普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

WEIJIFEN （下册）

张希荣 主 编

彭武安 张可铭 副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分（下册）

WEIJIFEN

主　编　张希荣

副主编　彭武安　张可铭

编　写　麻　娜

主　审　王昆阳

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内容提要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。本书根据本、专科生特别是以自学为主的学生的特点，力求用通俗的语言和实际例题使学生理解微积分的真正意义，本着由浅入深、循序渐进、通俗易懂、重点突出、难点分散、范例较多的原则，各个章节配有一定数量的习题，为了检验学生的学习效果还配备了自测题。有些经典范例具有一定的难度，对于那些有志深造的学生也有一定的参考价值。本书分上、下两册出版。

本书可作为普通高等院校本科生高等数学课程的教材，也可供高职高专、继续教育学生使用，还可作为自考学生的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分. 下册/张希荣主编. —北京：中国电力出版社，2012.2

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-2681-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第021874号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2012年8月第一版 2012年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 13印张 310千字

定价 **25.00** 元

前　言

微积分是本、专科工科各专业的公共基础课，本书按照教育部颁布的有关教学大纲编写，体现了各专业在微积分方面所必须具备的基本知识和基本能力的要求。在选材符合科学性、系统性的基础上，恰当地把握了内容的广度和深度，本着由浅入深、循序渐进、通俗易懂、难点分散、范例较多的原则，力求做到深入浅出、重点突出，尽可能用通俗的语言和实际背景使学生理解其真正意义。

本书每一节都附有适量的习题，书后有全部习题答案。书中还有阶段自测题，使学生能适时检测自己的学习情况，找出不足之处以便更好地掌握全书内容。

本书上册主编孙淑珍，副主编潘志、公敬、张可铭，参加编写的还有刘世普、魏军强。其中第一章由孙淑珍编写，第二章由张可铭编写，第三章、第七章由公敬编写，第四章由潘志编写，第五章、第六章由魏军强、刘世普编写。

本书下册主编张希荣，副主编彭武安、张可铭，参加编写的还有麻娜。其中第九章由张希荣编写，第八章由张可铭编写，第十章由彭武安编写，第十一章由张希荣、张可铭编写，第十二章由麻娜编写。本书由王昆阳主审。

由于编者水平有限，全书难免有错误和不妥之处，希望读者不吝指正。

编　者

2012 年 4 月

目录

第八章　向量代数与空间解析几何

解析几何是用代数的方法研究几何规律的学科，其本质是建立几何图形上的点与实数之间的关系，由此把曲线、曲面等几何图形与代数方程联系起来，用代数关系式来反映几何量之间的规律.

借助解析几何，可以把一些几何概念用代数形式表示，也可以把一些几何规律通过代数关系式来反映. 反之，解析几何可以给代数关系式以几何解释，使人们能直观地理解代数关系式的几何意义. 这两方面构成了解析几何的基本问题.

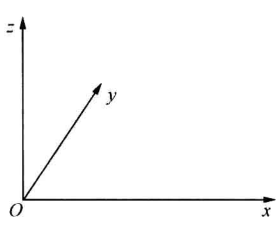
本章首先介绍空间直角坐标系，其次引入向量的概念，介绍向量的一些基本运算，然后以向量为工具讨论空间的曲面、曲线、平面和直线，最后介绍一些常见的二次曲面.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

所谓空间直角坐标系是指：给定一点 O，经过 O 点，引三条以该点为坐标原点且互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，通常称 O 点为坐标系原点，称 Ox、Oy、Oz 三个轴分别为 x 轴（或横轴）、y 轴（或纵轴）、z 轴（或竖轴），通常记这个坐标系为 $Oxyz$.

如果使右手的大拇指、食指和中指处于两两垂直的状态，且使他们分别指向 Ox、Oy、Oz 三个轴，称这样的坐标系 $Oxyz$ 为右手系，如图 8-1(a) 所示. 如果用左手按同样的方式确定的坐标系，则称为左手系，如图 8-1(b) 所示. 建立空间直角坐标系时，习惯上取右手系，今后若无特别说明，所用坐标系皆为右手系.



