

中等專業學校(1979)用

# 代數學教程

下 冊

Р. А. КАЛНИН 著  
趙根榕 張理京 譯

高等教育出版社

中等專業學校教學用書



代 數 學 教 程

下 冊

P. A. 卡爾寧 著  
趙根榕 張理京 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的卡爾寧(Р. А. Карнин)著“代數學教程”(Курс алгебры для техникумов)1952年初版翻譯的。原書經蘇聯高等教育部審定為中等技術學校教科書。

本書原由商務印書館出版,自1954年8月起改由本社出版。

## 代 數 學 教 程

下 冊

書號63(課59)

卡 爾 寧 著

趙 根 榕 張 理 京 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 琉 璃 廠 一 七 〇 號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新 華 書 店 總 經 售

壬 林 六 合 印 刷 所 印 刷

上 海 新 開 路 九 二 〇 弄 二 二 號

開本850×1168 1/32 印張5 4/16 字數 135,000

一九五四年八月上海新一版 印數30,001-130,000

一九五五年六月上海第七次印刷 定價 0.51

# 下 冊 目 錄

第八章 級數 .....	135
§ 89 數列 .....	135
§ 90 算術級數 .....	137
§ 91 算術級數任意項的公式 .....	138
§ 92 算術均值 .....	138
§ 93 算術級數前 $n$ 項和的公式 .....	139
§ 94 和 $S_n$ 的幾何解釋 .....	140
§ 95 應用和 $S_n$ 的公式的例子 .....	141
§ 96 自然數列的前 $n$ 個數的平方和 .....	142
§ 97 幾何級數 .....	143
§ 98 幾何級數任意項的公式 .....	143
§ 99 幾何均值 .....	144
§ 100 幾何級數前 $n$ 項的和 .....	145
§ 101 收斂幾何級數 .....	147
習題 .....	149
第九章 冪的一般概念。指數函數 .....	154
§ 102 零指數冪 .....	154
§ 103 負指數冪 .....	154
§ 104 零指數冪與負指數冪的運算 .....	156
§ 105 分指數冪 .....	157
§ 106 分指數冪的運算 .....	159
§ 107 無理指數冪的概念 .....	160
§ 108 指數函數 .....	161
§ 109 指數函數的圖象 .....	161
§ 110 指數函數的性質 .....	164
習題 .....	165
第十章 對數 .....	167
§ 111 對數的概念 .....	167
§ 112 反函數的概念 .....	168
§ 113 正函數與反函數圖象之間的依隨關係 .....	172

§ 114	對數函數及其圖象	173
§ 115	對數函數的性質	174
§ 116	對數的實用價值	175
§ 117	對數的一般性質	176
§ 118	積與商的取對數法	177
§ 119	對數式的還原法	178
§ 120	十進(常用)對數系	178
§ 121	對數的計算法	183
§ 121	對數的運算	185
§ 123	餘對數	187
§ 124	對數表	188
§ 125	真數表(或反對數表)	189
§ 126	線性內插法	190
§ 127	五位對數表	191
§ 128	應用對數計算法的例子	192
§ 129	由一個對數系變到另一個對數系的模	195
§ 130	用對數表計算時所生的誤差	195
§ 131	指數方程	197
§ 132	對數方程	199
§ 133	更複雜的非代數方程的解法	200
§ 134	對數簡史	201
	習題	202

## 第十一章 對數算尺 208

§ 135	對數算尺的部件及尺標的名稱	208
§ 136	函數尺標的概念	209
§ 137	對數尺標	210
§ 138	對數尺標的性質	212
§ 139	主尺標上的刻度	215
§ 140	在主尺標( $A$ 及 $A_1$ )上的定數法及讀數法	215
§ 141	用算尺作乘法	215
§ 142	數的位數	216
§ 143	積的位數的計算法	217
§ 144	除法	218
§ 145	乘除法的例子	219
§ 146	平方尺標上的刻度	220
§ 147	用平方尺標作乘法及除法的方法	221
§ 148	數的平方方法	222

