高等财经院校“十二五”精品系列教材

JINGPIN XILIE JI

# 微积分

（第二版）

刘贵基　刘太琳　主编

Calculus

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校"十二五"精品系列教材

JINGPIN XILIE JIAOCAI

# 微积分

（第二版）

刘贵基　刘太琳　主编　刘纪芹　黄秋灵　脱秋菊　郭磊　副主编

# Calculus

经济科学出版社
Economic Science Press

**图书在版编目（CIP）数据**

微积分/刘贵基，刘太琳主编．—2版．—北京：
经济科学出版社，2013.7
高等财经院校“十二五”精品系列教材
ISBN 978-7-5141-3700-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘…②刘… Ⅲ.①微积分-高等
学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第189972号

责任编辑：柳　敏　李晓杰
责任校对：徐领弟　靳玉环
版式设计：齐　杰
责任印制：李　鹏

微　积　分
（第二版）
主　编　刘贵基　刘太琳
副主编　刘纪芹　黄秋灵　脱秋菊　郭　磊
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010-88191217　发行部电话：010-88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http：//jjkxcbs.tmall.com
北京盛源印刷有限公司印装
710×1000　16开　29.5印张　530000字
2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷
印数：00001—20000册
ISBN 978-7-5141-3700-2　定价：49.00元
**（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010-88191502）**

# 总　　序

大学是研究和传授科学的殿堂，是教育新人成长的世界，是个体之间富有生命的交往，是学术勃发的世界。* 大学的本质在于把一群优秀的年轻人聚集一起，让他们的创新得以实现、才智得以施展、心灵得以涤荡，产生使他们终身受益的智慧。

大学要以人才培养和科学研究为己任，大学教育的意义在于它能够给人们一种精神资源，这一资源可以帮助学子们应对各种挑战，并发展和完善学子们的人格与才智，使他们经过大学的熏陶，学会思考、学会反省、学会做人。一所大学要培养出具有健全人格、自我发展能力、国际视野和竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，不可能有高质量的人才培养，不可能产生一流或特色鲜明的大学。大学教材应该是对学生学习的引领、探索的导向、心智的启迪。一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。

目前，中国的大学教育已从“精英型教育”走向“平民化教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提升？教材建设的功能愈显重要。

为了全面提高教育教学质量，培养社会需要的、具有人文精神和科学素养的本科人才，山东财经大学启动了“十二五”精品教材建设工程。本工程以重点学科（专业）为基础，以精品课程教材建设为目标，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十二五”精品系

---

* 雅斯贝尔斯著，邹进译：《什么是教育》，生活·读书·新知三联书店 1991 年版，第 150 页。

列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。本系列教材从选题、立项，到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关口，突出财经特色，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务，两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材汇集各领域最新教学与科研成果，对其进行提炼、吸收，体现了教学、科研相结合，有助于培养具有创新精神的大学生。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，本系列教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示当今社会发展的新理论、新方法、新成果。

本系列教材是山东财经大学教学质量与教学改革建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授、专家多年教学的经验和心血，是大家共同合作的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

**山东财经大学教材建设委员会**

2012 年 6 月

# 前　　言

微积分是高等学校经济类、管理类各本科专业的学科基础课。微积分学是一门研究变化的科学，它的发展与应用几乎影响了现代生活的所有领域。它与大部分科学分支关系密切，特别是物理学；经济学亦经常会用到微积分学。几乎所有现代技术，如建筑、航空等都以微积分学作为基本数学工具。微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，它是现代数学许多分支的基础，可以说它是继欧氏几何后，全部数学中的最大的一个创造。正如恩格斯曾指出的："在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。"

本教材根据教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的"经济管理类本科数学基础教学基本要求"、创新型人才培养的需求、考研大纲以及编者多年积累的丰富教学实践经验编写而成的，并在第一版的基础上进行了修订和完善。本教材在结构体系、内容安排、例题和习题的选取等方面都汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批"面向21世纪课程"和国家"十一五"及"十二五"规划教材，同时也凝结了作者多年来在大学数学教学方面积累的丰富实践经验。

作者在编写过程中特别注重以下几个方面：

1. 微积分是高等学校经济类、管理类各本科专业的学科基础课，因此，作者在编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性、注意到与后续课程的衔接，增加了数学在经济、管理分析中的应用以及经济管理数学模型等相关内容。

2. 体现问题探究教学法的思想，在重要概念引入时，先从概念产生的实际背景出发，以提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开编写，使学生能够知其所以然，提高学习兴趣，增强应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

