π 计算到 200 位小数. 英国人 W. Shanks 用公式（7）花了 15 年的时间在 1873 年得到 π 的 707 位小数. 但是在 1946 年发现第 528 位小数是错误的. 1948 年英国人 D. F. Ferguson 和美国人 J. W. Wrench 一起公布了 π 的 808 位小数. 这是人们在利用电子计算机以前所得到的最后结果了.

前面已经讲过韦达首先把 π 写成无穷乘积的形式，现在再介绍几种 π 展开为无穷乘积或无穷级数的例子.

1650 年英国数学家沃利斯（J. Wallis）把 π 写为

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot\cdots}, \tag{9}$$