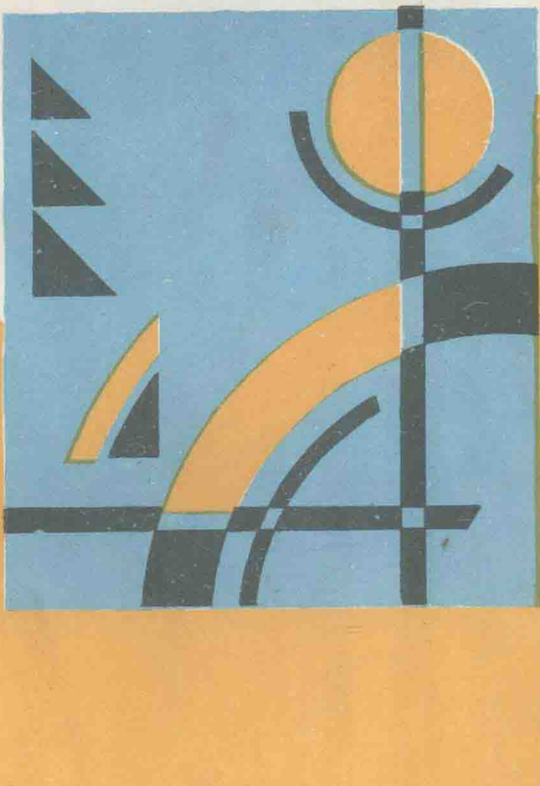
中等职业学校教材

数学 第三册

教育教材编审委员会编审

版社



中等职业学校教材

数　学 第三册

湖南省中等职业教育教材编审委员会编审

湖南科学技术出版社

中等职业学校教材

数　　学　（第三册）

编　　审：湖南省中等职业教育教材编审委员会
责任编辑：陈澧晖
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路 11 号
印　　刷：湖南省教育印刷厂
厂　　址：长沙市青园路 6 号
邮　　编：410004
（印装质量问题请直接与本厂联系）
出版日期：1997 年 6 月第 1 版第 3 次
开　　本：787mm×1092mm　1/32
印　　张：6.625
字　　数：149,000
印　　数：33,181—73240
ISBN 7—5357—2053—6/G·165（课）
定　　价：5.00 元

内 容 提 要

这套教材共分四册．第一册为集合与函数，方程与不等式，幂函数、指数函数与对数函数，平面向量，三角函数；第二册为复数，空间平面和直线，平面解析几何，空间解析几何初步，多面体与旋转体；第三册为数列与数学归纳法，排列组合与二项式定理，概率初步，统计初步，布尔代数；第四册为微分学初步，积分学初步，行列式与线性方程组，矩阵初步．

这套书为湖南省职业中专、职业高中和电视中专的试用教材，也可作为职工中专、农民中专或者普通中专的教材或参考书．

目　　录

第一章　数列和数学归纳法

第一节　数　　列

一、 数列的概念

1. 数列的定义

我们先看下面的例子：

(1) 排成一列的自然数：　　1,2,3,…　　①

(2) 排成一列的偶数：　　2,4,6,8,…　　②

(3) 某地区 1996 年 1 月的气温纪录(单位:℃)：

8,7,2,0,…,−2,−7.　　③

(4) 圆周率 π 精确到 1,0.1,0.01,…的不足近似值：

3,3.1,3.14,…　　④

对于以上这些按照自然数的顺序依次排列着的一串数,我们有如下定义：

定义　按自然数的顺序依次排列的一串数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

称为**数列**,记为$\{a_n\}$,即

$$\{a_n\}: a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

组成数列的每一个数叫做数列的**项**,第一个数 a_1 叫做数列的**首项**,第二个数 a_2 叫做数列的第二项,…等等,第 n 个数 a_n 叫做数列的第 n 项,也叫做数列的**通项**,如果是有限个数组成的数列,

最后一个数叫做数列的**末项**．

2．数列的通项公式

数列的每一项与它的项的序号之间都存在着一种确定的对应关系，所以说：数列是一个定义域为自然数集或自然数集的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$的函数$f(n)$，当自变量n从小到大取值时，所对应的函数值就是数列的对应项．

