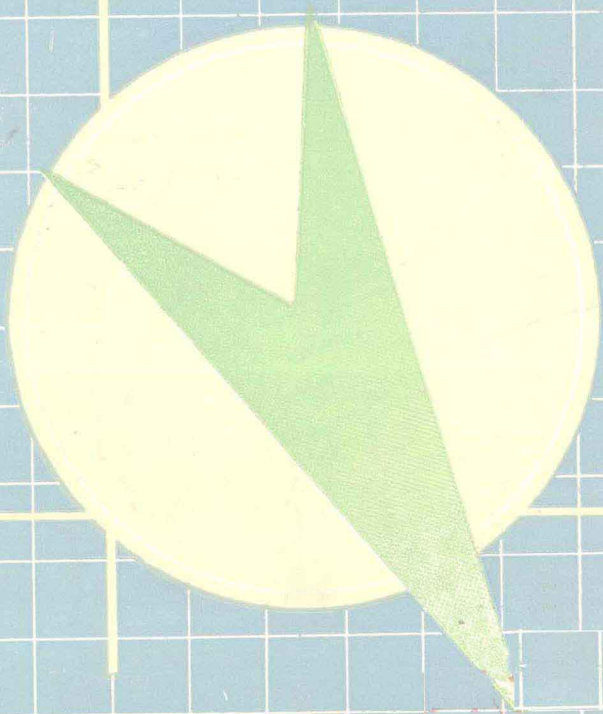


高中数学

疑难解析与训练



高中数学疑难解析与训练

(平面解析几何)

(修订版)

吴汉民 夏俊炜 尹慕文 编
吴基黄 李保林 肖作武

华中师范大学出版社

鄂新登字11号

高中数学疑难解析与训练
(平面解析几何)

吴汉民 夏俊炜 尹慕文 编
吴基黄 李保林 肖作武

*

华中师范大学出版社出版
(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所发行
汉阳县印刷厂印刷

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张9.625 字数200千字

1989年8月第1版 1992年8月第3次印刷

ISBN 7-5622-0379-2/G·115

印数: 30001—40100 定价: 3.60元

前 言

为了帮助高中学生更好地掌握数学基础知识，提高数学的思考、解题等多种能力，我们以高中数学教学大纲为依据，编写了《高中数学疑难解析与训练》这套辅助性读物。

全书与课本配套，各章按照课本内容顺序分节编写，每节包括四个或三个栏目：[内容提要]扼要概括一节的知识点；[释疑解难]围绕一节中一两个重点难点内容提出问题，举例剖析；[方法指导]通过典型例题着力分析解题思路，揭示各种题型的解题通法与技巧；[基础训练]配备了有针对性且覆盖面较宽的练习题，分A、B两组，A组属基本题，B组略有综合，随后附有答案或提示。其中的选择题均为一元选择，四支供选，有且只有一个正确答案。各章末增设综合题例一节，并配有一定难度的综合练习题，用于巩固基础知识，培养综合运用知识的能力。

为方便教学，编写没有涉及高中数学的选学内容。本书既可供高中学生学习新课及复习、自测之用，也可供教师备课和广大青年自学参考。

本书编写的过程中，得到了李保林、罗刚二位老师的热忱帮助，在此表示感谢。同时，书中存在的缺点错漏之处，我们恳请读者批评指正。

编 者

1989. 3

目 录

第一章	直线	(1)
一	有向线段、定比分点	(1)
二	直线的方程	(15)
三	两条直线的位置关系	(36)
四	综合题例	(55)
第二章	圆锥曲线	(67)
一	曲线和方程	(67)
二	圆	(80)
三	椭圆	(104)
四	双曲线	(128)
五	抛物线	(149)
六	综合题例	(166)
第三章	坐标变换	(181)
第四章	参数方程、极坐标	(199)
一	曲线的参数方程	(199)
二	参数方程和普通方程的互化	(224)
三	极坐标系与极坐标方程	(241)
四	极坐标和直角坐标的互化	(266)
五	综合题例	(282)

第一章 直 线

直线是特殊而又最简单的一种几何图形。通过本章的学习，掌握有向线段、定比分点、直线方程、直线与直线的位置关系、点到直线的距离等知识，以便解决有关直线的一些基本问题，并为研究圆锥曲线和其他曲线打下基础。

一 有向线段、定比分点

[内容提要]

