高等学校教材

微积分学 第二版

上册

蔡燧林　吴正昌　孙海娜　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

微积分学 第二版

Weijifenxue

上册

蔡燧林 吴正昌 孙海娜 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是在第一版的基础上，根据“本科数学基础课程教学基本要求”修订而成。在修订过程中，作者在抽象思维能力、逻辑思维能力、空间想象能力、运算能力和运用所学知识分析解决问题能力等方面给予了重点训练。在材料处理上，作者从感性认识入手，上升到数学理论，突出重点，删去枝节和纯理论证明，降低难度，加强基本训练，对强化学生的数学思维很有帮助。

本书上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分学的基本定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、一元微积分学的补充应用、无穷级数等。

本书可作为高等学校工科类、经管类专业微积分课程教材，亦可供相关教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学. 上册 / 蔡燧林，吴正昌，孙海娜编著. --2版. --北京：高等教育出版社，2013.6

ISBN 978-7-04-037458-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①蔡…②吴…③孙… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 105814 号

策划编辑 王 强　责任编辑 张长虹　特约编辑 董达英　封面设计 于文燕
版式设计 童 丹　插图绘制 尹 莉　责任校对 张小镝　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京市密东印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 20.75
字　　数 380千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2008年2月第1版
　　　　 2013年6月第2版
印　　次 2013年6月第1次印刷
定　　价 30.40元

物 料 号 37458-00

第二版修改说明

1. 在第一版的基础上，进一步淡化 ε-N 与 ε-δ 的论述，只保留用它们来证明某些必不可少的最基本的定理。

2. 加强计算，对于一些重要的不易掌握的计算，用一定的篇幅给予小结，以利学生学习。

3. 函数展开成幂级数，一般只在收敛区间内讨论。

4. 增删或修改了一些例子。

5. 本书修改之后，仍保持原书简洁、严谨的风格，满足工科类及经管类本科专业对高等数学教学的要求。

参加本次修改的有蔡燧林，吴正昌，孙海娜。

编　者

2013 年元月

第一版前言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，它有极丰富的内涵与外延。高等学校里学习数学，已被人们公认为，不仅是为了掌握一种工具，增长知识，更重要的是培养一种思维模式，提高文化素养。能否用数学的思维、方法去思考、推理以及定量分析一些自然现象和经济现象，是衡量民族科学文化素质的重要标志，数学教育在培养高素质人才中有不可替代的重要作用。一条定理、一个公式可以忘记，但是数学思维的训练却受益终生。

微积分是高等学校工科类专业、经管类专业一门重要的数学基础课。2003年，"教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会"制订了《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，我们根据这个《基本要求》，并参照《工学、经济学、管理学全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》进行适当取舍，编写了这本微积分教材。在本教材中，我们力求在抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题解决问题的能力五个方面，给予足够的重视与训练。在材料处理上，做到突出重点，删去枝节，减少篇幅，让教师有发挥的余地。并考虑到不同类型、不同层次的学校与不同专业的需要，我们采取灵活的编写方式，使得对某些部分的取舍，不影响后续内容的讲授。教材中个别内容用小字排印，可供选学。

读者将会看到，在本书中，我们淡化 ε-N 与 ε-δ 的论证，而较多地培养学生对极限的感性认识和作用，尽早接触极限的运算；鉴于目前中学教科书中的情况，我们充实了参数方程与极坐标，基本上做到从头讲起；增设处理不等式问题与零点问题的方法，以培养学生利用微积分解决这类问题的能力；对于泰勒公式，我们采取了自成一体独立一节的编写方式，既可严格地讲授泰勒公式，又可不讲它而照样能讲其他内容；强调基本积分方法的训练，淡化特殊积分技巧，删去有理函数积分的一般论述；多元函数积分学突出的是让学生掌握分割加细的极限过程，不拘泥于定义中一些细节的描述，主要的是着重于一些常用方法的讲授与训练；本书配置了丰富的例题并有较详尽的分析，以便学生加深对内容的理解，并有利于学生练习；书中还介绍了弹性、边际、差分与一阶差分方程等有关内容，可供经济类专业学生参考。

本书可作为普通高等院校工科类专业、经济类专业与管理类专业教学用书，可以按照各自的基本要求取舍内容。

本书自始至终得到浙江大学宁波理工学院院领导的支持和关怀，并得到该

院的经费资助;郑云秋、徐忠明两位老师详细阅读了本书原稿,并提出不少修改意见;孙海娜、余琛妍两位老师认真演算、校正了本书的习题;宁波理工学院数学老师在使用本书的过程中,提出了许多有益的见解,编者在此一并向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,诚恳希望使用此书的同行,能及时指出书中存在的问题,以便改正。

编　　者

于浙江大学宁波理工学院

浙 江 大 学 求 是 村

郑重声明

目　录

1

第一章　函　　数

事物与事物之间的关系，反映到量上，常常涉及函数这一概念. 函数是高等数学讨论的主要对象. 中学阶段已初步介绍过函数概念与一些初等函数的性质，本章复习这些知识并进一步对函数进行讨论. 在以后各章，无论从表示方法还是研究方法上，都将进一步发展函数的知识.