如果函数$f(n)$能用一个解析式（公式）表示出来的话，则$f(n)$就是数列的通项，即有通项公式：

$$f(n)=a_n$$

所以数列可以用它的通项表示，并可用图象表示．它的图象是一些孤立点，如数列$a_n=(-1)^n(2n-1)$的图象（图1—1）．

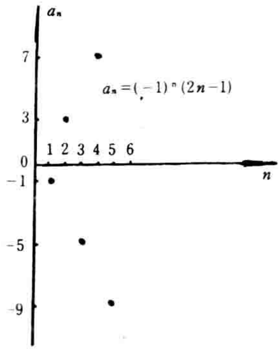


图1—1

又如数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \quad ⑤$$

$$-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n^2},\cdots \quad ⑥$$

$$1,1,1,\cdots,1,\cdots \quad ⑦$$

用通项公式分别表示为：

$$a_n=\frac{1}{n},\ b_n=(-1)^n\frac{1}{n^2},\ C_n=1.$$

若已知数列的通项，十分容易求出数列的各项．并写出数列；若已知数列的前几个，一般则用观察的方法，求出数列的通项．

【例题 1】 已知数列的通项公式 $a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$

（1）写出数列前 3 项；

（2）写出数列第 18 项；

（3）哪一项是$\frac{1}{21}$.

解 （1）$a_1=\frac{(-1)^1}{2\times1+1}=-\frac{1}{3}$， $a_2=\frac{(-1)^2}{2\times2+1}=\frac{1}{5}$，

$a_3=\frac{(-1)^3}{2\times3+1}=-\frac{1}{7}$

所以数列的前 3 项为$-\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{7}$；

（2）$a_{18}=\frac{(-1)^{18}}{2\times18+1}=\frac{1}{37}$；

（3）设 $a_{2n}=\frac{1}{21}$ $\quad\therefore\quad \frac{1}{2\cdot2n+1}=\frac{1}{21}$

即 $\frac{1}{4n+1}=\frac{1}{21}$ 即 $4n+1=21$ $\quad\therefore\quad n=5$

故第 10 项是$\frac{1}{21}$.

【例题 2】 求下列各个数列的通项：

（1）$1,3,7,15,31,\cdots$；

（2）$-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\cdots$.

解 （1） $\because\ a_1=1=2^1-1$，$a_2=3=2^2-1$，$a_3=7=2^3-1$，$a_4=15=2^4-1$，$a_5=31=2^5-1$

$\therefore\quad a_n=2^n-1$；

（2） $\because\ a_1=-\frac{1}{2}=(-1)^2\frac{1}{1+1}$，$a_2=\frac{1}{3}=(-1)^2\frac{1}{2+1}$，

$a_3=-\frac{1}{4}=(-1)^3\frac{1}{3+1}$，$a_4=\frac{1}{5}=(-1)^4\frac{1}{4+1}$，

$a_5=-\frac{1}{6}=(-1)^5\frac{1}{5+1}$，

$$\therefore \quad a_n=(-1)^n\frac{1}{n+1}.$$

【例题 3】 某水泥厂生产水泥，今年是 5 万吨，由于技术改造，计划每年增产 15%，写出从今年开始，5 年内每年的产量排成的数列并写出通项公式．

解 $a_1=5$

$a_2=5+5\times0.15=5(1+0.15)=5\times1.15$

$a_3=5\times1.15+5\times1.15\times0.15=5\times1.15^2$

$a_4=5\times1.15^2+5\times1.15^2\times0.15=5\times1.15^3$

$a_5=5\times1.15^3+5\times1.15^3\times0.15=5\times1.15^4$

故该数列为

$$5,\ 5\times1.15,\ 5\times1.15^2,\ 5\times1.15^3,\ 5\times1.15^4$$

其通项公式为

$$a_n=5(1.15)^{n-1} \qquad (n\in N \quad n\leqslant4)$$

3. **数列的分类**

数列的形式多样，我们经常讨论的数列可分如下几类：

(1) 有穷数列与无穷数列

按数列的项数，有：若数列$\{a_n\}$的项数为有限个，则称数列$\{a_n\}$为**有穷数列**，如前面所举的数列③；若数列$\{a_n\}$的项数为无限个，则称数列$\{a_n\}$为**无穷数列**．如前面所举的数列①、②、④等．

(2) 递增数列和递减数列

比较数列前后项的大小，有：在数列$\{a_n\}$中，从第二项起，每一项都大于它的前一项，即 $a_{n+1}>a_n$，则称数列$\{a_n\}$为**递增数列**，如前面所举的数列①、②、④；在数列$\{a_n\}$中，从第二项起，每一项都小于它的前一项，即 $a_{n+1}<a_n$，则称数列$\{a_n\}$为**递减数列**，如前面所举的数列⑤；在数列$\{a_n\}$中，从第二项起，有些项小

于它的前一项，有些项又大于它的前一项，则称数列$\{a_n\}$为**摆动数列**，如前面所举数列⑥；各项都相等的数列，称为**常数数列**，如前面所举数列⑦. 也有的数列不属于这种分类的任何一种，如前面所举的数列③.

