学与考课堂同步

高中数学

（高三冲刺）

北京海淀教师进修学校教师主编

东北师范大学出版社

学与考课堂同步

高中数学

高三冲刺

北京海淀教师进修学校教师主编

1-3

10

东北师范大学出版社

(吉)新登字 12 号

主　编　海　浩
编　委　满雅丽　肖玉珍　韩素兰　邓　钧
　　　　施文雪　陈淑明　吴修媛　赵志汉
　　　　陈忠虎　马淑英　樊　福

学与考课堂同步
高中数学
高三冲刺
北京海淀教师进修学校教师主编

责任编辑:吴长安　　封面设计:众　志　　责任校对:晓　石

东北师范大学出版社出版　　东北师范大学出版社发行
(长春市斯大林大街 110 号)　　长春长空印刷厂制版
(邮政编码:130024)　　长春市全安印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/16　　1994 年 4 月第 1 版
印张:15.625　　1994 年 4 月第 1 次印刷
字数:371 千　　印数:0 001 — 6 000 册

ISBN 7-5602-1097-X/G · 495　　定价:8.60 元

出版说明

《学与考课堂同步》是由国家中小学考试权威刊物《考试》杂志编委、北京海淀教师进修学校特高级教师组成的编辑委员会组织编写的。共 76 册，其中高中 25 册、初中 27 册、小学 24 册。

本丛书依据国家教委颁布的新大纲，与统编的最新教材配套，其作者以北京海淀教师进修学校教师为主体，因此，本丛书与同类书比较，具有以下几个突出的优点：

Δ**最　新**　本丛书发挥了作者的地域优势，最先获得了有关的最新教材，并以此为依据编写，富有新意和领先性。

Δ**最权威**　本丛书的作者为北京海淀教师进修学校和北京几所名牌中小学的著名教师。这充分保证了本丛书在深浅程度上、应知应会的范围上、训练的题量上都与正式考试取得一致。

Δ**条块有机结合**　"条"，是指单元试卷和期中、期末综合练习；"块"是指新授内容全部结束后复习阶段的归类复习。条块有机结合精选试题，是一种新尝试，既考虑到教学过程各知识点的同步掌握，又兼顾到系统归纳促进知识转化为能力。

Δ**突出重点**　本丛书力求通过丰富多样的形式加大试题的覆盖面，在每册书的各部分内容中，针对重点、难点，安排了多重训练。

Δ**题型丰富灵活**　就每份练习而言，试题的编排做到了由易到难，循序渐进；就每册书而言，综合练习并不是"单元练习"的同项合并，而是前面知识重点难点的综合与提高；就整套书而言，体现了一种合理而又科学的梯度。此外，对于重点、难点知识的训练，尽量注意变化题型，从不同的角度进行复习测试，以使学生们灵活地掌握知识。

出版者

目　录

代　数

三　角

解析几何

立体几何

代　　数

第一章　函　　数

一　集合与映射

应知应会

1. 集合表示法：列举法、描述法、特殊的情况下也用韦氏图表示。对于连续的实数集合也可以用区间表示．

2. 两种关系：

元素与集合之间的关系通常用“$\in$”或“$\notin$”.

集合与集合之间的关系通常用“$\subset$”“$\subseteq$”“$\supset$”“$\supseteq$”“$=$”“$\neq$”.

3. 关于集合的简单运算：求 $A\cap B$、求 $A\cup B$、当全集为 I 时，求 $\overline{A}$.

重要的运算性质有：

$A\cap B=B\cap A$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$

$A\cup B=B\cup A$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup A=A$

$\overline{\overline{A}}=A$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

4. 映射与一一映射

已知集合 A，集合 B，从 A 到 B 的对应法则 f？

①按照法则 f，A 中每个元素在 B 中都有对应元素．

②按照法则 f，A 中每个元素在 B 中的对应元素是唯一的．

③按照法则 f，A 中不同的元素在 B 中的对应元素不同．

④按照法则 f，B 中每个元素都是 A 中某个元素的对应元素．

满足①②的对应叫 A 到 B 的映射．

满足①②③的对应叫 A 到 B 上的映射．

满足①②③④的对应叫 A 到 B 上的一一映射．

5. 一一映射 $f:A\to B$ 存在逆映射 $f^{-1}B\to A$

疑点难点

在集合的表示法中通常用描述法与列举法，对于描述法，一定要注意规范的写法．

只有连续的实数区间才可以用区间，比如集合$\{1,2,3,4\}$不能表示成$[1,4]$.