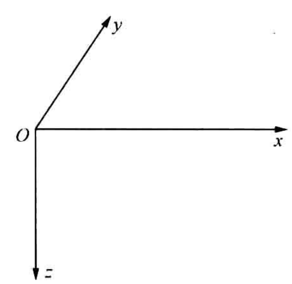


图 8-1

三个坐标轴 Ox、Oy、Oz 两两确定的三个互相垂直的平面，称为坐标平面，分别称为平面 xOy、平面 yOz、平面 zOx.

设 M 为空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 A、B、C. 设 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，则点 M 确定了一个三元有序数组. 反过来，在三个坐标轴上依次给定了三个点 A、B、C，并且 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，分别过点 A、B、C 作三个平面依次垂直于 Ox、Oy、Oz，则这三个平面交于一点 M，即一个三元有序数组 (x, y, z) 唯一地确定了空间一点. 从而空间一点 M 与一个三元有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系. 通常称这个三元有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标，并称 x 为 M 的横坐标，y 为 M 的纵坐标，z 为 M 的竖坐标，记为 $M(x, y, z)$，如图 8-2 所示.

三个坐标平面将空间分为八个部分，每个部分称为一个卦限. 这八个卦限用下述方法规定其顺序，如图 8 - 3 所示.

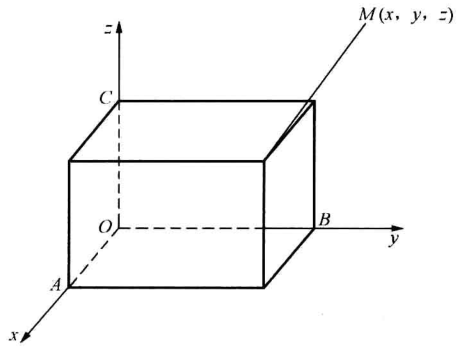


图 8 - 2

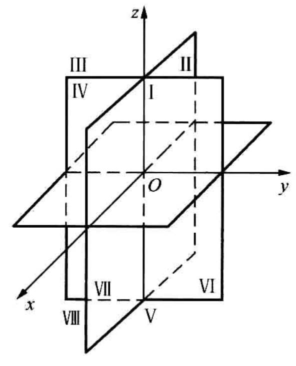


图 8 - 3

第Ⅰ卦限	$x>0$，$y>0$，$z>0$；	第Ⅱ卦限	$x<0$，$y>0$，$z>0$；
第Ⅲ卦限	$x<0$，$y<0$，$z>0$；	第Ⅳ卦限	$x>0$，$y<0$，$z>0$；
第Ⅴ卦限	$x>0$，$y>0$，$z<0$；	第Ⅵ卦限	$x<0$，$y>0$，$z<0$；
第Ⅶ卦限	$x<0$，$y<0$，$z<0$；	第Ⅷ卦限	$x>0$，$y<0$，$z<0$.

位于坐标平面或坐标轴上的点的坐标具有以下特性：

（1）原点的三个坐标都是 0，其坐标为 $(0, 0, 0)$；

（2）x 轴上的点的坐标为 $(x, 0, 0)$；

（3）y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$；

（4）z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$；

（5）在 xOy 平面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$；

（6）在 yOz 平面上的点的坐标为 $(0, y, z)$；

（7）在 zOx 平面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

二、两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，过点 M_1、M_2 分别作三个依次垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1、M_2 为对角线的长方体，如图 8 - 4 所示.