3. 教材内容的深度恰当、广度合理。教材在内容安排上由浅入深，在例题和习题的选配上层次分明、难易适中，以满足不同读者的要求。习题的配备在第

一版的基础上做了一些调整，在难度上注重循序渐进性。教材在每节后都配置基本练习题，使读者能较好地理解和掌握本节的基本内容、基本理论和基本计算方法；在每章后配置综合性的习题，章后习题题型多样，其中带“*”的为历年考研真题，可供学有余力或有志报考硕士研究生的读者使用。

4. 为了便于学生自主学习，使学生更好地阅读外文教材和查阅外文资料，教材对基本概念给出了英文表述。

5. 教材中适量融入数学史与数学文化的教育，介绍有关概念和理论的发展历史及有关数学家的学术成就，以激发学生去思考、去发现和创新。

6. 注重理论联系实际，通过经济数学模型展示数学方法在经济管理领域中的成功应用，以培养学生具有初步的数学建模思想。

本教材内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程与差分方程，共 8 章。通过本课程的学习，使学生获得微积分、级数、常微分方程的基本知识、基本理论和基本运算技能，为学习后续课程奠定必要的数学基础，并在逻辑思维能力、空间想象能力以及实际计算能力方面得到显著的提高。

本书适合作为高等学校经济类、管理类各专业微积分课程的教材，也可供报考经济学、管理学门类硕士研究生的读者参考。讲授全书约需 118 学时，还可根据专业需要和不同的教学要求删减部分内容，分别供 90 学时、72 学时讲授使用。

本教材由刘贵基、刘太琳主编，参加编写的人员还有刘纪芹、黄秋灵、脱秋菊、郭磊。在编写过程中，得到了许多同行专家的帮助指导和经济科学出版社的大力支持，在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

**编者**

2013 年 6 月

# 目　录

# 第 1 章　函数与极限

函数是微积分学的研究对象，极限方法是研究函数的基本方法，而连续是函数变化的一个重要性态，它们是微积分的基础．本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

## §1.1　集　　合

### 1.1.1　集合的概念

集合[①]是现代数学中一个重要的概念，可以说几乎全部现代数学就是建立在集合这一概念的基础之上的．所谓**集合**(set)就是按照某些规定能够识别的一些确定对象或事物的全体．构成集合的每一个对象或事物称为集合的**元素**．例如，一间教室里的学生构成一个集合，方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 根的全体为一个集合，一直线上所有点的全体为一个集合．

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．若 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于 $A$，记作 $a\in A$；若 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 不属于 $A$，记作 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为**有限集**，否则称为**无限集**．

集合一般有两种表示法：列举法和描述法．所谓列举法就是把集合的元素都列举出来，并写在括号{　}中．例如，$A$ 是由 1,3,5,7,9 这五个数组成的集合，可表示成

$$A=\{1,3,5,7,9\}.$$

---

① 集合论的创始人德国数学家乔治・康托(Georg Cantor，1845～1918)1897 年指出：把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起，称为一个集合．

所谓描述法就是给出集合元素的特征，一般用

$$A=\{a \mid a \text{ 具有的特征}\}$$

来表示具有某种特征的全体元素 $a$ 构成的集合．例如，由 1，3，5，7，9 这五个数构成的集合 $A$，也可表示成

$$A=\{2n-1 \mid n<6, n \text{ 为自然数}\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．如果没有特别声明，以后提到的数都是实数．

习惯上，全体自然数的集合记作 $N$. 全体整数的集合记作 $Z$. 全体有理数的集合记作 $Q$. 全体实数集合记作 $R$，$R^+$、$R^-$、$R^*$ 分别为全体正实数、负实数、除 0 以外的实数的集合．

设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，若集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**(subset)，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 $A$ 包含于 $B$ 或 $B$ 包含 $A$.

若集合 $A$ 与集合 $B$ 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 $A$ 与 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，集合

$$\{x \mid x \in R, x^2+1=0\}$$

就是一个空集，因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的．规定空集是任何集合的子集．

## 1.1.2 集合的运算

设 $A$ 和 $B$ 是两个集合，由所有属于 $A$ 或者属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的**并**，记作 $A\cup B$；由所有既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的**交**，记作 $A\cap B$；由所有属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的**差**，记作 $A-B$. 有时，我们研究某个问题限定在一个大的集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 中进行，所研究的其他集合 $A$ 都是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的子集．此时，我们称集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 为**全集**，并把差 $\boldsymbol{\Omega}-A$ 特别称为 $A$ 的**余集**或**补集**，记作$\overline{A}$. 例如，在实数集 $R$ 中，集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$的余集

$$\overline{A}=\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡尔[①]乘积. 设 $A$、$B$ 是任意两个集合，则 $A$ 与 $B$ 的**直积**，记作 $A\times B$，定义为如下的由有序对 $(a,b)$ 组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

例如，$R\times R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$ 即为 $xOy$ 面上全体点的集合，$R\times R$ 常记作 $R^2$.

