Spark® 星火·燎原

考研数学命题研究组 推荐

# 考研数学

数学三

# 历年真题点评

考研数学资深辅导名师 张天德 主编

- 考点分布 揭示命题趋势
- 错例分析 让您远离解题误区
- 方法点击 归纳要点让您举一反三

2011

赠 考研数学重要公式及性质

天津科学技术出版社

Spark® 星火·燎原

# 考研数学 数学三

# 历年真题点评

## 试题点评

# 目 录

# 2010年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题点评

## 答案速查

**一、选择题**

(1)C (2)A (3)B (4)C (5)A (6)D (7)C (8)A

**二、填空题**

(9) $-1$ (10) $\frac{\pi^2}{4}$ (11) $pe^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$ (12)3 (13)3 (14) $\sigma^2+\mu^2$

**三、解答题**

(15) $e^{-1}$ (16) $\frac{14}{15}$ (17) $u_{最大}=5\sqrt{5}$ $u_{最小}=-5\sqrt{5}$

(18)(Ⅰ) $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leqslant \int_0^1 t^n |\ln t| dt$ (Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (19)略

(20)(Ⅰ) $\lambda=-1, a=-2$ (Ⅱ)通解 $\boldsymbol{x}=k(1,0,1)^T+\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)^T$，其中 $k$ 为任意常数

(21) $a=-1, \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

(22) $A=\frac{1}{\pi}$; $f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$ $-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$

(23)(Ⅰ)

| X \ Y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{15}$ |
| 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{15}$ | 0 |

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{4}{45}$

## 测评结果统计

| 题型 / 测评项目 | 选择题 1～8 | 填空题 9～14 | 解答题 15～19 | 解答题 20～21 | 解答题 22～23 | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 建议用时 | 30 分钟 | 25 分钟 | 75 分钟 | 25 分钟 | 25 分钟 | 180 分钟 |
| 实际用时 | | | | | | |
| 得　分 | | | | | | |

## 试卷评析

考点分布表一(微积分部分)

| 考　点 | 极限与连续 | 一元微分学 | 一元积分学 | 多元微分学 | 二重积分 | 无穷级数 | 常微分方程与差分方程 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分　数 | 18 | 26 | 14 | 10 | 10 | 0 | 4 |

考点分布表二(线性代数部分)

| 考　点 | 行列式 | 矩阵 | 向量 | 线性方程组 | 特征值和特征向量 | 二次型 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 分　数 | 0 | 4 | 4 | 11 | 15 | 0 |

考点分布表三(概率论与数理统计部分)

| 考　点 | 随机事件和概率 | 随机变量及分布 | 多维随机变量 | 数字特征 | 大数定律 | 数理统计 | 参数估计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分　数 | 0 | 8 | 17 | 5 | 0 | 4 | 0 |

2010年的试题延续了2009年试题的风格,基本上没有偏题、怪题,难度适中,基本题目占到50%,中等难度的题目占到38%左右,较难题目占12%左右.与2008年、2009年的试卷相比,总体水平基本相当.但2010年试题较2009年更加新颖,试题以计算题为主,较2009年试题计算量有所增加.

微积分部分13个题,82分,占总分的56%.由于2008年、2009年连续二年考教科书中的基本定理,今年终于回归正常,考查微分中值定理的应用证明.因此,难度有所增加.未定式的极限与第(18)题含参数定积分的极限均含有一定的技巧.

线性代数部分5个题,34分,占总分的22%.考查的都是重要知识点,常规内容,与2008年、2009年的试题相比,计算量有所增加,没有考到证明的题目,难度有所降低.值得注意的是,今年的两个大题:第(20)、(21)题,在题设条件的表述上与常见的提法不一样,这就要求读者理解相关的概念看懂题意,真正解题还是不难的,是常规题型.