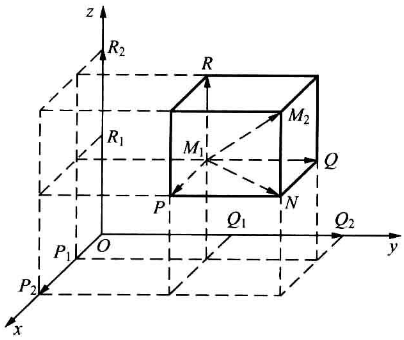


图 8 - 4

为了叙述方便，将 M_1 和 M_2 两点间的距离用记号 $|M_1M_2|$ 表示.

由勾股定理容易得

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$

$$=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2$$

注意到有以下式子成立：

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$$

$$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$$

$$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$$

从而有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{8-1}$$

式（8－1）称为空间 M_1 和 M_2 两点间的距离公式.

【例 8－1】 已知两点 $M_1(-1,0,1)$、$M_2(0,3,-1)$，求此两点间的距离.

解 由两点间的距离公式（8－1）有

$$\begin{aligned}|M_1M_2|&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\\&=\sqrt{[0-(-1)]^2+(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{14}\end{aligned}$$

【例 8－2】 在 y 轴上求一点 M，使其到点 $M_1(2,1,-1)$ 与 $M_2(1,-1,3)$ 的距离相等.

解 由于点 M 在 y 轴上，故可设其坐标为 $(0,y,0)$，由题意知

$$|MM_1|=|MM_2|$$

即

$$\sqrt{(0-2)^2+(y-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(y+1)^2+(0-3)^2}$$

解此方程得 $y=-\dfrac{5}{4}$，故所求点的坐标为 $M\left(0,-\dfrac{5}{4},0\right)$.

【例 8－3】 试判断以 $A(0,2,3)$、$B(3,5,3)$、$C(6,2,3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的几何特征.

解 由空间两点间的距离公式（8－1）有

$$|AB|^2=(3-0)^2+(5-2)^2+(3-3)^2=18$$

$$|BC|^2=(6-3)^2+(2-5)^2+(3-3)^2=18$$

$$|AC|^2=(6-0)^2+(2-2)^2+(3-3)^2=36$$

由于 $|AB|^2=|BC|^2$，可知 $AB=BC$，因而 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

习　题　8－1

1. 当 P 点处于以下位置时，请指出它的坐标所具有的特点：

（1）P 点在 zOx 坐标面上；

（2）P 点在 Ox 轴上；

（3）P 点在与 yOz 平面平行且相互距离为 2 的平面上；

（4）P 点在与 Oz 轴垂直且与原点相距为 5 的平面上.

2. 指出 $P(1,-2,-1)$ 在下列对称点的坐标：

（1）与三个坐标平面分别对称；

（2）与三个坐标轴分别对称；

（3）与坐标原点对称.

3. 设某立方体的一个顶点在原点，有三条棱均落在坐标轴的正半轴上，如果立方体的边长为 a，则求此立方体各个顶点的坐标.

4. 证明：$P_1(1,2,3)$、$P_2(2,3,1)$、$P_3(3,1,2)$ 三点的连线构成一个正三角形.

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

向量是用代数方法认识几何规律的基本工具. 平常所遇到的量，可以分为两类：第一类是在选定了某个单位以后完全可以用数值来表示，如质量、时间、面积、体积等，通常称这种量为数量（或标量）；另一种量不仅有大小，而且有方向，如力、速度等，通常称这种量为向量（或矢量）.

向量通常用具有一定长度和方向的有向线段来表示. 称这个确定的长度为向量的大小或向量的模，确定的方向称为该向量的方向.

特别地，模为 1 的向量称为单位向量；模为 0 的向量为零向量，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向可以看做是任意的.

若 A 为向量的起点，B 为终点，通常记为$\overrightarrow{AB}$，或用小写的黑体字 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等来表示. 向量$\overrightarrow{AB}$（或 $\boldsymbol{a}$）的模通常记为$|\overrightarrow{AB}|$（或$|\boldsymbol{a}|$）.

若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模相等，且它们的方向也相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为$-\boldsymbol{a}$.