解题思路与方法

例 1　(1)设 $I=\{x\mid x=\frac{1}{2^n},n\in N\}$，$A=\{x\mid x=\frac{1}{2^{2n}},n\in N\}$，$B=\{x\mid x=\frac{1}{2^{3n}},n\in N\}$，　求 $\overline{A}$，$A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$.

(2)设 $A=\{y\mid y=x^2,x\in R\}$　$B=\{y\mid y=1-\sqrt{x},x\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

解：(1)$\because N=\{2n\}\cup\{2n-1\}$(其中 $n\in N$)

$\therefore \overline{A}=\{x|x=\frac{1}{2^{2n-1}},n\in N\}$

$\because$ 自然数都可以表示为 $6K,6K-1,6K-2,6K-3,6K-4,6K-5$ 的形式之一，$(K\in N)$，其中 $6K,6K-2,6K-4$ 是正偶数，$6K-3$ 是能被 3 整除的自然数.

$\therefore A\cup B=\{x|x=\frac{1}{2^t},t=6K,6K-2,6K-3,6K-4,K\in N\}$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{x|x=\frac{1}{2^t},t=6K-1,6K-5,K\in N\}$

(2) $\because y=x^2(x\in R)$ 的值域是 $y\geqslant 0$.

$y=1-\sqrt{x}\,(x\geqslant 0)$ 的值域是 $y\leqslant 1$.

$\therefore A=\{y|y=x^2,x\in R\}=[0,+\infty)$

$B=\{y|y=1-\sqrt{x},x\geqslant 0\}=(-\infty,+1]$

$\therefore A\cap B=[0,1]$

$A\cup B=R$

例 2　已知 $A=\{x|x^3-px^2+\pi x=0\}$，$B=\{x|x^3-(e+i)x^2+qx=0\}$，$A\cup B=\{0,1,i,e,\pi\}$，求 p、q、A、B.

解　$x^3-px^2+\pi x=0$ 的解为 $0,x_1,x_2$，.

$x^3-(e+i)x^2+qx=0$ 的解为 $0,x_3,x_4$，

由根与系数关系

$x_1+x_2=P,x_1x_2=\pi,x_3+x_4=e+i,x_3x_4=q$

$\because$　x_1,x_2,x_3,x_4 只能分别取四个数 $1,i,e,\pi$，

$\therefore$　只能 $x_1=1,x_2=\pi,x_3=e_1,x_4=i$

$\therefore$　$P=1+\pi$，　　　　$q=e+i$

$A=\{0,1,\pi\}$　　　　$B=\{0,e,i\}$.

例 3　(1)已知 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$　$B=\{b_1,b_2,b_3\}$ 那末可以建立 A 到 B 的不同的映射多少个？可以建立 A 到 B 上的一一映射多少个？

(2)如果在映射 f 的作用下，实数对 (x,y) 的象是实数对 $(x+y,x-y)$，那么这个映射是否存在逆映射？如果存在，写出其逆映射.

解(1)按照映射的定义，A 中每个元素在 B 中都有对应元素，其对应法则可以分三步进行，第一步先确定 a_1 的对应元素，有 3 种不同方法，第二步确定 a_2 的对应元素，仍有 3 种不同方法，第三步确定 a_3 的对应元素，仍有 3 种不同方法.

根据乘法原理，从 A 到 B 建立映射，其法则可以有 $3\times3\times3=27$ 种不同的方法. 所以可以建立 A 到 B 的不同的映射 27 个.

按照一一映射的定义，A 中不同元素在 B 中对应元素不同，所以可以建立 A 到 B 上的不同的一一映射有 $P_3^3=6$ 个.

(2)如果有两个不同的实数对 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$x_1=x_2$ 与 $y_1=y_2$ 不能同时成立，在 f 的作用下，它们的象分别是 (x_1+y_1,x_1-y_1)，(x_2+y_2,x_2-y_2) 肯定不相同，否则将有

$$\begin{cases}x_1+y_1=x_2+y_2\\x_1-y_1=x_2-y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}\text{与前提矛盾.}$$

又如果已知实数对 (u,v)，总可以找到实数对 $(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})$ 是 (u,v) 的原象.