概率论与数理统计部分5个题,34分,考查的内容都属基本题型,难度不大,与2009年试题极为相似,甚至可以说考点重复,例如填空题仍然考的是统计量求数字特征(且与常见分布的特征结合),大题第(22)题考查由联合概率密度求条件密度,第(23)题抽取三种颜色的球,由此确定概率分布,这些题型在2009年都考过.由此可见,一方面考生要将真题(尤其是近几年的真题)作为考研数学复习的重点;另一方面,经济类数学三、数学四合并之后,对统计的要求降低了,连续两年考到的统计题都是4分的小题,这种状态是否会延续,值得读者关注.

## 试题详解

### 一、选择题

(1)C

【考查知识点】函数的极限.

【思路探索】将$\infty-\infty$型未定式通分化为$\frac{0}{0}$型未定式,利用洛必达法则或分解后利用等价无

穷小代换即可.

解：解法一：因为$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{axe^x+1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(ae^x+axe^x-e^x)=a-1$，

由题设条件知 $a-1=1$，即 $a=2$，故选(C).

解法二：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[ae^x+\frac{1-e^x}{x}\right]=a+\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x}=a-1.$

由 $a-1=1$ 知 $a=2$，故应选(C).

【错例分析】在利用等价无穷小代换时，有的同学将 $x\to 0$ 时，$1-e^x$ 的等价无穷小错记为 $x$，从而由 $a+1=1$，得到错误选项(A).

【方法点击】对于已知极限值反求极限式中参数的命题，当极限式为未定式时，可以利用洛必达法则直接求解，也可以利用等价无穷小化简后求解，或者利用极限的基本结论：

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$，则有

① 当 $x\to x_0$ 时，若 $g(x)\to 0$，则必有 $f(x)\to 0$.

② 当 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)\to 0$ 且 $A\neq 0$，则必有 $g(x)\to 0$.

(2)A

【考查知识点】一阶线性微分方程解的性质.

【思路探索】利用一阶线性微分方程解的性质即可得到.

解：因 $y_1,y_2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，由解的性质知，

要使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，则必有 $\lambda+\mu=1$，

要使 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，则必有 $\lambda=\mu$，

解之得 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$，故应选(A).

【错例分析】本题的解答必须把 $\lambda+\mu=1$ 与 $\lambda=\mu$ 联合起来才能得到正确答案，若仅仅注意到 $\lambda+\mu=1$，虽可排除(B)、(D)，但这时可能错选(C). 若仅注意到 $\lambda=\mu$，则(A)、(B)、(D) 都正确，从而无法确定.

【方法点击】一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 与对应的齐次微分方程 $y'+p(x)y=0$ 解的性质：

1) 若 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 均为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，则当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时，$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_sy_s$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解.

2) 若 $y_1,y_2$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $y_2-y_1$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解.

3) 若 $y_r$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解，则 $ky_r$ 也是 $y'+p(x)y=0$ 的解.

(3)B

【考查知识点】极值的充分条件、必要条件与复合函数的导数.

【思路探索】利用函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取极大值的充分条件：$f'(x_0)=0,f''(x_0)<0$ 即可.

解：$\{f[g(x)]\}'_x=f'[g(x)]g'(x)$，

$\{f[g(x)]\}''_x=\{f'[g(x)]g'(x)\}'_x=f''[g(x)][g'(x)]^2+f'[g(x)]g''(x).$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，所以 $g'(x_0)=0$.

于是$\{f[g(x)]\}'_{x=x_0}=f'[g(x_0)]g'(x_0)=0$,

$\{f[g(x)]\}''_{x=x_0}=f'[g(x_0)]g''(x_0)=f'(a)g''(x_0)$,

由于 $g''(x)<0$,要使$\{f[g(x)]\}''_{x=x_0}<0$,则必须有 $f'(a)>0$,因此选(B).

【方法点击】设函数 $y=f(x)$ 二阶可导,$f'(x_0)=0$,则

1) 当 $f''(x_0)\neq 0$ 时,$x_0$ 为极值点,当 $f''(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值;当 $f''(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值.

2) 当 $f''(x_0)=0$ 时,$x_0$ 可能是极值点也可能不是极值点,需用其他方法判别.

(4)C

【考查知识点】无穷大量的阶.

【思路探索】利用 $x\to+\infty$ 时无穷大量的阶的比较即可.