由向量相等的定义可以看出，它有两个条件：两个向量的模相等、方向相同（与向量的起点和终点无关）. 通常称与起点和终点无关的向量为自由向量. 若无特别说明，下面所讨论的向量均指自由向量.

仿照物理学中力的合成法则，可以定义向量的线性运算.

二、向量的加法

由物理学可以知道：如果两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在某物体的同一点上，则合力 $\boldsymbol{F}$ 的方向是以 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线的方向，如图 8-5 所示. $\boldsymbol{F}$ 的大小为该对角线的长度.

类似地，可以定义向量的加法. 向量的加法运算规定如下：

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为不在同一条直线上的两个向量. 将它们的始点移到同一点 O，并记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$，如图 8-6（a）所示. 称$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

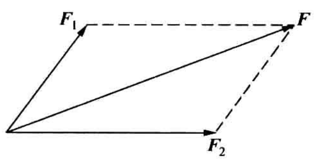


图 8-5

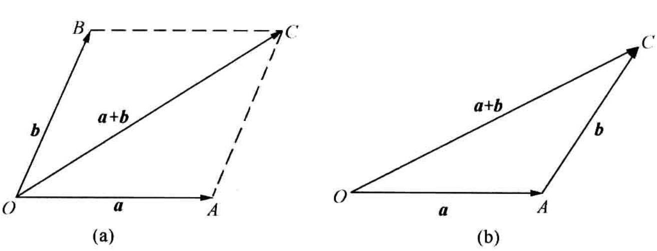


图 8-6

用平行四边形的对角线确定两个向量的和的方法，称为向量加法的平行四边形法则.

注意到图 8-6 中$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则可简化向量求和：自 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A，作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，则向量$\overrightarrow{OC}$即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，如图 8-6（b）所示，这种向量求和的方法常称为向量加法的三角形法则.

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量求和的问题中. 如给定了向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$. 则以任一点 O 作为向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点，然后再从 $\boldsymbol{a}$ 的终点引出向量 $\boldsymbol{b}$、…、从 $\boldsymbol{d}$ 的终点引出 $\boldsymbol{e}$. 则以点 O 为始点，以上述向量折线中 $\boldsymbol{e}$ 的终点为终点的向量记为 $\boldsymbol{s}$，则 $\boldsymbol{s}$ 为上述向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、…、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$ 之和，记为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$$

如图 8 - 7 所示.

若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，此时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之和可以依照三角形法则确定. 即当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，其定义的向量与这两个向量的方向相同，其模为这两个向量模的和；当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 方向相反时，定义其和向量的方向与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中模较大的向量方向相同，而和向量的模等于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中较大的模减去较小的模的值.

容易验证，向量加法运算满足交换律、结合律.

三、向量的减法

规定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，利用上面求向量和的平行四边形法则可以求出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如图 8 - 8 所示，作出以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形 $OAC'B'$，其对角线 $\overrightarrow{OC'}$ 即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

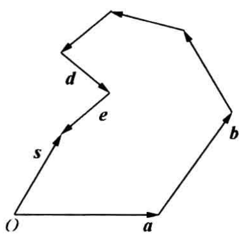


图 8 - 7

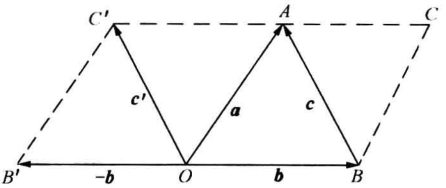


图 8 - 8

注意到 $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{BA}$，为简化计算，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 可以定义为：将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点移到点 O，记为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，则由 $\overrightarrow{OB}$ 的终点 B 到 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 的向量 $\overrightarrow{BA}$，即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，称之为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差.

上述简化的求向量之差的方法常称为向量减法的三角形法则.