### 1.1.3　区间

区间是在微积分中最常用的一类数集. 设 $a$ 和 $b$ 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为以 $a$、$b$ 为端点的**开区间**(open interval)，记作 $(a,b)$. 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 $a$、$b$ 为端点的**闭区间**(closed interval)，记作 $[a,b]$. 即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$、$\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为以 $a$、$b$ 为端点的**半开区间**，分别记作 $[a,b)$、$(a,b]$. 即

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 此外还有所谓**无限区间**. 例如，

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}.$$

注意，这里的 $+\infty$(读作正无穷大)、$-\infty$(读作负无穷大)以及 $\infty$(读作无穷大)只是一种记号，既不能把它们视为实数，也不能对它们进行运算.

全体实数的集合 $R$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

邻域也是一个经常用到的集合，以点 $a$ 为中心的任何开区间称为点 $a$ 的**邻域**(neighborhood)，记作 $U(a)$.

设 $\delta\in R^+$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 $a$ 的一个邻域，这个邻域称为点 $a$ 的 **$\delta$ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 $a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径(见图 1－1).

---

① 笛卡尔(Descartes,1596～1650)近代数学的奠基人，法国数学家、哲学家、物理学家、生理学家. 笛卡尔在数学上的杰出贡献是将代数和几何巧妙地联系在一起，从而创造了解析几何这门数学学科.

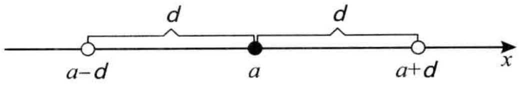


图 1—1

由于$\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$，因此

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

在微积分中还常常用到集合

$$\{x|0<|x-a|<\delta\}$$

这是在点 $a$ 的 $\delta$ 邻域内去掉中心 $a$ 所得到的集合，称为点 $a$ 的**去心 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，记作 $U(\hat{a},\delta)$. 即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，我们把开区间$(a-\delta,a)$称为点 $a$ 的**左 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，把开区间$(a,a+\delta)$称为点 $a$ 的**右 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**.

### 练 习 1.1

1. 设全集 $\Omega=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$\overline{A}\cup\overline{B}$.
2. 设集合 $A=(-\infty,-9)\cup(9,+\infty)$，$B=[-15,5]$，写出集合 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$及 $A-(A-B)$的区间表示.
3. 已知集合 $M=\{(x,y)|4x+y=6\}$，$N=\{(x,y)|3x+2y=7\}$，求 $M\cap N$.
4. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，求 $a$ 的值.
5. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来

   (1)$A=\{x||x+3|<2\}$；(2)$B=\{x|1<|x-2|<3\}$

# §1.2 函 数

## 1.2.1 常量与变量

在人们观察研究自然现象和社会现象的过程中，经常会涉及一些量，其中一些量在观察过程中始终保持一固定数值，称为**常量**，通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示；另一些量在观察过程中会不断变化，也就是可以取不同的数值，称为**变量**，通常用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示. 变量 $x$ 可取的值之集合 $X$ 称为变量的变化范围或取值

范围，记作 $x\in X$.

如果将变量看成是可以在一非空数集内任意取值的量，则常量可看成是在单元素集合中取值的变量，因而常量可看成是变量的特例.

### 1.2.2　函数的概念

在同一个问题中，往往同时有几个变量，这些变量的变化也不是孤立的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 下面的例子就属于这种情形.

**例1**　温度自动仪所记录的某地某天24小时气温变化曲线(图1－2)描述了当天气温 $T$ 随时间 $t$ 的变化情形.

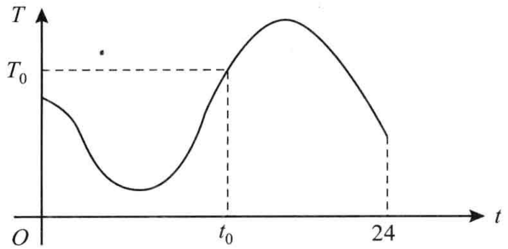


图1－2

对任何时刻 $t_0\in[0,24]$，可按图1－2上的曲线确定出一个对应的气温 $T_0$.

**例2**　某商品的单位成本为8元，$P$ 为销售单价，若公司已售出该商品50件，问公司可获得多少利润？此问题中，单位成本和销售量为常量，而销售价与利润为变量，销售价高则利润多，销售价低则利润少. 利润 $L$ 与销售价 $P$ 之间有关系：

$$L=50(P-8)\qquad (P>0)$$

当销售价 $P$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以唯一确定利润 $L$ 的相应数值.