解:由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10\ln^9 x}{x}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10!}{x}=0<1$,

故当 $x$ 充分大时,$f(x)<g(x)$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{10}e^{\frac{x}{10}}=+\infty>1$,

故当 $x$ 充分大时,$g(x)<h(x)$.

即有 $f(x)<g(x)<h(x)$,故选(C).

【方法点击】一般地,设 $\lim\alpha(x)=\infty,\lim\beta(x)=\infty$,则有

1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷大.

2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$(常数),则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷大.

(5)A

【考查知识点】向量组的线性相关性与线性表示.

【思路探索】依据定理可直接得结论,也可利用向量组线性表示的性质推导而得.

解:解法一:因向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示,则 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$,即

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant s$$

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,则 $r=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$,所以 $r=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\leqslant s$,因此,选(A).

解法二:由向量组的线性表示与向量组的线性相关性定理:若向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则当 $r>s$ 时,向量组 Ⅰ 线性相关. 或者说若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r\leqslant s$. 可直接判别(A)正确.

【错例分析】本问题是一个将两个向量组的线性表示、向量组的线性相关性与向量组中向量个数综合在一起的命题,如果将定理的条件与结论相混淆,则极易出现错误.

【方法点击】判别向量组的线性关系是考研数学常考题型. 但由于判别的方法多种多样,所以考查的侧重点不同. 例如:2009 年和 2008 年侧重于考查定义法,2007 年和 2006 年侧重于考查表示矩阵法,2005 年侧重于考查行列式法,2004 年侧重于考查矩阵秩法或方程组法. 而本题主要是考查利用线性表示和线性相关性的常用结论直接判别,2003 年考查的是这个结论的逆否命题. 为此,应熟练掌握并灵活运用下列常用结论:

1) 向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则:

① 若 $r > s$,则向量组 Ⅰ 必线性相关.

② 若向量组 Ⅰ 线性无关,则 $r \leqslant s$.

③$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s) \leqslant s$.

2) 若向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可以相互线性表示,则称向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价.

3) 若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价,则 $r(\text{Ⅰ}) = r(\text{Ⅱ})$,反之则不一定.

(6)D

【考查知识点】实对称矩阵的特征值与对角化.

【思路探索】由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 确定 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的可能取值,再利用 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})$ 及 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的构造即可.

解:设 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 知,$\lambda^2+\lambda=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1$ 或 $0$,由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,且对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值构成,又 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=3$,因此,

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0\end{pmatrix},$$

即选(D).

【方法点击】1) 若 $n$ 阶方程 $\boldsymbol{A}$ 满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值 $\lambda$ 满足 $f(\lambda)=0$.

2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为其特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为其对应的线性无关的特征向量,则令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$,其中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 列的排法与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角线上元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的排法相对应.

3) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数.

(7)C

【考查知识点】随机变量取值的概率.

【思路探索】利用 $P\{X=1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)$ 即可.

解:$P\{X=1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.

故应选(C).

【错例分析】由分布函数 $F(x)$ 知,随机变量 $X$ 既不是离散型也不是连续型随机变量,有的考生

没有意识到这一点，错用连续型随机变量在任一定点的概率为零的结论，选了(A).

【方法点击】设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)$，则

1) 若 $X$ 为连续型随机变量，则 $P\{X=x_0\}=0$.

2) 若 $X$ 为非连续型随机变量，则 $P\{X=x_0\}=F(x_0)-F(x_0-0)$.

(8) A

【考查知识点】概率密度的性质.

【思路探索】利用概率密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 即可.

解：由题设条件知：

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -1\leqslant x\leqslant 3.\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

利用概率密度的性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_0^3\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b.$$

所以 $2a+3b=4$，故应选(A).

【方法点击】若 $f(x)$ 为连续型随机变量的分布密度函数，则具有如下性质：

1) $f(x)\geqslant 0$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

3) $P\{a<X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4) $P\{X=x_0\}=0$，从而

$$P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5) 对于任意的 $x$，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，$F(x)$ 为单调不减的、连续的有界函数.

## 二、填空题

(9) $-1$

【考查知识点】变上限积分的导数与隐函数的导数.