§1.1　函 数 概 念

一、实数与实数集

1. 实数与数轴

本书所用到的数，除特别声明者外，指的都是实数. 例如，对于方程 $x^2+1=0$，如无另外声明，就认为无解.

实数的分类如下表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正、负整数与零}\\ \text{正、负分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\text{（无限的不循环小数）}\end{cases}$$

实数集记为 $\mathbf{R}$，正、负实数集分别记为 $\mathbf{R}^+$ 与 $\mathbf{R}^-$. 整数集记为 $\mathbf{Z}$，正、负整数集分别记为 $\mathbf{Z}^+$ 与 $\mathbf{Z}^-$. 可表示为$\dfrac{p}{q}$的数称**有理数**，其中 $p,q\in\mathbf{Z}$ 且互质，$q\neq 0$. 当 $q=1$时就成为整数. 有理数集记为 $\mathbf{Q}$.

实数与数轴上的点构成一一对应，故常将实数 x 对应的点称为点 x，对应于有理数的点称有理点. 任意两个不相等的有理点之间仍有有理点. 例如，设 $x_1=\dfrac{p_1}{q_1}\in\mathbf{Q}$，$x_2=\dfrac{p_2}{q_2}\in\mathbf{Q}$，$x_1\neq x_2$，则 $x_3=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ 介于 x_1 与 x_2 之间，且

$$x_3=\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{2q_1q_2}\in\mathbf{Q},$$

所以有理点在数轴上是稠密的. 但数轴并不被有理点所填满，有理点与有理点之间还有空隙，例如$\sqrt{2}$，π 都是无理数，对应的点称无理点. 可以证明，任意两有理点之间必有无理点，无理点与有理点填满了数轴.

2. 实数的绝对值

实数的绝对值是高等数学中经常用到的概念，定义如下：设 $x\in\mathbf{R}$，定义 x 的**绝对值**

$$|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

从几何上讲，$|x|$ 表示点 x 与原点的距离. 设 $x\in\mathbf{R}$，$y\in\mathbf{R}$，容易证明：$|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

实数的绝对值有下述性质：

(1) $|x|\geqslant 0$. $|x|=0$ 的充分必要条件是 $x=0$.

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(3) 设 $a>0$，则 $|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$.

(4) 设 $a>0$，则 $|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$.

由上述(1)～(4)，可推出关于 $|x-A|$ 的性质. 例如，设 $\delta>0$，则 $|x-A|\leqslant\delta$ 的充分必要条件是 $A-\delta\leqslant x\leqslant A+\delta$；类似地有：设 $\delta>0$，则 $|x-A|<\delta$ 的充分必要条件是 $A-\delta<x<A+\delta$.

实数的绝对值还有下述四则运算性质：

(5) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$.

(6) $|x-y|\geqslant ||x|-|y||\geqslant |x|-|y|$.

(7) $|xy|=|x||y|$.

(8) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ $(y\neq 0)$.

以上 8 条性质的证明均略.

3. 区间与邻域

区间是实数集中常用的一类子集，定义如下：

设 a 与 b 是两个实数，并设 $a<b$，集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称**开区间**，记为

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

（平面 xOy 上坐标为 $x=a$，$y=b$ 的点也表示为(a,b)，由上、下文可以区分它们）.

类似地定义

　　闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，

　　半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，

　　无穷区间 $(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$，

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$，

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

这里，方括号“[”或“]”与圆括号“(”或“)”不能混淆，前者包含相应的端点，后者则不包含. 将来会看到，它们有显著的区别. “∞”不是数，所以只能用圆括号.

如果不必区分是开区间，闭区间，还是半开区间或是无穷区间，则常用记号 I 表示之.

邻域也是一个常用的概念. 设 $\delta>0$，集合

$$U_\delta(x_0)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$$

即

$$U_\delta(x_0)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

称为 $x=x_0$ 的 δ **邻域**，δ 称为**邻域的半径**. 如果不必说及邻域的半径 δ 的大小，则简记为 $U(x_0)$，称为 $x=x_0$ 的某邻域.

集合

$$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

即

$$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta,x\neq x_0\},$$

称为 $x=x_0$ 的**去心 δ 邻域**. 类似地也有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及名称.

如果有必要再仔细区分的话，那么可定义：

$x=x_0$ 的左半 δ 邻域为 $\{x\mid x_0-\delta<x\leqslant x_0\}$，

$x=x_0$ 的右半 δ 邻域为 $\{x\mid x_0\leqslant x<x_0+\delta\}$，

$x=x_0$ 的左半去心 δ 邻域为 $\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\}$，

$x=x_0$ 的右半去心 δ 邻域为 $\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\}$.