我们抽去上面例子中所考虑量的实际意义，它表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

**定义 1.2.1**[①]　设 $x,y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的非空实数集，$x\in D$，$f$ 是变量 $x$ 与 $y$ 之间的对应关系．如果对于 $D$ 内的变量 $x$ 的每一个值，按照 $f$ 在 $R$ 内能确定唯一的变量 $y$ 的值与之对应，则称 $f$ 是定义在 $D$ 上的**函数**(function)，也称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中变量 $x$ 称为**自变量**，变量 $y$ 称为**因变量**，数集 $D$ 称为函数的**定义域**(domain)．当定义域是区间时，则将该区间称为定义区间．因变量 $y$ 与自变量 $x$ 之间的这种对应关系，通常称为**函数关系**．

如果 $x_0\in D$，则称函数在 $x_0$ 点有定义；如果 $x_0\overline{\in} D$，则称函数在 $x_0$ 点没有定义．对于 $x_0\in D$，按照 $f$ 与之相应的因变量 $y$ 的值，称为函数在 $x_0$ 点的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．当自变量 $x$ 取遍 $D$ 内的各个数值时，对应的函数值全体构成的集合，称为函数的**值域**(range)，记作 $R_f$．即

$$R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

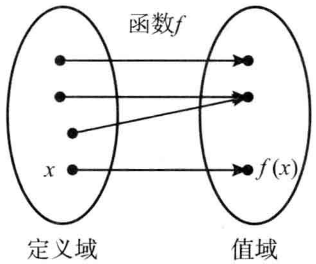


**图 1—3**

图 1—3 简明地标注了函数的定义域、值域及对应关系等．

函数 $y=f(x),x\in D$ 中表示对应关系的记号 $f$ 也可用其他字母．例如，用“$F$”、“$\varphi$”、“$h$”、“$g$”等，甚至有时用 $y=y(x),x\in D$ 表示函数，此时等号右边的 $y$ 表示对应关系．如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数，则必须用不同的记号分别表示这些函数，以示区别．

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定，而在纯数学问题中，常常是只给出函数变量间的对应关系，而没有指明定义域，这时我们认为其定义域就是按对应关系有唯一确定实数与之对应的自变量 $x$ 所能取的一切实

---

①　函数(function)一词，起用于 1692 年，最早见自莱布尼兹(Leibniz)的著作．记号 $f(x)$ 则是由瑞士数学家欧拉(Euler)于 1724 年首次使用的．

数值构成的集合．例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$，函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-5)}$ 的定义域是 $(5,6)\cup(6,+\infty)$．

设函数 $y=f(x), x\in D$，以 $D$ 内的每一点 $x$ 为横坐标及相应函数值 $f(x)$ 为纵坐标就在 $xOy$ 平面上确定一点 $P(x,f(x))$，当 $x$ 在 $D$ 内变动时，点 $P$ 便在坐标面上移动，所有这些点集合 $\{P(x,y)\mid x\in D, y=f(x)\}$，称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的**图形**(图 1—4)．

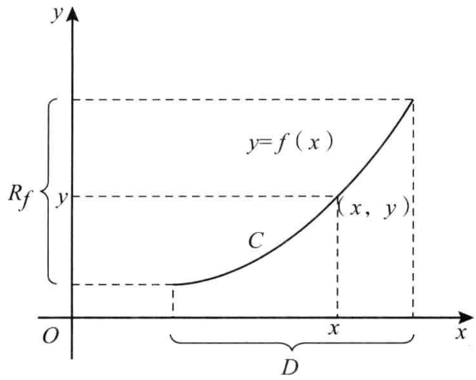


**图 1—4**

需要指出，函数的实质是指定义域 $D$ 上的对应关系 $f$，即确定函数的要素是定义域 $D$ 与对应关系 $f$．因此，常用记号“$f(x), x\in D$”，或“$f(x)$”、“$y=f(x)$”等来表示定义在 $D$ 上的函数，同时可得出对于两个函数，若它们的定义域和对应关系分别相同，则这两个函数相同，否则就是不同的．

例如，函数 $f(x)\equiv 1$ 与函数 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，它们的定义域都是 $R=(-\infty,+\infty)$，且对 $R$ 中的任一点 $x$，两者都对应着相同的实数 1，即有相同的对应关系，因此，它们是相同的函数．但对于函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$，由于定义域不同，所以它们是不同的函数．

**注**　在函数 $y=f(x), x\in D$ 中 $f(x)$ 表示将对应关系 $f$ 作用于 $x$．这里 $x$ 可指 $D$ 中的一个点，也可指与 $D$ 中某个点相当的数学表达式．

**例 3**　设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f(2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$．

**解**　由 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，得