四、向量与数的乘法

给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ，则定义 $\lambda\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}\lambda$）为向量与数的乘法，它表示一个向量，其模与方向规定如下：

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍（$|\lambda|$ 为 λ 的绝对值）；因此有 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

特别地，当 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，常记为 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

容易验证

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

$\lambda\boldsymbol{a}$ 也称为与 $\boldsymbol{a}$ 共级或平行，记作 $\lambda\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{a}$.

命题　非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于向量 $\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件存在唯一数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

【例 8 - 4】　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、

$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点（见图 8 - 9）.

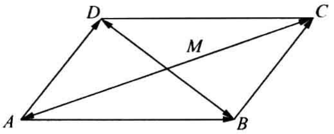


图 8 - 9

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

即

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$$

所以

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$$

所以

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

【例 8 - 5】 求解以向量为未知量的线性方程组

$$\begin{cases}4\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$$

解 如同解以实数为未知量的线性方程组那样，可得

$$\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{y}=4\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$$

习 题 8 - 2

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{a}$，求 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$.

2. 设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 是一个正六边形，并设 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{A_1A_2}$，$\boldsymbol{v}=\overrightarrow{A_1A_6}$，试用 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 表示出$\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{A_2A_3}$、$\overrightarrow{A_3A_4}$、…、$\overrightarrow{A_6A_1}$.

3. 根据向量加法的平行四边形法则说明 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，并指出等号何时成立.

4. 设 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{a}$.

5. 用向量法证明：梯形两腰中点的连线平行于底边且等于两底边和的一半.

6. 已知△ABC 两边的向量为$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$，D 是 BC 边上的中点，试用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$表示中线向量$\overrightarrow{AD}$.

7. 设菱形 $ABCD$ 相邻两边的向量为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示菱形的面积.

第三节 向量的代数表示

一、向量的坐标表示式

为了能够使向量作为研究几何图形的工具，需要把向量运算用代数形式表示. 为此，先

建立空间直角坐标系，若将向量的起点移到坐标系原点 O，则这个向量完全由其终点所确定；反过来，对于空间任意一点 M，总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$，因此可以说空间中的点与起点在原点的向量存在着一一对应关系. 通常向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为从点 O 到点 M 的向径. 设点 M 的坐标为 (x, y, z)，即 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$，如图8 - 10所示.

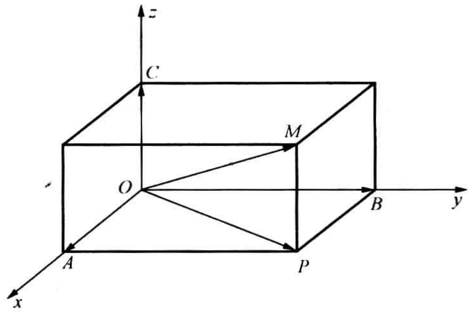


图 8 - 10

由向量的加法法则可知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取三个以坐标轴的正向为方向的单位向量，并依次记为 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$，称其为基本单位向量. 由数与向量乘法运算可知

$$\overrightarrow{OA}=x\mathbf{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\mathbf{j},\quad \overrightarrow{Oz}=z\mathbf{k}$$

称它们为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的分向量，通常记为

$$\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{8 - 2}$$

称式（8 - 2）为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式或向量在坐标轴上的分解. 为了方便，简记为

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)\text{ 或 }\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$$

二、向量在轴上的投影

若给定一轴 $\boldsymbol{u}$ 及轴外一点 A，过点 A 作与轴 $\boldsymbol{u}$ 垂直的平面 π，设轴 $\boldsymbol{u}$ 与平面 π 的交点为 A'，如图 8 - 11 所示，则称 A' 为点 A 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影.

若给定向量 $\overrightarrow{AB}$ 及轴 $\boldsymbol{u}$，设 A'、B' 分别为点 A、B 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影，则称 $A'B'$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影，如图 8 - 12 所示. 常记为 $\mathrm{Prj}_{\mathbf{u}}\overrightarrow{AB}=A'B'$.