1. 有向线段 AB 记作 $\overline{AB}$ ，表示起点为 A ，终点是 B 。

2. $\overline{AB}$ 的数量是一个实数，记作 AB ， $\overline{AB}$ 的长度记作 $|AB|$ 。把 $\overline{AB}$ 放在数轴上，则有

$$AB = x_B - x_A, \quad |AB| = |x_B - x_A|.$$

3. 两点间的距离公式

数轴上两点间的距离 $d = |x_1 - x_2|$ 。

平面上两点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 间的距离

$$d = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

4. 定比分点公式

点 $P(x, y)$ 分 $\overline{AB}$ 成 $\overline{AP}$ 和 $\overline{PB}$ 两部分， $\lambda = \frac{AP}{PB}$ ($\lambda \neq -1$)

则有

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

特别地，当 $\lambda = 1$ 时， P 点是 AB 中点：

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

5. 三角形重心坐标公式

已知 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心 $G(x, y)$ 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

[释疑解难]

1. 如何区分三种记号 $\overline{AB}$ 、 $|AB|$ 、 AB .

$\overline{AB}$ 表示 A 为起点、 B 为终点的有向线段。反之， B 为起点， A 为终点的有向线段记作 $\overline{BA}$ ， $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 是方向相反的有向线段。

$|AB|$ 表示有向线段 $\overline{AB}$ 的长度。因长度与方向无关，所以 $|AB| = |BA|$ 。

$\overline{AB}$ 的长度 $|AB|$ 附上正负号，就得到 $\overline{AB}$ 的数量，记作 AB 。数量的符号取决于有向线段所在或与其平行的有向直线。如图1-1，有向线段 $\overline{AB}$ 、

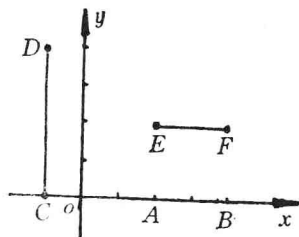


图 1-1

$\overline{CD}$ 、 $\overline{EF}$ 与有向直线方向相同，则其数量均为正值。即 $AB = |AB| = 2$, $CD = |CD| = 4$, $EF = |EF| = 2$ 。有向线段 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{FE}$ 均与有向直线方向相反，则其数量均为负值。 $BC = -|BC| = -5$, $AC = -|AC| = -3$, $FE = -|EF| = -2$ 。显然，

$$BA = -AB, \quad DC = -CD, \quad FE = -EF.$$

现在共出现了三种记号： $\overline{AB}$ 、 $|AB|$ 、 AB 。其中 $\overline{AB}$ 作为有向线段的记号，它区别于普通线段 AB ，表示一个几何图形。 $|AB|$ 是线段长度，为一个正的实数。 AB 是有向线段的数量，是一个可正可负的实数。为了防止概念上的混淆，我们应该按照规定书写。

2. λ 为什么不能等于 -1 。

有的同学仅从公式 $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ 考虑，认为式中分母不能为零，所以 λ 不等于 -1 。但正确地理解还需通过 λ 的定义思考。

设 P 点分 $\overline{AB}$ 成两条有向线段 $\overline{AP}$ 和 $\overline{PB}$ 。 $\overline{AP}$ 和 $\overline{PB}$ 数量的比，叫做 P 分 $\overline{AB}$ 所成的比。记作 $\lambda = \frac{AP}{PB}$ 。这里 A 是起点， B 点是终点， P 是分点。但点 P 可能是内分 $\overline{AB}$ ，也可能是外分 $\overline{AB}$ 。内分时， $\overline{AP}$ 与 $\overline{PB}$ 方向相同，于是它们的数量之比 $\lambda = \frac{AP}{PB} > 0$ ；外分时， $\overline{AP}$ 与 $\overline{PB}$ 方向相反，故 $\lambda = \frac{AP}{PB} < 0$ 。如果 $\lambda = -1$ ，即 $\frac{AP}{PB} = -1$, $AP = -PB$ ，即 $AP = BP$ ，则图形有两种可能：

一是 AB 退缩为一点，当然就不存在分点 P 了；另一种可能是分点 P 在 $\overline{AB}$ 或 $\overline{BA}$ 的延长线的无穷远点，这时分点 P 又是不能确定的。由上面的分析， λ 不可能等于 -1 。

其次， λ 能否等于零呢？显然这是可能的。当 P 与 A 重合时， $AP = 0$, $\lambda = \frac{AP}{PB} = 0$ 。

[方法指导]