所以这个映射是一一映射，存在逆映射，其逆映射的法则 f^{-1}，使实数对 (u,v) 的象是实数

对$(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2})$

二　函数及其性质

应知应会

1. 对于映射 $f:A-B$，如果①A、B 都是数集，②B 中每个元素在 A 中都有原象，那么这个映射就是函数. 函数的三要素是定义域 A，值域 B 及对应法则 f.

2. 当确定函数 $y=f(x)$的映射 $f:A\to B$ 是一一映射时，其存在反函数 $y=f^{-1}(x)$.

3. 会求函数的定义域、值域、最大值或最小值，会根据定义判断函数的奇偶性及单调性.

4. 会求复合函数的定义域及单调区间

疑点难点

1. 注意互为反函数的两个函数的关系：$y=f(x)$的定义域是 $y=f^{-1}(x)$的值域，$y=f(x)$的值域是 $y=f^{-1}(x)$的定义域. 在求反函数时，必须根据原来函数的值域确定其定义域.

2. 对于复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，设 $t=\varphi(x)$，如果 $x\in[x_1,x_2]$时，$t=\varphi(x)$是增函数(或减函数)，在相应的区间$[t_1,t_2]$上 $y=f(t)$也是增函数(或减函数)，那么复合函数 $y=f([\varphi(x)]$在$[x_1,x_2]$上是增函数；如果 $x\in[x_1,x_2]$时 $t=\varphi(x)$是增函数(或减函数)，在相应的区间$[t_1,t_2]$上 $y=f(t)$是减函数(或增函数)，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在$[x_1,x_2]$上是减函数.

3. 求函数值域的方法一般有观察法、配方法、判别式法、换元法、利用不等式定理等等，特别是对于给定闭区间上的二次函数的值域的讨论尤为重要。

解题方法与思路

例 1　求以下函数的反函数

(1)$y=2x^2-4x+1\quad(x<0)$　　(2)$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}\quad(x\in R)$

解(1)先从 $y=2x^2-4x+1$ 中反解出 x

$\because\quad y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$

$\therefore\quad (x-1)^2=\frac{y+1}{2}$

又$\because x<0$，$\therefore x-1<0$

$\therefore\quad x-1=-\sqrt{\frac{y+1}{2}}$

$\therefore\quad x=1-\sqrt{\frac{y+1}{2}}$

$\therefore\quad y=2x^2-4x+1$ 的反函数表达式为　$y=1-\sqrt{\frac{x+1}{2}}$

又$\because$当 $x<0$ 时，$y=2(x-1)^2-1$ 的值域是 $y>1$

$\therefore$　其反函数定义域为 $x>1$

$\therefore\quad y=2x^2-4x+1$ 的反函数是

$y=1-\sqrt{\frac{x+1}{2}}\quad(x>1)$

(2)$\because y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

$\therefore \dfrac{y+1}{1-y}=e^x$

$\therefore x=\ln \dfrac{1+y}{1-y}$

又 $\because y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

$\therefore 0<\dfrac{2}{e^x+1}<2$

$\therefore -1<y<1$

$\therefore y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数是

$$y=\ln \frac{1+x}{1-x} \qquad (-1<x<1)$$

例 2　判断以下函数的奇偶性.

(1) $y=x+\lg \dfrac{a-x}{a+x}$　　(2) $y=\dfrac{x}{a^x-1}$　$(a>0, a\neq 1)$

(3) $y=\sqrt{3-x^2}+\dfrac{9}{1+|x|}$

分析"函数的定义域是关于原点对称的区间是函数为奇函数或偶函数"的必要条件，所以在判断函数奇偶性时首先要求其定义域。

(1) $y=x+\lg \dfrac{a-x}{a+x}$的定义域：

$\dfrac{a-x}{a+x}>0 \Rightarrow \dfrac{x-a}{x+a}<0 \Rightarrow -|a|<x<|a|$

又$\because f(-x)=-x+\lg \dfrac{a+x}{a-x}=-x-\lg \dfrac{a-x}{a+x}=-f(x)$

$\therefore y=x+\lg \dfrac{a-x}{a+x}$是奇函数.