(3) 有界数列与无界数列

按数列所有项的绝对值的变化趋势，有：若数列$\{a_n\}$的任何一项的绝对值都小于某一正数 M，即$|a_n|<M(M>0)$，则称数列$\{a_n\}$为**有界数列**，如前面所举的数列③、④、⑤、⑥、⑦；如果没有这样的正数 M，即 M 不存在，则称数列$\{a_n\}$为**无界数列**，如前面所举的数列①、②.

练 习 一

1. 由已知通项，写出下面各数列的前 5 项：

(1) $a_n=-\frac{1}{n}$；　　(2) $a_n=(-1)\frac{1}{2n}$；

(3) $a_n=(-1)^n\frac{1}{3^n+1}$；　　(4) $a_n=10(n+1)$；

(5) $a_n=0.1^n$；　　(6) $a_n=2\cdot 10^n$；

(7) $a_n=5$.

2. 写出由 $\sqrt{2}$ 精确到 1，0.1，0.01，0.001，0.0001 的过剩近似值组成的数列的前 5 项.

3. 写出从元月开始，从小到大一年的各个月份的天数组成的数列(指平年).

4. 求下面数列的通项公式，并写出第 8 项：

(1) 从 1 开始，奇数的倒数而排成的数列；

(2) 前 5 项为 10，12，14，16，18；

(3) $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, …;

(4) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$,…

5. 判定下面各数列,哪些是有穷数列?哪些是无穷数列?哪些是有界数列? 哪些是无界数列? 哪些是递增数列? 哪些是递减数列?

(1) $\frac{1}{3}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{9}$,…$\frac{1}{3n}$,…;

(2) -3,-3,-3,-3,…,-3,…;

(3) 通项为 $a_n=\frac{1}{n^2}$;

(4) 通项为 $a_n=(2n-1)^3$;

(5) 3,2,1,0,5,7;

(6) $\sqrt{1}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{4}$,$\sqrt{5}$,…

二、 等差数列

1. 等差数列的定义

在生产实践和日常生活中,有这样一类应用广泛的特殊数列,从它的第二项起,每一项减去该项的前面一项的差都等于某一个常数,如数列:

$$2,5,8,11,14,\cdots \qquad ⑧$$

$$4,2,0,-2,-4,\cdots \qquad ⑨$$

从第二项起,它们的每一项与该项前面一项的差分别是常数 3 和 -2.

对于这类数列,有如下定义:

定义 如果数列

$$\{a_n\}:a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

从它的第二项起,每一项减去该项的前面一项的差都等于某一

常数 d. 那么,数列$\{a_n\}$叫做**等差数列**,常数 d 叫做等差数列的**公差**.

前面所举的数列⑧和⑨都是等差数列,它们的公差分别为 3 和 -2.

显然,常数数列可以认为是公差等于零的等差数列.

2. **等差数列的通项公式**

由等差数列的定义可知:

$$a_2=a_1+d$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

……

由此可得等差数列的通项公式为

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d} \qquad (1-1)$$

公式(1—1)表示了等差数列 a_1,d,n,a_n 四个量之间的关系.

由公式(1—1)可知:数列⑧的通项公式为

$$a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1 \quad 即 \quad a_n=3n-1;$$

数列⑨的通项公式为

$$a_n=4+(n-1)\times(-2)=6-2n \quad 即 \quad a_n=6-2n.$$

【例题 4】 已知等差数列前 3 项为

19, 14, 9

求它的通项公式和第 8 项.

解 $\because$ $a_1=19$, $d=14-19=-5$,

$\therefore$ $a_n=19+(n-1)\times(-5)=24-5n$

即 $a_n=24-5n$

取 $n=8$ 代入上式

得　$a_8=24-5\times8=-26.$

【例题 5】　等差数列 3,5,7,9,…的第几项是 21?