§ 149	數的開平方法	223
§ 150	數的立方方法	225
§ 151	數的開立方方法	226
§ 152	最簡單的混合運算	227
§ 153	求數的十進對數法	229
§ 154	用對數算尺已知對數求真數法	230
§ 155	用對數算尺的對數尺標作計算的例子	230
§ 156	比例的解法	232
§ 157	比例劃分	234
§ 158	將算尺用作函數表	235
§ 159	已知直徑計算圓面積的方法及其反算法	235
§ 160	應用線條 $C$ 解題的例子	236
§ 161	正弦尺標	237
§ 162	$5^{\circ}44'$ 及 $90^{\circ}$ 之間角的正弦的求法	238
§ 163	按位數等於 0 的正弦值求角法	238
§ 164	$5^{\circ}44'$ 及 $45^{\circ}$ 間的角的正切的求法	239
§ 165	按位數等於 0 的正切求角的方法	239
§ 166	$45^{\circ}$ 及 $84^{\circ}17'$ 之間的角的正切的求法	240
§ 167	求正切的位數等於 1 的角的方法	240
§ 168	小角(由 $0^{\circ}34'$ 到 $5^{\circ}44'$ )的正弦及正切的求法; 正弦或正切的位數 為 -1 的角的求法	241
§ 169	由 $84^{\circ}17'$ 到 $90^{\circ}$ 間的角的正切的求法	242
§ 170	另一求角的正弦及正切與已知角的正弦或正切求角的方法	242
§ 171	三角形的解法	242
	習題	245

## 第十二章 複利, 結合及二項式

§ 172	複利公式	247
§ 173	分期償債基金	248
§ 174	確定年金	249
§ 175	結合	250
§ 176	排列	250
§ 177	排列數的公式	250
§ 178	全取排列	252
§ 179	組合	253
§ 180	組合的性質	255
§ 181	牛頓二項式. 引言	256
§ 182	只有第二項不相同的二項式的積	256

§ 183	二項式公式的性質	258
§ 184	完全數學歸納法	262
	習題	263
<b>第十三章 複數及其運算</b>		
§ 185	複數	265
§ 186	複數的幾何表示法	266
§ 187	複數的加法及減法	267
§ 188	複數的幾何加法	268
§ 189	複數的幾何減法	270
§ 190	複數的乘法	271
§ 191	複數的除法	272
§ 192	虛單位的冪	273
§ 193	複數的乘冪	274
§ 194	複數的開平方	274
§ 195	複數的三角形狀	276
§ 196	三角形狀的複數的乘法	278
§ 197	三角形狀的複數的除法	279
§ 198	三角形狀的複數的乘冪	279
§ 199	三角形狀的複數的開方	280
	習題	284
<b>中俄名詞對照表</b>		<b>289</b>
<b>俄中名詞對照表</b>		<b>292</b>

## 第八章 級數

### § 89 數列

例 1 由幾何學已知， $n$  邊凸多角形諸內角的和由公式

$$S_n = 2d(n-2)$$

決定：這兒的  $n$  只能取由  $n=3$  開始的自然數值，即正整數值，因為多角形的最少邊數為三。

給  $n$  以值： $n=3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ ，則得角和  $S_n$  的對應值：

$$S_n = 2d, 4d, 6d, 8d, 10d, \dots$$

例 2 打電報，每個字計 40 哥比。試用公式表達出電報費為其中所含字數的函數。

顯然，如果用  $n$  表示字數，用  $S$  表示電報費，則有

$$S = 40n。$$

在所舉的這兩個例子中，我們所談到的函數的自變量只許取自然數： $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  作為值。

在這種情形，函數是自然數自變量的函數。任何這種函數都叫做級列。我們現在再來舉幾個級列的例子。

例 3 如果平方每個自然數，則得到自然數的平方的級列： $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$ 。