(2) $y=\dfrac{x}{a^x-1}$的定义域为 $x\neq 0$

又$\because f(-x)=\dfrac{-x}{a^{-x}-1}=\dfrac{-x}{\dfrac{1}{a^x}-1}=\dfrac{xa^x}{a^x-1}$

$f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$

$\therefore y=\dfrac{x}{a^x-1}$是非奇非偶函数

(3) $y=\sqrt{3-x^2}+\dfrac{9}{1+|x|}$的定义域

$\begin{cases} 3-x^2\geqslant 0 \\ |x|\neq -1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant \sqrt{3}$

又$\because f(-x)=\sqrt{3-(-x)^2}+\dfrac{9}{1+|-x|}=f(x)$

$\therefore y=\sqrt{3-x^2}+\dfrac{9}{1+|x|}$是偶函数.

例 3　讨论函数 $y=\dfrac{ax}{x^2-1}$的单调性，并写出它的单调区间. $(a<0)$

解：　函数的定义域为 $x\neq -1, 1$.

在定义域内任取 $x_1<x_2$

$$y_1-y_2=\frac{ax_1}{x_1^2-1}-\frac{ax_2}{x_2^2-1}=\frac{ax_1x_2^2-ax_1-ax_1^2x_2+ax_2}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

$$=\frac{a(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

当 $x_1>1, x_2>1$ 时，$x_2-x_1>0, x_1x_2+1>0, x_1^2-1>0, x_2^2-1>0$

$\therefore y_1<y_2$

$\therefore (1,+\infty)$是递增区间.

当 $x_1<-1, x_2<-1$ 时，$x_2-x_1>0, x_1x_2+1>0, x_1^2-1>0, x_2^2-1>0$

$\therefore y_1<y_2$

$\therefore (-\infty,-1)$是递增区间

当 $0\leqslant x_1<1, 0<x_2<1$ 时，$x_2-x_1>0, x_1x_2+1>0, x_1^2-1<0, x_2^2-1<0$

$\therefore y_1<y_2$

$\therefore (0,1)$是递增区间

当$-1<x_1<0, -1<x_2\leqslant 0$ 时，$x_2-x_1>0, x_1x_2+1>0, x_1^2-1<0, x_2^2-1<0$

$\therefore y_1<y_2$

$\therefore [-1,0]$是递增区间.

$\therefore$该函数的递增区间为$(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$

例 4　已知 $x>0$ 时，$f(x)=1-|x-1|$，且 $f(x)$是奇函数，求 $x<0$ 时，$f(x)$的表达式？

解　$\because$　$x<0$

$\therefore -x>0$

$\because$　当 $x>0$ 时，$f(x)=1-|x-1|$

$\therefore$　$f(-x)=1-|-x-1|=1-|x+1|$

又　$\because$　$f(x)$是奇函数

$\therefore$　$f(x)=-f(-x)=|x+1|-1$

$\therefore$　当 $x<0$ 时，$f(x)$的表达式是 $f(x)=|x+1|-1$

例 5　已知 $x\in[0,1]$，$f(x)=x^2+(2-6a)x+3a^2$，试求 $f(x)$的最小值 $g(a)$？

解　$f(x)=x^2+(2-6a)x+3a^2$

$=[x-(3a-1)]^2-(6a^2-6a+1)$

其对称轴为 $x=3a-1$

下面分三种情况讨论：

(1)当 $0\leqslant 3a-1\leqslant 1$，　即：$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$时，对称轴在其定义域内，$f(x)$的最小值为$-(6a^2-6a+1)$

(2)当 $3a-1>1$，　即：$a>\frac{2}{3}$时，对称轴在定义域区间$[0,1]$的右边，则 $f(x)$在$[0,1]$上是减函数，因而 $f(x)$的最小值为 $f(1)=3a^2-6a+3$.

(3)当 $3a-1<0$ 即 $a<\frac{1}{3}$时，对称轴在区间$[0,1]$的左边，因而 $f(x)$的最小值为 $f(0)=3a^2$.