【思路探索】首先由方程确定 $y$ 的取值，再利用隐函数求导法即可.

解：由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t$，令 $x=0$，得 $y=0$.

等式两端对 $x$ 求导，得

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t+x\sin x^2,$$

把 $x=0$，$y=0$ 代入上式得 $1+\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$，

所以 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$.

【方法点击】1) 设 $y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t$,则 $y'=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$.

2) 给定隐函数方程 $F(x,y)=0$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的常用方法有：

① 求出偏导 $F_x',F_y'$,由公式$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$ 可得.

② 对方程两端关于 $x$ 求导,整理可得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(10) $\dfrac{\pi^2}{4}$

【考查知识点】旋转体的体积.

【思路探索】利用旋转体体积公式 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 即可.

解：$V_x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}=\pi\arctan(\ln x)\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\pi\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}$.

【方法点击】定积分的应用——平面图形面积、旋转体体积,是考研中的常见考点,只要掌握了公式即可迎刃而解.这里考查的是旋转体体积公式,主要有两种形式：

1) 由 $x=a,x=b,x$ 轴与曲线 $y=f(x)$ 所围图形绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2) 由 $y=c,y=d,y$ 轴与曲线 $x=g(y)$ 所围图形绕 $y$ 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_y=\pi\int_c^d g^2(y)\mathrm{d}y.$$

(11) $p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$

【考查知识点】收益的弹性与一阶微分方程.

【思路探索】由收益的弹性公式建立微分方程,求解即可.

解：由收益的弹性定义知：

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{R}=1+p^3$$

整理得$\dfrac{\mathrm{d}R}{R}=\left(\dfrac{1}{p}+p^2\right)\mathrm{d}p$,

两边积分得

$$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^3+C$$

由 $R(1)=1$,代入知 $C=-\dfrac{1}{3}$,

即有 $\ln R=\ln p+\dfrac{1}{3}(p^3-1)$,

也就是 $R=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

【方法点击】经济应用类命题是近几年来考研的热点问题之一.需求弹性、收益弹性是微积分经济应用的重点内容,应熟练掌握基本公式与推导方法.

1)若需求函数为 $Q=f(p)$,则有:

① 需求弹性 $\eta=\left|p\dfrac{f'(p)}{f(p)}\right|$.

② 商品的收益 $R=Qp$,则 $\dfrac{dR}{dp}=Q+p\dfrac{dQ}{dp}=Q(1+p\cdot\dfrac{\frac{dQ}{dp}}{Q})=Q(1-\eta)$.

2)收益弹性为 $\dfrac{ER}{Ep}=p\cdot\dfrac{\frac{dR}{dp}}{R}=\dfrac{p}{pQ}\cdot Q(1-\eta)=1-\eta$.

(12)3

【考查知识点】曲线的拐点.

【思路探索】利用曲线过 $(-1,0)$ 点及 $y''(-1)=0$ 即可.

解:$y=x^3+ax^2+bx+1$,$y'=3x^2+2ax+b$,$y''=6x+2a$.

由于 $(-1,0)$ 是曲线的拐点,则 $y''(-1)=-6+2a=0$,所以 $a=3$.

又曲线过 $(-1,0)$,则 $y(-1)=0$,即 $-1+a-b+1=0$,所以 $b=3$.

【方法点击】1)拐点的判别方法:设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处连续,$f''(x_0)=0$,则

① 若 $f''(x)$ 在 $x_0$ 的左、右邻域内变号,则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

② 若 $f'''(x_0)$ 存在,且 $f'''(x_0)\neq0$,则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

2)设 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点,若 $f''(x_0)$ 存在,则必有 $f''(x_0)=0$.

(13)3

【考查知识点】矩阵的行列式.

【思路探索】寻求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$(或 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$),$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}$ 的关系即可求解.

解:由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}$,

所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}^{-1}|$.

因为 $|\boldsymbol{B}|=2$,所以 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$,因此

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}^{-1}|=3\times2\times\frac{1}{2}=3.$$

【错例分析】求解本题的关键点在于找到 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}$ 的关系式.有的同学错误地认为 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}$,从而得到错解 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}$.