例 4 對應於每一個自然數，可以舉出它的倒數。這些倒數作成級列：



$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n} \dots$$

例 5 開數 2 的平方，準確到 1，到 0.1，到 0.01 等等，就得到  $\sqrt{2}$  的弱近似值的敍列：

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$$

**定義** 自然數自變量的函數叫做敍列。這個函數的值叫做敍列的項。

對應於每一個自然數，這函數有一個完全確定的值，即敍列的一個完全確定的項。敍列可以用公式表出來，這個公式按敍列的每一項的號碼確定出來這一項，例如公式

$$S = \frac{n}{n^2 + 1}$$

確定敍列

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots (n=1, 2, 3, 4, \dots)$$

有些情形，敍列不用公式表示出來；在上面所舉的例 5，當考察 2 的平方根的準確度無限增高的近似值的敍列時，就是這種情形。這兒，一個法則代替了公式，依照這個法則再求出這個敍列的項；這個法則是：第一項是  $\sqrt{2}$  的準確到 1 的弱近似值，第二項是準確到 0.1 的，第三項是準確到 0.01，其餘依此類推。一般地，敍列的第  $n$  項是  $\sqrt{2}$  的準確到  $\frac{1}{10^{n-1}}$  的弱近似值。

如果敍列的每次一項都大於前一項，則這個敍列叫做上升敍列；例如，敍列

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots;$$

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots;$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}$$

它們都是上升級列。

如果級列的每次一項都小於前一項，則這個級列叫做下降級列；例如，級列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n};$$

$$-1, -10, -100, -1000, \dots, -10^{n-1}, \dots$$

就是這種級列。

註解 級列的項數假設是無限制的(無限的)，就是說，在它每一項的後面都跟隨着有另外的項。

有時在解某些問題時，必須要考察項數為有限的級列；例如，假設要求自然數列的前二十個偶數的和，這時就談到了級列  $2, 4, 6, \dots, 40$ ，它的一般項為  $a_n = 2n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, 20$ )。

這樣的級列(為與無限級列區別起見)叫做有限級列。

### § 90 算術級數

考察下列兩個級列：

$$4, 7, 10, 13, 16, \dots;$$

$$8, 3, -2, -7, -12, \dots.$$

它們的組成規律是一樣的：級列的任一項與緊靠它左邊(前邊)的那一項的差是常量。在第一個例子中，這個差等於  $7 - 4 = 10 - 7 = \dots = 3$ ；在第二個例子中，有  $3 - 8 = -2 - 3 = -7 - (-2) = \dots = -5$ 。

定義 有下列性質的數的級列叫做算術級數：每下一項可由前一項加上同一個數而得到，這同一個數叫做級數的公差。級數的公差用字  $d$  表示；因此，在第一個例子中  $d = 3$ ；在第二個例子中  $d = -5$ 。算術級數的項用  $a_1, a_2, a_3$  等等來表示；在第一個例子中  $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10$ 。

如  $d > 0$ ，則級數是上升的；當  $d < 0$  時，則是下降的。為說明某個

敘列是算術級數，在它前面加上一個記號  $\div$ ，例如  $\div 7, 9, 11, 13, \dots$ 。

如  $d=0$ ，則級數的各項都相等。這種級數沒有研究的價值。

### § 91 算術級數任意項的公式

按級數的定義有

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ 等等。}$$

一般地

$$a_n = a_1 + (n-1)d。$$

算術級數的任意項等於首項加上乘以所求的那一項之前的各項項數後的公差。

例 18, 14, 10, 6,  $\dots$ ;  $d = -4$ 。

試求  $a_{16} = ?$

$$a_{16} = a_1 + 15d; \quad a_{16} = 18 + 15 \cdot (-4) = -42。$$

### § 92 算術均值

假設  $a_{k-1}$ ,  $a_k$ ,  $a_{k+1}$  是算術級數的連接的三項，則由級數的性質，有

$$a_k - a_{k-1} = a_{k+1} - a_k,$$

$$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1},$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}。$$