综上所述，$f(x)$的最小值 $g(a)$为

$$g(a)=\begin{cases}3a^2 & (a<\frac{1}{3})\\ -6a^2+6a-1 & (\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3})\\ 3a^2-6a+3 & (a>\frac{2}{3})\end{cases}$$

三　幂函数、指数函数、对数函数

应知应会

1. 幂函数：定义——形如 $y=x^\alpha$ 的函数（其中 α 是常数，x 是自变量）.

幂函数的定义域、值域、单调性、奇偶性要视指数 α 的情况而定.

2. 指数函数：定义——形如 $y=a^x$ 的函数（其中 a 是不等于 1 的正常数，x 是自变量）.

指数函数的单调性要视 a 的情况而定.

3. 对数函数：定义——$y=a^x$ 的反函数叫对数函数.

对数函数的单调性要视 a 的情况而定.

4. 应用幂函数、指数函数、对数函数的性质比较大小，解指数方程、对数方程，解指数不等式与对数不等式.

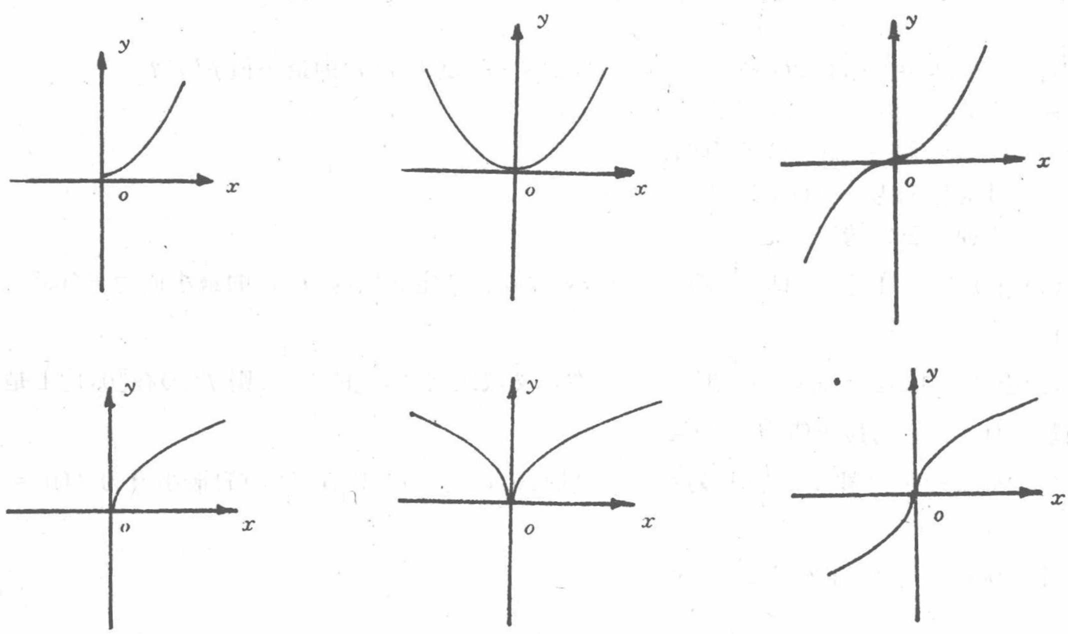
疑点难点

1. 幂函数 $y=x^\alpha$ 的类型大致有以下几类：

(1) $\alpha>0$，　1° $\alpha>1$　2° $0<\alpha<1$　3° $\alpha=1$

(2) $\alpha<0$

不同的类型的幂函数呈现出不同的性质. 其图象呈现不同的特征，如图 1－1



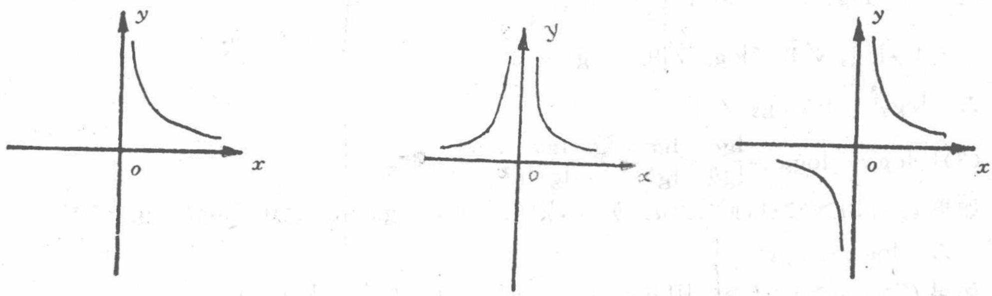


图 1－1

2. 比较大小时，一般地说，首先判断函数类型，其次看自变量的范围，然后根据函数的增减性定大小。

解题思路与方法

例 1　设 $f(x)=(m-1)x^{m^2-2}$，当 m 取何实数值时，$f(x)$

(1)是正比例函数？反比例函数？

(2)在第一象限是增函数

(3)当 m 取什么整数时，$f(x)$是偶函数.