例1 设 P 是 A 、 B 、 C 三点所在直线上的任意一点，求

证: $PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB = 0$

证 取 A 、 B 、 C 所在直线为数轴, P 为原点, 设 A 、 B 、 C 、三点在数轴上的坐标分别为 a 、 b 、 c . 则

$$PA = a, PB = b, PC = c,$$

$$BC = c - b, CA = a - c, AB = b - a.$$

$$\therefore PA \cdot BC + PB \cdot CA + PC \cdot AB$$

$$= a(c - b) + b(a - c) + c(b - a) = 0.$$

评注 证关于有向线段数量的恒等式, 通常是在直线上建立直线坐标系, 将有向线段值转化为点的坐标, 则欲证等式化为代数恒等式, 然后通过计算化简不难得证.

例 2 求下列函数的最小值:

$$(1) y = |x + 2| + |x - 5|;$$

$$(2) y = |x + 3| + |x - 1| + |x - 6|.$$

解 (1) 如果视 -2 、 5 、 x 分别为数轴上三点 A 、 B 、 P 的坐标, 则因数轴上任意点 P 到线段 AB 两端距离之和 不 小 于 $|AB|$, 有

$$|PA| + |PB| \geqslant |AB|,$$

即 $y = |x + 2| + |x - 5| \geqslant |5 - (-2)| = 7$, 故 $y_{\min} = 7$.

(2) 显然当 $x = 1$ 时, $y_1 = |x - 1|$ 有最小值, 又由 (1) 知, 当 $-3 \leqslant x \leqslant 6$ 时, $y_2 = |x + 3| + |x - 6|$ 有最小值. 于是, 当 $x = 1$ 时, y_1 、 y_2 同时取最小值. 即

$$y_{\min} = 0 + |6 - (-3)| = 9.$$

例 3 已知 $A(-4, 6)$, $B(x, 3)$. 点 $P(8, 0)$ 在直线 AB 上, 求 P 分线段 AB 的分比 λ 和 x .

$$\text{解 } \lambda = \frac{AP}{PB} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \frac{0 - 6}{3 - 0} = -2.$$

于是
$$8 = \frac{-4 - 2x}{1 - 2} \Rightarrow x = 2.$$

评注 ①这里 λ 用 A 、 P 、 B 三点的纵坐标表示，其本质是有向线段分解成平行于坐标轴的有向线段。

②公式 $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ 所涉及的四个元素中，知其三可求其余。

例4 已知 $A(-2, 4)$, $B(5, 3)$, P 为直线 AB 上一点，且 $|AB| = 3|AP|$ ，求 P 点坐标。

分析 这里直接求分比 λ 有困难，故可先列出含 λ 的方程，解之得 λ 值。

解 设 $P(x, y)$ 。∵ $|AB| = 3|AP|$ ，∴ $|AP + PB| = 3|AP|$ 则 $\left|1 + \frac{PB}{AP}\right| = 3$ ，即 $\left|1 + \frac{1}{\lambda}\right| = 3$ ，解之得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{4}$ 。分别代入分点坐标公式，得两个解 $P\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ 或 $P\left(-\frac{13}{3}, \frac{13}{3}\right)$ 。

例5 $\triangle ABC$ 中，已知 $A(4, 1)$, $B(7, 5)$ 和 $C(-4, 7)$ ，试求

(1) $\angle A$ 的平分线 AD 的长；

(2) $\angle A$ 的外角平分线与 CB 延长线交点 E 的坐标。

分析 欲求 $|AD|$ ，关键在求 D 点坐标。而由内角平分线定理易求得 D 点分 CB 所成的比，于是利用分点坐标公式即可求得 D 点坐标。

用同样方法可求 E 点坐标，但应注意 E 分 CB 的比 $\lambda < 0$ 。

解 (1) ∵ $|AB| = 5$, $|AC| = 10$

$$\therefore \frac{CD}{DB} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore x_D = \frac{-4 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = \frac{10}{3}, \quad y_D = \frac{7 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{17}{3}.$$

即 $D\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

故 $|AD| = \sqrt{\left(4 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{17}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{2}$

$$(2) \because \frac{CE}{EB} = -\frac{|AC|}{|AB|} = -2.$$

$$\therefore x_E = \frac{-4 - 2 \cdot 7}{1 - 2} = 18, \quad y_E = \frac{7 - 2 \cdot 5}{1 - 2} = 3.$$

$\therefore E(18, 3)$.