兩個數的半和叫做它們的算術均值(數);因此,算術級數的任意項(首項除外)為其相鄰兩項的算術均值。

例 試在數 8 與 20 之間加入 7 個算術均數。這就是說, 必須求 7 個這樣的數, 它們與已知數 8 及 20 一塊兒作成首項為數 8, 第九項為數

20) 的算術級數。

有

$$a_9 = a_1 + 8d, \quad 20 = 8 + 8d, \quad d = 1.5.$$

所求的級數爲

$$\div 8, 9.5, 11, 12.5, 14, 15.5, 17, 18.5, 20.$$

這個例子可以推廣：如果要在數  $a$  與  $b$  之間加入  $k$  個算術均數，則有

$$b = a + (k+1)d,$$

$$d = \frac{b-a}{k+1}.$$

由首項與公差  $d$  即可寫出其餘各項。

### § 93 算術級數前 $n$ 項和的公式

先指出有限個項的算術級數的一個性質。

假設有

$$\div 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37.$$

加與級數首尾等距的項： $2+37=39$ ， $7+32=39$ ， $17+22=39$ ，我們看出來：算術級數的與兩端等距的兩項之和等於首末兩項之和。

應當如此，因爲這些和的首項（即 2, 7, 12, 17）增加 5，而第二項（37, 32, 27, 22）却減少 5；由此，每兩項的和保持不變。

現在來推求算術級數前  $n$  項和的公式。用  $S_n$  表示這個和：

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \quad (1)$$

將等式右邊的項顛倒次序來寫，和  $S_n$  並不因此而改變：

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1. \quad (2)$$

逐項加等式(1)與(2)，則得

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + \\ &\quad \div (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \end{aligned}$$

在每個括號裏都是級數的與兩端等距的兩項之和；因此，在括號裏的這些和都相等而且各等於首末兩項之和  $a_1 + a_n$ ；這些括號一共有  $n$  個，即有級數的項數那麼多個。所以有

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

算術級數的前  $n$  項之和等於首末兩項的半和乘上項數。

如利用算術級數一般項的式子： $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，則和的公式可以寫為另外的形式：

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

如已知  $a_1$ ,  $d$  與  $S_n$ ，要求級數的項數，利用這個公式方便。

### § 94 和 $S_n$ 的幾何解釋

茲用幾何方法推求算術級數前  $n$  項和的公式。

首先指出：如果矩形的底等於 1，則矩形的面積用與表達它的高的數相同的數來表達。

作各等於算術級數的項的  $n$  個矩形（第 41 圖），每個矩形的底都等於 1，所有的矩形都彼此緊緊地挨着，得階梯圖形（在圖上用陰影標誌出來的），它面積的數值等於  $S_n$ 。如在陰影的圖形上作一個同樣的圖形但已經“翻轉過來”，

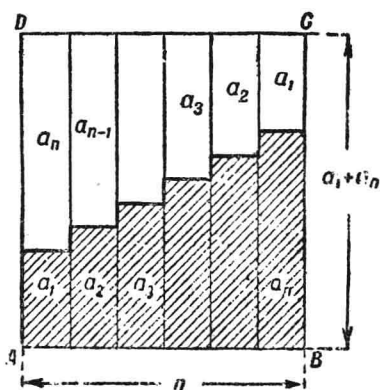


圖 41

則得底  $AB=n$  而高  $AD=a_1+a_n$  的矩形  $ABCD$ ; 階梯圖形的面積等於矩形面積的一半, 即  $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ 。

### § 95 應用和 $S_n$ 的公式的例子

例 1 試求自然數列之前  $n$  個數的和。有  $a_1=1, a_n=n$ ; 項數也等於  $n$ ; 由和的第一個公式可以寫出

$$S_n = \frac{(1+n)n}{2}。$$

例 2 試求級數

$$\div 18, 14, 10, 6, \dots$$

的前十項的和。這時  $d=14-18=-4, a_1=18, n=10$ 。由和的第二公式, 有

$$S_{10} = \frac{2 \times 18 + 9 \times (-4)}{2} \times 10; \quad S_{10} = 0。$$

例 3 級數的第四項等於 9, 第九項等於 -6。必須取幾項, 才能使它們的和等於 54?