例如，对于开区间 (a,b)，设 $x_0\in(a,b)$，必存在相应的 $\delta>0$，使 $U_\delta(x_0)\subset(a,b)$. 但对于闭区间 $[a,b]$，在其端点 $x=a$ 处，存在 $\delta>0$，只能使 $x=a$ 的右半邻域包含于 $[a,b]$；而不论 $\delta>0$ 多么小，$x=a$ 的左半邻域总不可能包含于 $[a,b]$ 了. 对于 $[a,b]$ 的 $x=b$ 处亦类似. 这种虽是微细的区别，但在高等数学的概念中却是十分重要的区别.

二、函数及其表示法

1. 变量与常量

在考察客观世界某一运动过程时,会遇到各种各样的量.有的量在所研究的过程中保持恒定的数值,这种量称为**常量**;有的量在过程中可取不同的数值,这种量称为**变量**.例如一架客机在从北京飞往杭州的过程中,飞机与北京的水平距离及飞行高度,油箱中的储油量,都是变量,而机中的乘客数及飞机的长度是常量.而当飞机到达机场熄火停机,在旅客下机的过程中,飞机与北京的水平距及飞机离地面的高度,油箱里的储油量都是常量,而在机中乘客数为变量.又如观察大大小小许多不同的圆时,圆的半径是变量,但不论哪个圆,它的圆周长与半径的比恒等于 2π,是一个常量.可见常量与变量是相对于某一过程而言的,离开了过程去谈常量变量不但毫无意义,而且往往要犯概念上或计算上的错误.本书中,变量一般用 $x,y,t,\cdots$ 表示,常量一般用 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示.

2. 函数的定义

在同一过程中,往往有几个不同的变量在同时变化着,这些变量的变化不是孤立的,而是彼此联系着的.看几个例子.

例 1 考察自由落体运动.设以地面为坐标原点,垂直向上为正向,开始运动的时刻记为 $t=0$,起始时刻相应的位置坐标 $s=s_0(s_0>0)$,则于时刻 t 时,

$$s = s_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\frac{2s_0}{g}}\right),$$

其中 g 为重力加速度.当 s_0 不大时,g 可作为常数.对于闭区间 $\left[0,\sqrt{\frac{2s_0}{g}}\right]$ 上的任意一个 t 值,可以确定相应的唯一的 s 值.

例 2 信函的质量与应付邮资的关系.根据现行规定,寄往国内的外埠平信其质量不超过 100 g 时,每 20 g 的资费为 1.2 元,尾数不足 20 g 以 20 g 计;超过 100 g 时,超过部分每 100 g 的资费为 2 元,尾数不足 100 g 以 100 g 计,每件至多为 2 000 g.试列出资费 s(元)与信函质量 p(g)之间的关系.

解 将区间 $(0,100]$ 分成 5 段,分别为 $(0,20],(20,40],\cdots,(80,100]$.将区间 $(100,2\,000]$ 分成 19 段,为 $(100,200],(200,300],\cdots,(1\,900,2\,000]$.于是可写出 s 与 p 之间的关系为

$$s=\begin{cases}1.2n, & \text{当 } 20(n-1)<p\leqslant 20n\ (n=1,2,\cdots,5),\\ 6+2(n-5), & \text{当 } 100(n-5)<p\leqslant 100(n-4)\ (n=6,7,\cdots,24).\end{cases}$$

对于区间 $(0,2\,000]$ 内每一确定的 p,有唯一确定的 s 与之对应.

例 3 某气象站用自动记录仪器记下一昼夜气温的变化规律,如图 1-1. 它形象地表示出气温 T 与时间 t 的关系. 从时间 $t=0$ 到 $t=24$(小时)这个范围内,对于每一个确定的时间 t(横坐标),通过这条气温曲线所示的规律,有唯一确定的气温T(℃)(纵坐标)与之对应.

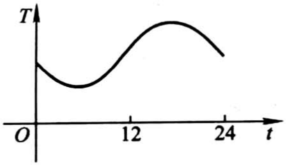

图 1-1

以上各例概括出来是,有两个变量,其中一个变量在一个非空的实数集内每取一个确定的值,按照一定规则,另一变量相应地有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数关系.