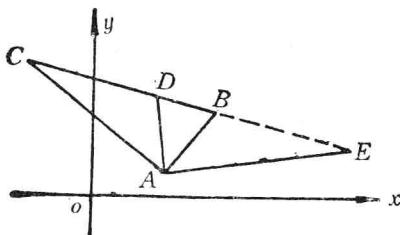


图 1-2

例 6 如图1-3, $\triangle ABC$ 的三边各有动点 D 、 E 、 F , 在时刻 $t=0$ 时分别从 A 、 B 、 C 出发, 各以一定的速度向 B 、 C 、 A 前进, 在 $t=1$ 时分别到达 B 、 C 、 A .

(1) 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 求 $\triangle DEF$ 的面积的最小值;

(2) 证明动三角形 DEF 的重心是一个定点.

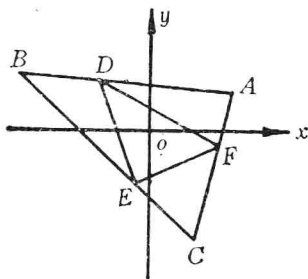


图 1-3

分析 1 $S_{\triangle DEF}$ 是 $S_{\triangle ABC}$ 减去三个小三角形面积的差, 又三个小三角形面积是变量 t 的函数, 由此知 $S_{\triangle DEF}$ 可表示为 t 的函数, 于是问题可转化为一个代数函数的极值问题.

解 (1) 由三角形面积公式得

$$\frac{S_{\triangle ADF}}{S} = \frac{AD \cdot AF}{AB \cdot AC} = \frac{t \cdot AB(1-t) \cdot AC}{AB \cdot AC},$$

$$\therefore S_{\triangle ADF} = t(1-t)S,$$

$$\text{同理 } S_{\triangle BDF} = t(1-t)S, S_{\triangle CEF} = t(1-t)S.$$

$$\text{于是 } S_{\triangle DEF} = S - 3t(1-t)S$$

$$= 3 \left[\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \right] S \geq \frac{S}{4}$$

(当 $t = \frac{1}{2}$, 即 D 、 E 、 F 分别为三边中点时等号成立). 故

$$S_{\triangle DEF} \text{ 最小值为 } \frac{S}{4}.$$

分析 2 $\triangle DEF$ 的重心须由 D 、 E 、 F 的坐标确定, 而 D 、 E 、 F 的坐标通过时刻 t , 联系 $\triangle ABC$ 三顶点 (定点) 的坐标.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. 因在同一时刻 t , D 、 E 、 F 分别所在的位置分线段 AB 、 BC 、 CA 的比 λ 是相同的,

$$\text{即 } \lambda = \frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{t}{1-t}. \text{ 则 } D、E、F \text{ 的坐标分别为}$$

$$(tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1),$$

$$(tx_3 + (1-t)x_2, ty_3 + (1-t)y_2),$$

$$(tx_1 + (1-t)x_3, ty_1 + (1-t)y_3),$$

由三角形重心坐标公式, $\triangle DEF$ 的重心 G 的坐标为

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right). \text{ 故 } G \text{ 为一定点.}$$

平面几何中的有些命题, 用平凡方法证明显得困难, 而采用解析几何的方法 (解析法) 证明则比较容易. 解析法证题的一般步骤是: ①建立恰当的坐标系; ②确定定点坐标,

求出曲线方程；③利用有关公式和方程对命题加以论证。

例 7 在正方形 $ABCD$ 中，过一个顶点 D 作对角线 CA 的平行线 DE ，若 $|CE| = |AC|$ ，且 CE 交边 DA 于点 F ，如图 1-4，求证： $|AE| = |AF|$ 。

分析 如果取 D 为原点， DC 为 x 轴，建立坐标系，则容易确定 A 、 B 、 C 、 D 的坐标。再依次设法求出 E 、 F 点坐标，然后应用距离公式可证得结论。故证题可分为四步。

证 ① 取 D 为原点， DC 为 x 轴，建立直角坐标系。

② 设诸点的坐标为 $A(0, a)$ ， $B(a, a)$ ， $C(a, 0)$ ， $E(x_1, y_1)$ ， $F(0, y_2)$ 。

③ $\because DE \parallel CA, \therefore y_1 = -x_1$ 。

又 $|CE| = |CA|$ ，即 $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (-x_1 - 0)^2} = \sqrt{2}a$ ，