解　$\because$　$a_1=3$,　$d=5-3=2$,

$\therefore$　$a_n=3+2\times(n-1)=2n+1$

令　$2n+1=21$　　$\therefore$　$n=10$

即　该等差数列第 10 项是 21.

【例题 6】　已知等差数列的第 3 项是-4,第 6 项是 2,求它的第 15 项.

解　$\because$　$a_3=-4$,　由公式(1—1)

有　　$a_1+2d=-4$

又$\because$　$a_6=2$　由公式(1—1)

有　　$a_1+5d=2$

解方程组$\begin{cases}a_1+2d+4=0\\a_1+5d-2=0\end{cases}$

得　　$a_1=-8$,　$d=2$

故得　$a_{15}=-8+14\times2=20.$

【例题 7】　一个塔轮上有 5 个皮带轮(图 1—2),它们的直径成等差数列,已知最大的和最小的两个轮的直径分别是 216mm 和 120mm,求中间三个皮带轮的直径.

解　依题意

$a_1=120$　$a_5=216$

$\because$　$a_5=a_1+4d$

$$\therefore\quad d=\frac{a_5-a_1}{4}$$

$$=\frac{216-120}{4}=24$$

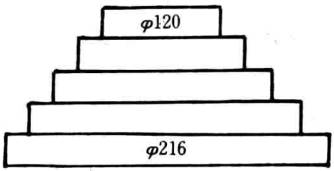


图 1—2

故有　$a_2=120+24=144$,

$a_3=120+2\times24=168$

$$a_4=120+3\times24=192$$

答:塔轮上中间三个皮带轮的直径分别是 144mm,168mm,192mm.

3. **等差中项**

定义 如果三个数 a,A,b 依次成等差数列,那么,A 叫做 a,b 的**等差中项**.

由等差数列的定义,显然有

$$A-a=b-A$$

则 $$2A=a+b$$

即 $$\boxed{A=\frac{a+b}{2}} \qquad (1-2)$$

公式(1—2)为等差中项公式.

等差数列中,从第二项起,每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前后相邻两项的等差中项.

【例题 8】 求$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$和$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$的等差中项.

解 由公式(1—2)

有 $$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. **等差数列的前 n 项和公式**

设等差数列$\{a_n\}$前 n 项和为 S_n,则

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

我们所考虑的不是逐项相加,而是用数列$\{a_n\}$的首项 a_1、末项 a_n 和项数 n,或者用首项 a_1、公差 d 和项数 n 来表示 S_n.

先看一个具体的例子,如图 1—3 所示,有一堆型号相同的钢管,共分 6 层,各层根数依次是 3,4,5,6,7,8(根),成等差数列,全部钢管数则为等差数列前 6 项的和

$$S_6=3+4+5+6+7+8=33\text{(根)}.$$

假设在原来的钢管旁倒置一堆同样大小的钢管(图 1—4)，则每一层钢管数为

$$3+8,4+7,5+6,6+5,7+4,8+3$$

它们都相等.

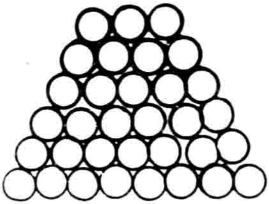


图 1—3

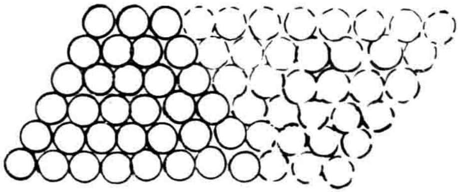


图 1 4

$$\therefore\quad 2S_6=6\times(3+8)$$

则 $$S_6=\frac{6\times(3+8)}{2}=33\text{(根)}$$

即为首项与末项的和乘以项数再除以 2.

一般地，有

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n \\ &= a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1-(n-2)d] \\ &\quad +[a_1+(n-1)d] \qquad (1) \end{aligned}$$

又 $$\begin{aligned} S_n &= a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1 \\ &= a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-2)d] \\ &\quad +[a_n+(n-1)d] \qquad (2) \end{aligned}$$

(1)＋(2)得

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n) \\ &\quad +(a_1+a_n) \\ &= n(a_1+a_n) \end{aligned}$$