【方法点击】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,且均可逆,则有:

① $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

② $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 不一定可逆.

③ 当 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆时,$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.

④ 当 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}$ 可逆时,$\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}$ 也可逆,且有 $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}$.

(14)$\sigma^2+\mu^2$

【考查知识点】统计量的数字特征.

【思路探索】利用数学期望的性质即可得.

解：$ET = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) = \sigma^2+\mu^2$.

【方法点击】1）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为随机变量序列，且 $EX_i$ 均存在（$i=1,2,\cdots,n$），则 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i) = \sum_{i=1}^{n}EX_i$.

2）若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $EX=\mu, DX=\sigma^2, EX^2 = DX+(EX)^2 = \sigma^2+\mu^2$（由式子 $DX = (EX)^2 - EX^2$ 得到）.

## 三、解答题

(15)【考查知识点】未定式的极限.

【思路探索】首先将 $0^0$ 型未定式指数化，再求指数的极限即可得.

解：解法一：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}$（因 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$）

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x} = -1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$.

解法二：当 $x\to+\infty$ 时，$x^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{\ln x}{x}$，则

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x}}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x-\ln x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right) = -1$，

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$.

【错例分析】1）在解法一中应用到了 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$，在整理过程中极限式中省略了 $x^{\frac{1}{x}}$，使得继续运算简化了．有的同学没有注意到这一点，直接用洛必达法则，由于太烦琐，以至很多同学没有得到结果.

2）本题是幂指函数求极限，在求解过程中又一次出现了幂指函数，比较复杂，求解时一定要细心、耐心.

【方法点击】对于 $0^0$ 型未定式与 $\infty^0$ 型未定式及 $1^\infty$ 型未定式常用求极限步骤为：

① 指数化，即 $0^0 \xlongequal{\triangle} e^{0\ln 0}$；$\infty^0 \xlongequal{\triangle} e^{0\ln\infty}$；$1^\infty \xlongequal{\triangle} e^{\infty\ln 1}$. 式中"$\xlongequal{\triangle}$"表示"可化为"，ln0、ln∞ 仅是记号.

② 求指数的极限.

③ 写出原式极限，即若 $\lim 0\ln 0 = A$，则 $\lim 0^0 = e^A$.

(16)【考查知识点】二重积分.

【思路探索】画出 $D$ 的示意图，利用对称性定理简化运算，对最终式子求积分即可.

解：积分区域 $D = D_1 \cup D_2$，其中 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, \sqrt{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}\}$，$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 0, -\sqrt{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{1+y^2}\}$，如图 10-1 所示.

$$\iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (3x^2y + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

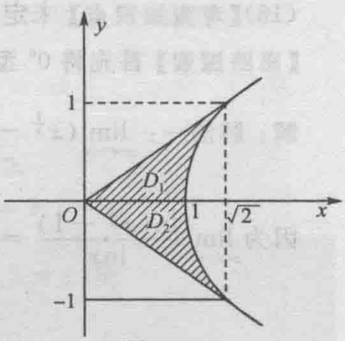

图 10-1

因为积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，被积函数 $3x^2y + y^3$ 是关于 $y$ 的奇函数，$x^3 + 3xy^2$ 是关于 $y$ 的偶函数.

故由对称性定理知 $\iint_D (3x^2y + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，

$$\iint_D (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以 $\iint_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2)\mathrm{d}x$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + 2y^2 - \frac{9}{4}y^4\right)\mathrm{d}y = \frac{14}{15}.$$

【错例分析】许多考生没有想到利用对称性简化运算，而是想在 $D_1$、$D_2$ 上分别求出积分相加得到结果，由于本题式子次数较高，式子较长，浪费了时间. 在遇到积分区域对称或被积函数具有奇偶性的二重积分时，应先考虑能否用到对称性简化计算，再求积分.

【方法点击】利用对称性来简化二重积分的计算是一种常用的有效方法. 在运用对称性时，必须兼顾被积函数和积分区域两个方面，两者的对称性要相匹配，归纳起来有如下几种常见的情形：

① 积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，那么

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{若 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数}, \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{若 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数}. \end{cases}$$

其中 $D_1 = \left\{(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in D \text{ 且 } x \geqslant 0\right\}$.