可得 $x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})a$ 。 $E\left(\frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}), \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)\right)$ 。

由 C 、 F 、 E 三点共线，知 F 分 CE 的比

$$\lambda = \frac{CF}{FE} = \frac{0 - a}{\frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}) - 0} = \frac{y_2 - 0}{\frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) - y_2}$$

则 $y_2 = (2 - \sqrt{3})a$ ， $F(0, (2 - \sqrt{3})a)$ 。

④ 据距离公式得

$$|AE| = |AF|。$$

评注 坐标系建立恰当与否，直接影响解题过程的繁简。建立坐标系要注意充分利用图形的特殊点、对称与垂直关系。如本例就利用了垂直关系。

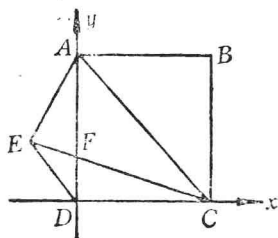


图 1-4

其次要注意，凡证题中用到的点，在图上都要标出，但所设字母应该尽量少。

例8 $\triangle ABC$ 中， AT 为 $\angle A$ 的内角平分线， D 、 E 分别在 AB 、 AC 上，且 $|BD| = |CE|$ ， BC 、 DE 的中心分别为 M 、 N ，求证 $MN \parallel AT$ 。

分析 线段 BC 、 DE 的中点 M 、 N 分别依赖于这两线段的端点坐标。考虑到 AT 是 $\angle CAB$ 的平分线，故可取 A 为原点， AT 所在直线为 x 轴，建立直角坐标系如图1-5。用参数设定 $|AB|$ 、 $|AC|$ 、 $|BD|$ 及 $\angle BAC$ 之后，计算诸点坐标，若 $y_M = y_N$ ，即可得证。

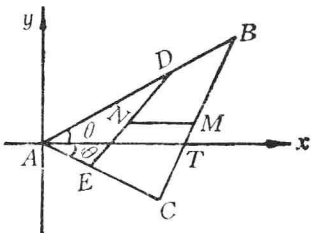


图 1-5

证 建立如图1-5所示的直角坐标系。设 $\angle BAC = 2\theta$ ， $|BD| = |CE| = 2m$ ， $|AB| = 2c$ ， $|AC| = 2b$ 。则有

$$y_B = 2c \sin \theta, \quad y_C = -2b \sin \theta$$

$$y_D = 2(c-m) \sin \theta, \quad y_E = -2(b-m) \sin \theta$$

$$\therefore y_M = (c-b) \sin \theta, \quad y_N = (c-b) \sin \theta$$

$$\therefore y_M = y_N, \text{ 故 } MN \parallel AT.$$

评注 解析法亦称坐标法，其要点是用点的坐标讨论点的方位。所论问题中的已知量，如有关线段、角度、面积等，必要时可设相应的参数表示。

[基础训练]

(A)

1. 选择题

(1) 在数轴上 A 、 B 两点的坐标分别是 $2 + \sqrt{3}$ 和 $3 + \sqrt{5}$ ，则 $\overline{BA}$ 的数量是

- (A) $\sqrt{3} - \sqrt{5} - 1$; (B) $1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$;
(C) $\sqrt{5} - 1 - \sqrt{3}$; (D) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + 1$.

(2) 若点 $A(1, 2)$ 、 $B(-2, 3)$ 与 $C(4, k)$ 在同一直线上，则 k 等于

- (A) 1; (B) $\frac{7}{3}$; (C) $\frac{11}{3}$; (D) 5.

(3) 已知 $P_2(x_2, y_2)$ 是 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P(x, y)$ 的中点，则 P 点坐标为

- (A) $\left(\frac{x_1 - 2x_2}{2}, \frac{y_1 - 2y_2}{2}\right)$;
(B) $(2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1)$;
(C) $(2x_1 - x_2, 2y_1 - y_2)$;
(D) $\left(\frac{x_2 - 2x_1}{2}, \frac{y_2 - 2y_1}{2}\right)$.

(4) 设线段 $|P_1P_2| = 1$ ，点 P 在 P_1P_2 的延长线上， $|PP_2| = 2$ ，则点 P 分 P_1P_2 所成的比是

- (A) 2; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $-\frac{3}{2}$; (D) $-\frac{2}{3}$.