解(1)正比例函数形如 $y=kx$，反比例函数形如 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$

$\therefore$ 当 $\begin{cases} m^2-2=1 \\ m-1\neq 0 \end{cases}$ 即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时，$f(x)$是正比例函数

当 $\begin{cases} m^2-2=-1 \\ m-1\neq 0 \end{cases}$ 即 $m=-1$ 时，$f(x)$是反比例函数

(2)当 $\begin{cases} m^2-2>0 \\ m-1>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m^2-2<0 \\ m-1<0 \end{cases}$

即 $m>\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}<m<1$ 时，$f(x)$在第一象限是增函数

(3)当 m^2-2 为偶数，

$\therefore m^2$ 是偶数，即 m 是偶数时，$f(x)$是偶函数.

例 2　比较以下各组数的大小

(1)$\sqrt[n-1]{a^n}$ 与 $\sqrt[n]{a^{n+1}}$　　$(a>0,a\neq 1,n>1)$

(2)$\frac{1}{4}$，$\log_9 a$，$\log_8\sqrt{3}$

(3)$\log_a c$ 与 $\log_b c$　$(a>b>0,c>0$ 且 $a,b\neq 1)$

解(1)$\sqrt[n-1]{a^n}=a^{\frac{n}{n-1}}$，$\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n}}$

$\because$　$n>1$，

$\therefore \frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n}=\frac{n^2-(n^2-1)}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}>0$

$\therefore$　$\frac{n}{n-1}>\frac{n+1}{n}$

$\therefore$　当 $a>1$ 时，$\sqrt[n-1]{a^n}>\sqrt[n]{a^{n+1}}$

当 $0<a<1$ 时，$\sqrt[n-1]{a^n}<\sqrt[n]{a^{n+1}}$

(2) $4=\log_9 \sqrt[4]{9}=\log_9 \sqrt{3}>\log_9 \frac{3}{2}$

$4=\log_8 \sqrt[4]{8}<\log_8 \sqrt[4]{9}=\log_8 \sqrt{3}$

$\therefore \log_9 \frac{3}{2}<4<\log_8 \sqrt{3}$

(3) $\log_a c-\log_b c=\frac{\lg c}{\lg b}-\frac{\lg c}{\lg b}=\frac{\lg c(\lg b-\lg a)}{\lg a \lg b}$

如果 $c>1, a>b>1$，或 $1>a>b>0$，则 $\lg c>0$， $\lg a \cdot \lg b>0$，又 $\lg b-\lg a<0$

$\therefore \log_a c<\log_b c$

如果 $C>1, a>1>b>0$，则 $\lg c>0, \lg a \cdot \lg b<0$，又 $\lg b-\lg a<0$

$\therefore \log_a c>\log_b c$

如果 $0<c<1$， $a>b>1$ 或 $1>a>b>0$，则 $\lg c<0, \lg a \lg b>0$，又 $\lg b-\lg a<0$

$\therefore \log_a c>\log_b c$

如果 $0<c<1$，$a>1>b>0$

则 $\lg c<0$ $\lg a$，$\lg b<0$，又

$\lg a-\lg b<0$

$\therefore \log_a c<\log_b c$

如果 $c=1$ 则 $\log_a c=\log b^c$

例 3 已知 $f(x)=x^2+(\lg m+2)+\lg n$ 且 $f(-1)=-2, f(x)\geqslant 2x$，求 m、n 的值

解： 由 $f(-1)=-2$ 得：$1-(\lg m+2)+lgn=-2$

即 $\lg m-\lg n=1$ ①

由 $f(x)\geqslant 2x$ 得 $x^2+x\cdot\lg m+\lg n\geqslant 0$

$(\lg m)^2-4\lg n\leqslant 0$ ②

由①得 $m=10n$ 代入②得： $(\lg n+1)^2-4\lg n=(\lg n-1)^2\leqslant 0$

$\therefore \lg n-1=0$， $n=10$

从而 $m=100$

例 4 设 $0<x<1, a>0, a\neq 1$

试比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小

解法一：用求差法比较

$\because 0<1-x<1, 1<1+x<2$

$\therefore |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|$

$$=\begin{cases}-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2) & (a>1)\\ \log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2) & (0<a<1)\end{cases}$$