② 积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称,那么

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & 若\ f(x,y)\ 关于\ y\ 为奇函数,\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & 若\ f(x,y)\ 关于\ y\ 为偶函数.\end{cases}$$

其中 $D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x,y)\in D\ 且\ y\geqslant 0\right\}$.

③ 如果积分区域 $D$ 关于 $y=x$ 对称,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

(17)【考查知识点】多元函数约束条件下的极值(最值).

【思路探索】构造拉格朗日函数,解方程即可得.

解:设 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$

$$令\begin{cases}F_x'=y+2\lambda x=0\\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0\\ F_z'=2y+2\lambda z=0\\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0\end{cases}$$

解得可能最值点 $A(1,\sqrt{5},2)$,$B(-1,\sqrt{5},2)$,$C(1,-\sqrt{5},2)$,$D(-1,-\sqrt{5},2)$,$E(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$,$F(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,

比较 $u$ 在各点处的值有,$u(1,\sqrt{5},2)=u(-1,-\sqrt{5},-2)=5\sqrt{5}$ 为最大值.

$u(1,-\sqrt{5},2)=u(-1,\sqrt{5},-2)=-5\sqrt{5}$ 为最小值.

【方法点击】一般地,函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下最值问题的解题步骤为:

① 构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$;

② 消去 $\lambda$,求解方程组 $\begin{cases}F_x'=0\\ F_y'=0\\ F_z'=0\\ F_\lambda'=0\end{cases}$,得拉格朗日驻点 $(x_1,y_1,z_1)$,$(x_2,y_2,z_2)$,…;

③ 计算 $f(x_1,y_1,z_1)$,$f(x_2,y_2,z_2)$,…,并比较其大小即可.

(18)【考查知识点】定积分的性质.

【思路探索】(Ⅰ)利用定积分的性质即可,(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结论,由夹逼准则可解.

解:(Ⅰ)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$0\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$

故当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,$[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n$,所以 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$.

所以 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1|\ln t|\,t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(1+n)^2}$,

而 $\int_0^1|\ln t|\,t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^n\ln t\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_0^1+\int_0^1\dfrac{1}{n+1}t^n\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(n+1)^2}$,

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+n)^2}=0$,

根据夹逼准则知,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【方法点击】1) 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上可积,则有:

① 若在$[a,b]$上恒有 $f(x)\leqslant g(x)$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

② 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值为 $M$,最小值为 $m$,则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

③ 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

2) 对于结论:当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\ln(1+x)\leqslant x$. 可以如下证明:

令 $f(x)=\ln(1+x)-x$,则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1\leqslant 0$.

所以 $f(x)\leqslant f(0)=0$,即 $\ln(1+x)\leqslant x$.

(19)【考查知识点】拉格朗日中值定理与罗尔中值定理.

【思路探索】只要 $f(x)$ 在$[0,3]$上有三个不同点对应的函数值相等,则利用罗尔定理可证;借助(Ⅰ)的结论并利用介值定理即可.

证明:(Ⅰ)设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 2)$,则

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0).$$

由拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(0,2)$ 使

$$F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$$

即$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta)$.

由题设知$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$,

故 $f(\eta)=f(0)$.

(Ⅱ)因为 $f(2)+f(3)=2f(0)$,所以$\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$.

又因为 $f(x)$ 在$[2,3]$上连续,所以 $f(x)$ 在$[2,3]$上有最大值 $M$,最小值 $m$.

由 $m\leqslant f(2)\leqslant M,m\leqslant f(3)\leqslant M$,知 $m\leqslant\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)\leqslant M$.

由介值定理知,存在 $\zeta\in[2,3]$,使得 $f(\zeta)=f(0)$.

因 $f(x)$ 在$[0,\eta]$上连续,在$(0,\eta)$内可导,且 $f(0)=f(\eta)$,由罗尔中值定理知,存在 $\xi_1\in(0,\eta)$,使 $f'(\xi_1)=0$.