(5) 已知点 $M(3, 4)$ 、 $N(12, 7)$ ， Q 在直线 MN 上，且 $|QM| : |MN| = 1 : 3$ ，则 Q 点坐标是

- (A) (6, 5); (B) (9, 6);
(C) (0, 3); (D) 以上都不对.

(6) $\triangle ABC$ 中， F 点分 AC 为 $1:2$ ， G 是 BF 的中点， E 是直线 AG 与 BC 的交点，那么 E 点分 BC 的比是

- (A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{2}{5}$; (D) $\frac{3}{8}$.

2. 填空题

(1) 已知 $A(3, 1)$, $B(1, 7)$, $C(5, 4)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标为_____.

(2) 连接 $P_1(2, y)$ 和 $P_2(x, 6)$ 两点的线段中点是 $P(3, 2)$, 则 $x =$ ____, $y =$ _____.

(3) $\square ABCD$ 中, 已知 $A(4, 2)$, $B(5, 7)$, $C(-3, 4)$, 则 D 点坐标为_____.

(4) 点 P 在 x 轴上, 且与点 $P_1(0, 5)$ 和 $P_2(4, 2)$ 等距离, 则 P 点坐标是_____.

(5) $\triangle ABC$ 中, 已知 $A(5, 8)$, $B(-1, 5)$ 且 AC 、 BC 的中点分别在 x 、 y 轴上, 则 C 点坐标为_____.

(6) 已知 $\triangle ABC$ 的三边中点的坐标分别为 $(3, 4)$, $(-1, 2)$, $(1, -1)$, 则 $\triangle ABC$ 三顶点的坐标分别是_____.

(7) 与 $A(32, 10)$, $B(42, 0)$, $C(0, 0)$ 三点等距离的点是_____.

(8) 已知 $P(x, y)$ 到 $A(2, 3)$ 和 $B(4, 5)$ 两点的距离相等, 则 $x + y =$ _____.

(9) 已知 $A(4, 2)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -4)$ 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点, 则过顶点 C 的中线 $|CD| =$ _____.

(10) 某正六边形相邻二顶点为 $A(2, 0)$ 和 $B(5, 3\sqrt{3})$, 则它的中心坐标是_____.

(11) 三点 $A(-1, 0)$, $B(5, 6)$ 和 $P(x, 4)$ 在一直线上, 则点 P 分 BA 所成的比 λ 等于_____.

(12) 点 P 与 x 轴及点 $A(-4, 2)$ 的距离都是10, 则 P 的坐标是_____.

(13) 已知点 P_2 分 P_1P_3 所成的比为 λ , 则

① 点 P_2 分 P_3P_1 所成的比是_____.

② 点 P_1 分 P_3P_2 所成的比是_____.

③ 点 P_3 分 P_1P_2 所成的比是_____.

(14) $\triangle ABC$ 中, 已知 $A(7, 5), B(0, 0), C(6, 0), D, E$ 在边 BC 上, 且 AD, AE 将 $\triangle ABC$ 的面积三等分, 则 D, E 的坐标分别是_____.

3. 设 A, B, C, D 是数轴上四点, 求证

$$AB + BC + CD + DA = 0.$$

4. 设 A, B, C, D 为一直线上四点, 且 $\frac{AC}{CB} + \frac{AD}{DB} = 0$,

求证: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$.

5. $\triangle ABC$ 中, 点 $A(4, -1)$, AB 中点为 $M(3, 2)$, 重心 $P(4, 2)$, 求点 B, C 的坐标.

6. 已知 $A(1, 2), B(7, 0)$, 点 P 内分线段 AB , 且满足 $\frac{AP}{PB} = \frac{PB}{AB}$, 求点 $P(x, y)$ 的坐标.

7. 点 M, N 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上, 且 M 分 AB 成 $3:1$, 如果 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AMN}$, 求 N 分 AC 所成的比.

8. 求点 $M(x, y)$, 使它到三点 $(2, -3), (-1, 1), (5, -7)$ 的距离的平方和最小.

9. 求一点 $M(x, y)$, 使它到已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 的距离的平方和最小.

10. 求证, 对任意实数 x_1, x_2, y_1, y_2 , 下面的不等式成立:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

11. 设 A, B, C, D 为平面上任意四点, 且 O 为 AD 的中点, 求证