$\because 0<1-x^2<1$

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$-\log_a(1-x^2)>0$

当 $0<a<1$ 时，$\log_a(1-x^2)>0$

$\therefore$ 对于 $a>0, a\neq 1$ 都有 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

解法二： 用求差比较法

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(-x)|$$

$\because (1+x)(1-x)=1-x^2<1$

又 $0<1-x<1, 1<1+x<2$

$\therefore\quad 1-x<\frac{1}{1+x}$

$\therefore\quad \log_{(1+x)}(-x)<\log_{(1+x)}\frac{1}{1+x}=-1$

$\therefore\quad |\log_{(1+x)}(-x)|>1$

从而 $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

例 5 设 c,d,x 为实数，$c\neq 0$，x 为未知数，讨论方程 $\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$ 在什么情况下有解，有解时求出它的解

解：方程有解的条件是

$$\begin{cases} x>0 & ① \\ cx+\dfrac{d}{x}>0 & ② \\ cx+\dfrac{d}{x}\neq 1 & ③ \\ (cx+\dfrac{d}{x})=\dfrac{1}{x} & ④ \end{cases}$$

由④得：$cx^2+d=1$

$\because\quad c\neq 0 \qquad \therefore x^2=\frac{1-d}{c}$

由③及④可知 $x\neq 1$

$\because$ 由①④可以得到②

$\therefore$ 上面条件组简化为：

$$\begin{cases} x>0 & ① \\ x\neq 1 & ⑤ \\ x^2=\dfrac{1-d}{c} & ⑥ \end{cases}$$

因此不等式有解的条件为：

1°$c>0, 1-d>0$ 即 $c>0, d<1$ 且 $c\neq 1-d$

2°$c<0, 1-d<0$，即 $c<0, d>1$ 且 $c\neq 1-d$

方程的解是 $x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$

经检验 $x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$ 是原方程的解.

四 函数图象

应知应会

1. 基本初等函数的图象的画法——描点法，应注意两点：①抓住关键点，②抓住函数的特征，如对称性、单调性、渐近线等。

2. 利用基本初等函数的变换作图——图象的变换有以下几类：

①平移 $f(x+a)$——将 $f(x)$ 向左 a 个单位

$f(x)+a$——将 $f(x)$ 向上 a 个单位

②对称　$-f(x)$——与 $f(x)$ 关于 x 轴对称

$f(-x)$---与 $f(x)$ 关于 y 轴对称

$|f(x)|$——将 x 轴下面的部分翻转到 x 轴上面，而原在上面的保留不动.

$f(|x|)$——将 y 轴右面的部分保留不动，y 轴左面的部分画成与右面关于 y 轴对称的图形

③伸缩　$y=kf(x)$——各点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 k 倍。

$y=f(kx)$——各点的纵坐标不变，横坐标变成原来的 $\frac{1}{k}$ 倍 $(k\neq 0)$。

④倒数　$y=\frac{1}{f(x)}$——各点的横坐标不变，纵坐标取原来的倒数. $(f(x)\neq 0)$。

疑点难点

1. 用图象变换作图，应把原来的图象用虚线画好，将变换后的图象用实线画好

2. 变换图象时，同样要抓住关键点及函数重要性质，例如关键点变换后的位置，对称轴及渐近线的位置.

解题思路与方法

例 1　已知函数 $f(x)$，是以 2 为周期的函数，并且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=|x-1|$，画出 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 的图象.