$$a_9 = -6 \quad \text{或} \quad a_1 + 8d = -6,$$

$$a_4 = 9 \quad \text{或} \quad \frac{a_1 + 3d = 9}{5d = -15};$$

$$d = -3,$$

$$9 = a_1 + 3 \times (-3),$$

$$a_1 = 18。$$

由和的第二個公式, 有

$$54 = \frac{2 \cdot (18) + (n-1) \cdot (-3)}{2} n;$$

$$108 = (36 - 3n + 3) \cdot n;$$

$$36 = (13 - n)n;$$

$$n^2 - 13n + 36 = 0。$$

解這個二次方程，得

$$n_1 = 4, \quad n_2 = 9。$$

驗算可知，這兩個答案都滿足題的條件：

$$\div 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6;$$

$$S_4 = 54, \quad S_9 = S_4 + 0 = 54;$$

因為最後五項的和等於零。顯然，當級數有正負號相反而絕對值相等的項時，就發生這種情況。

### § 96 自然數列的前 $n$ 個數的平方和

用  $S_1$  表示自然數列的前  $n$  個數的和，而用  $S_2$  表示它們的平方和，則

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n;$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2。$$

如果在恆等式

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

中連接地給  $n$  以值  $1, 2, 3, 4, \dots, n$ ，則得

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1;$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1;$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1;$$

$$5^3 - 4^3 = 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1。$$

逐項相加這些等式：

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n) + n$$

或 
$$(n+1)^3 - 1^3 = 3S_2 + 3S_1 + n。 \quad (3)$$

但 
$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2}。$$

將  $S_1$  的值代入等式 (3) 中，得

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

由此 
$$6S_2 = 2(n^3 + 3n^2 + 3n) - 3n^2 - 3n - 2n = 2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1);$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。$$

同樣，由恆等式

$$(n+1)^3 - n^3 = 4n^2 + 6n + 1$$

出發，可以求得自然數列的前  $n$  數的立方和；得

$$S_3 = \left[ \frac{(1+n)n}{2} \right]^2 = S_1^2.$$

### § 97 幾何級數

**定義** 由下列規律組成的數列叫做幾何級數：每下一項等於前一項乘上相同的一個數。茲舉幾個幾何級數的例子：

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$$

第一個數列的由第二項開始的每項都等於前一項乘上 2；在第二個例子中，下一項可由前一項乘上  $\frac{1}{3}$  而得到；在第三個例子中可乘上  $-\frac{1}{2}$  而得到。

要求得下一項，前一項必須乘上的那個數叫做級數的公比。級數的公比用字母  $q$  來表示。幾何級數的項，與算術級數的項相同，用  $a_1, a_2, a_3$  等等來表示。幾何級數用記號  $\therefore$  放在它的項的前面來表示。

如果級數的公比  $q$  大於 1，則級數當  $a_1 > 0$  時是上升的，而當  $a_1 < 1$  時是下降的。如  $q=1$ ，則幾何級數的所有各項都相等。這種級數沒有研究價值。

在以上所舉的那些例子中，第一個級數是上升的，第二個是下降的，而第三個既不是上升的，也不是下降的。（這兒下一項有時大於前一項，有時小於前一項）。

### § 98 幾何級數任意項的公式

按幾何級數的定義，有



$$a_2 = a_1q,$$

$$a_3 = a_2q = a_1q^2,$$

$$a_4 = a_3q = a_1q^3, \text{ 等等}$$

顯然,

$$\underline{a_n = a_1 q^{n-1}。}$$

幾何級數的任意項等於首項乘上級數公比的冪，冪指數等於所求定的那一項以前各項的項數。

例 1 試求級數

$$\div 1, 3, 9, 27, \dots$$

的第八項。

在這個例子中  $a_1 = 1$ ,  $q = 3$ , 所以

$$a_8 = a_1 q^7;$$

$$a_8 = 1 \times 3^7 = 2187。$$

例 2 試求級數

$$2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$$

的第 10 項。

公比  $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $a = 2$ 。

$$a_{10} = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 = -2 \frac{2^4 \sqrt{2}}{2^9} = -\frac{\sqrt{2}}{16}。$$

### § 99 幾何均值

假設  $a_{k-1}$ ,  $a_k$ ,  $a_{k+1}$  是幾何級數的三個鄰項，其中趾標“ $k$ ”是大於 1 的任意自然數，則有

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k};$$