因 $f(x)$ 在$[\eta,\eta_1]$上连续,在$(\eta,\zeta)$内可导,且 $f(\eta)=f(\zeta)$,由罗尔中值定理知,存在 $\xi_2\in(\eta,\zeta)$,使 $f'(\xi_2)=0$.

又因为 $f(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]\subset[0,3]$上二阶可导,且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

由罗尔中值定理知,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使 $f''(\xi)=0$.

【方法点击】利用中值定理证明结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题主要有两种方法:

1) 利用罗尔定理:验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在$[a,b]$上满足罗尔定理的条件,再由该定理可证得命题.

2) 利用费马引理:验证 $\xi$ 为 $f^{(n)}(x)$ 的最值或极值点,用费马引理可证得命题.

(20)【考查知识点】方程组解的判别与通解的求法.

【思路探索】由 $|A|=0$ 及 $r(A)=r(A \vdots b)$ 可确定参数 $\lambda$ 的值;对确定的 $\lambda$,利用初等行变换法求 $Ax=b$ 的通解.

解:(Ⅰ)解法一:已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解,所以 $r(A)=r(A \vdots b)<3$. 对增广矩阵进行初等行变换,得:

$$(A \vdots b)=\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right]$$

当 $\lambda=1$ 时,$(A \vdots b)\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

此时,$r(A)<r(A \vdots b)$,方程组无解,所以 $\lambda\neq 1$.

当 $\lambda=-1$ 时,$(A \vdots b)\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right]$

由于 $r(A)=r(A \vdots b)=2<3$,所以 $a=-2$. 因此 $\lambda=-1, a=-2$.

解法二:已知 $Ax=b$ 有两个不同的解,

所以 $r(A)=r(A \vdots b)<3$.

于是 $|A|=0$,即有 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$,知 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$.

当 $\lambda=1$ 时,$r(A)=1\neq r(A \vdots b)=2$,此时,$Ax=b$ 无解,舍去.

所以 $\lambda=-1$.

把 $\lambda=-1$ 代入矩阵 $(A \vdots b)$,由 $r(A)=r(A \vdots b)$ 得 $a=-2$.

(Ⅱ)$(A \vdots b)=\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

原方程组的等价方程组为 $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2}+x_3\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$,其中 $x_3$ 为自由未知量.

令 $x_3=0$,得方程组特解 $u_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$.

方程组对应的齐次方程组的等价方程为$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$，其中 $x_3$ 为自由未知量，

令 $x_3 = 1$，得齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

所以 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $k$ 为任意常数.

【错例分析】1) 有些考生看到题设条件："已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解" 不知道如何下手，因为线性方程组在有解时，解存在的情况有两种：唯一解和无穷多解，而没有两个解的情况. 请注意条件中是存在（而不是仅存在）两个不同的解，不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$，而这两个不同解的线性组合 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$k_1, k_2$ 是满足 $k_1 + k_2 = 1$ 的任意常数）也是线性方程组的解，所以上述题设条件就是说明方程组有无穷多解. 这就要求考生在平时复习中应理解相关概念、结论，不可死记硬背.

2) 本题主要错误还有：由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 得到 $\lambda = 1$ 或 $-1$ 后，未能对 $\lambda$ 的两种取值进行讨论. 错误的原因是忽略了非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$. 这也是此类题目经常出现的错误，读者应特别注意.

【方法点击】$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，则有

1) 方程组有解的充分必要条件为 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$.

① 当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = n$ 时，方程组有唯一解.

② 当 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = r < n$ 时，方程组有无穷多解.

2) 方程组无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$.

(21)【考查知识点】实对称矩阵的正交对角化.

【思路探索】利用正交矩阵的构造特征，问题转化为已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 某特征值对应的特征向量反求 $\boldsymbol{A}$ 中参数的命题了；确定 $a$ 后，问题就可变为对称矩阵的正交对角化了.

解：由于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$ 可正交对角化，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，故 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

由 $\boldsymbol{A\xi}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1$，即 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解得 $\lambda_1 = 2, a = -1$.

于是 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.