定义 1.1 设有两个变量 x 与 y,X 是一个非空的实数集. 若存在一个对应规则f,使得对于每一个 $x\in X$,按照这个规则,y 有唯一确定的值与 x 对应,则称f 是定义在 X 上的一个**函数**,x 称为**自变量**,X 称为函数 f 的**定义域**,y 称为**因变量**. 函数f 在 $x\in X$ 处对应的 y 的值,称为**函数值**,记为

$$y=f(x),\quad x\in X. \tag{1.1}$$

函数值所组成的集合,常记为 Y.

$$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 f 的**值域**. □

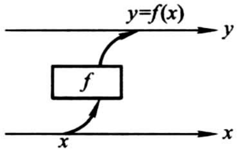

图 1-2

关系式(1.1)表达了因变量 y 随自变量 x 的变化而变化的规律,所以可以通过 y 即 $f(x)$ 来研究函数f. f 是抽象的,而$f(x)$是具体的,今后在本书中,也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数,并且用它来讨论函数 f 的性态.

上面 3 个例题都是函数的例子. 例 1 是用一个解析式表示的函数. 例 2 是当自变量在不同的范围内,用不同的解析式表示,但仍是一个函数而不是几个函数. 一般,在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数,称为**分段函数**. 分段函数仍是一个函数,而不能说是几个函数. 例 3 虽没有解析式,但合乎函数的定义,所以它也是一个函数. 函数与有无解析式,在定义域的不同范围内是用一个式子还是不同式子表达是无关的.

由函数定义可见,当且仅当$f(x)$与 $g(x)$的定义域相同,并且对应关系也相同时,这两个函数才相等,可视为同一函数:

$$f(x)\equiv g(x).$$

例如,$f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg|x|$ 相等,但 $f(x)$与函数 $h(x)=2\lg x$ 的定义域不同,故它们不是同一函数. 若将定义域限制于区间$(0,+\infty)$,则有

$$f(x)\equiv h(x).$$

如果一个函数是用一个解析式表示，并且没有另外说明它的定义域，那么使这个解析式有意义的范围，就认为是该函数的定义域.

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ 的定义域.

解 $\sqrt{2+x}$ 的定义域是 $\{x\mid x\geqslant -2\}$. $\lg(1-x)$ 的定义域是 $\{x\mid x<1\}$. 但 $\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ 的分母应不为零，故 $\{x\mid x\neq 0\}$. 以上三个数集的交

$$\{x\mid x\geqslant -2\}\cap\{x\mid x<1\}\cap\{x\mid x\neq 0\}$$
$$=\{x\mid -2\leqslant x<1,x\neq 0\}$$

即为所求函数的定义域.

例 5 设 $f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$，其中 $a>0,a\neq 1$. 求 $f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $f(-x)=\log_a(\sqrt{1+(-x)^2}-x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=\log_a\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$$

$$=-f(x),\qquad x\in\mathbf{R}.$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\log_a\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\begin{cases}\log_a(\sqrt{1+x^2}+1)-\log_a x, & x>0,\\ \log_a(\sqrt{1+x^2}-1)-\log_a(-x), & x<0.\end{cases}$$

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3-x}, & -2\leqslant x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2-x)$，$f(x-2)$.

解 $f(-1)=\sqrt{3-(-1)}=2$. $f(0)=0^2=0$.

$$f(2-x)=\begin{cases}\sqrt{3-(2-x)}, & -2\leqslant 2-x<0,\\ (2-x)^2, & 0\leqslant 2-x\leqslant 2,\end{cases}$$

即

$$f(2-x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & 2<x\leqslant 4,\\ x^2-4x+4, & 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$f(x-2)=\begin{cases}\sqrt{3-(x-2)}, & -2\leqslant x-2<0,\\ (x-2)^2, & 0\leqslant x-2\leqslant 2,\end{cases}$$

即

$$f(x-2)=\begin{cases}\sqrt{5-x}, & 0\leqslant x<2,\\ x^2-4x+4, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

例 7 设 $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x^2$,求 $f(x)$,写出 $f(x)$ 的定义域,并计算 $f(0)$,$f(-1)$.

解 令 $u=\dfrac{x-1}{x+1}$,从而 $x=\dfrac{1+u}{1-u}$,于是

$$f(u)=\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2,\quad f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2.$$

定义域是 $x\in\mathbf{R}$,$x\neq 1$. $f(0)=1^2=1$. $f(-1)=0^2=0$.

3. 几个常用的函数及其图像

所谓函数 $y=f(x)\,(x\in X)$ 的图像,是指 xOy 平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}.$$

由于 X 中的每一个 x_0,有且仅有一个 $y_0=f(x_0)$ 与之对应,所以与 y 轴平行的直线 $x=x_0\,(x_0\in X)$,与 $y=f(x)$ 的图像必相交,且仅交于一点 (x_0,y_0).

下面举几个常用的函数及其图像的例子.

例 8 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其图像如图 1-3.

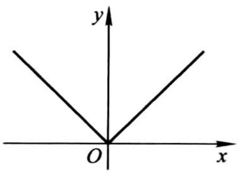

图 1-3

例 9 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它表示 x 的符号,故称**符号函数**. 其图像如图 1-4. 显然有

$$|x|=x\operatorname{sgn}x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$