解：　在 $[0,2]$ 上 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & (1\leqslant x\leqslant 2)\\ 1-x & (0\leqslant x<1)\end{cases}$$

先画出 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 的图象，再根据周期性，

画出 $f(x)$ 在 $[-4,4]$ 的整个图象，如图 1－2

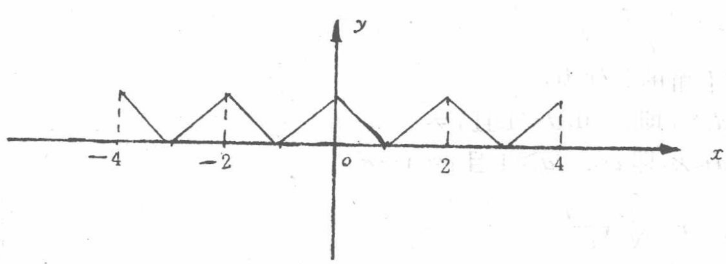


图 1－2

例 2　已知 $f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}$，画出 $f(x)$ 的图象.

解法一：用描点法

$$f(x)=\frac{3x+2}{2x-1}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{2x-1}$$

∴　$f(x)$ 的定义域是 $x\neq\frac{1}{2}$，值域是 $y\neq\frac{3}{2}$，因此 $f(x)$ 有两条渐近线 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{2}$

∵　$x=0, y=-2$

$$y=0, x=-\frac{2}{3}$$

因而，得特殊点$(0,-2)(-\frac{2}{3},0)$

再找到这两点关于$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$的对称点$(1,5)(\frac{5}{3},3)$，从而描绘出$f(x)$的图象，如图1－3

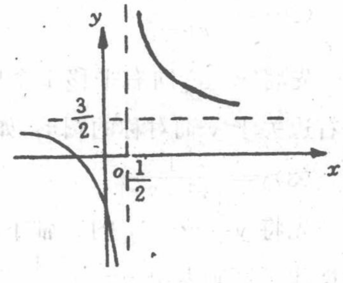


图1－3

解法二：用平移变换

将函数表达式化为 $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{\frac{7}{4}}{x-\frac{1}{2}}$

于是可先画出$y=\frac{\frac{7}{4}}{x}$的图象，然后将该图象向右平移$\frac{1}{2}$个单位，再向上平移$\frac{3}{2}$个单位即可得到$f(x)$的图象.

例3 利用图象变换作以下函数图象

(1)$y=\log_2 2x$ (2)$y=\frac{1}{|x|-1}$ (3)$y=\frac{1}{|x^2-2x|}$

解： (1)$y=\log_2 2x=1+\log_2 x$

只要将$y=\log_2 x$的图象向上平移1个单位，即得$y=\log_2 2x$的图象，如图1－4

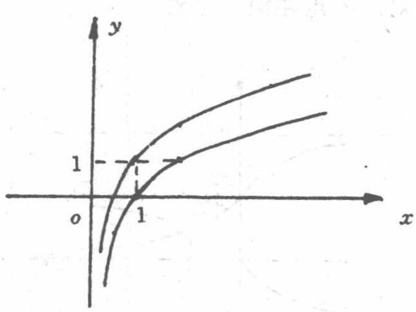


图1－4

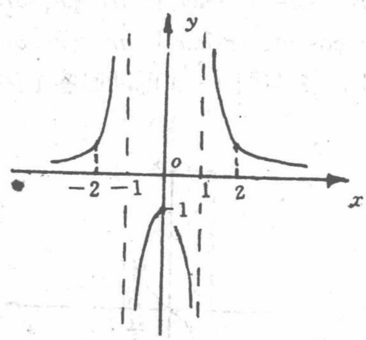


图1－5

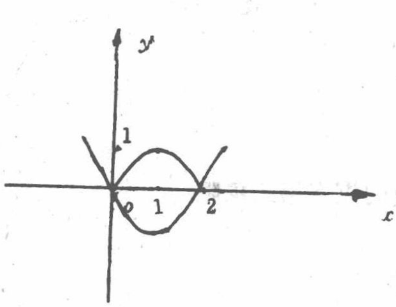


图1－6

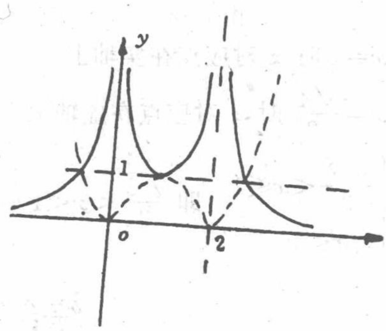


图1－7