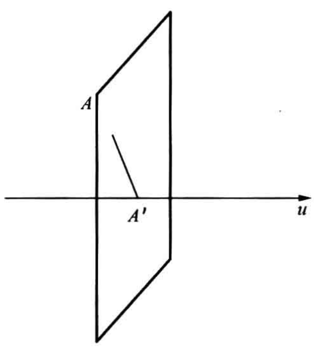


图 8 - 11

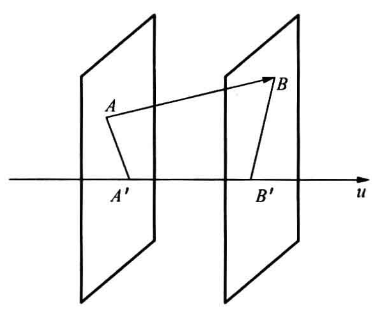


图 8 - 12

若轴 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 相交于点 O，将其中任一轴绕点 O 在两轴所定义的平面内旋转，使其正向与另一轴正向重合所确定的角度，定义为两轴的夹角，由于旋转的方向有逆时针和顺时针两种情形，因此夹角可能有两个. 通常规定两轴间夹角限定在 0 与 π 之间，且不分轴的顺序.

若轴 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 不相交，可在空间任取一点 O，自点 O 引出分别与轴 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$ 具有相同方向的轴 $\boldsymbol{u}_1'$、$\boldsymbol{u}_2'$，定义 $\boldsymbol{u}_1'$ 与 $\boldsymbol{u}_2'$ 之间的夹角为 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 之间的夹角.

若给定轴 $\boldsymbol{u}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，则任意引出一轴 $\boldsymbol{u}'$，使其方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，则定义 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{u}'$ 之间的夹角为向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 间的夹角.

类似地，给定两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，任意引两轴 u_1、u_2 使它们的方向分别与向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向相同，则 $\boldsymbol{u}_1$ 与 $\boldsymbol{u}_2$ 之间的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

向量在轴上的投影有以下两个性质.

性质 1 $\mathrm{Prj}_{\mathbf{u}}\overrightarrow{AB}=|AB|\cos\varphi$

其中 φ 为轴 $\boldsymbol{u}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角.

性质 2 有限个向量的和在任意给定轴上的投影等于各向量在该轴上的投影之和，即

$$\mathrm{Prj}_{\mathbf{u}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{e})=\mathrm{Prj}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{b}+\cdots+\mathrm{Prj}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{e}$$

三、向量线性运算的代数表示

由上述两段可知，若向量 $\overrightarrow{OM}=(x, y, z)$，则易知向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 x、y、z. 习惯上称向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影 x、y、z 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

利用向量的坐标及投影的性质，可以将向量的线性运算用代数形式表示.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，即

$$\boldsymbol{a}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{b}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\mathbf{i}+(y_1+y_2)\mathbf{j}+(z_1+z_2)\mathbf{k} \tag{8-3}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\mathbf{i}+(y_1-y_2)\mathbf{j}+(z_1-z_2)\mathbf{k} \tag{8-4}$$

【例 8-6】 已知 $\boldsymbol{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\boldsymbol{b}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$、$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解 由于 $\boldsymbol{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\boldsymbol{b}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，可知

$$2\boldsymbol{a}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+4\mathbf{k}, 3\boldsymbol{b}=9\mathbf{i}+6\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

所以

$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(2+9)\mathbf{i}+(-4+6)\mathbf{j}+(4-3)\mathbf{k}=11\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(2-9)\mathbf{i}+(-4-6)\mathbf{j}+(4+3)\mathbf{k}=-7\mathbf{i}-10\mathbf{j}+7\mathbf{k}$$

四、向量的模与方向余弦的代数表示

由本章第一节知道，若点 M 的坐标为 (x, y, z)，则 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

描述向量的方向，通常用该向量与各坐标轴之间的夹角的余弦来表示，设向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向的夹角分别为 α、β、γ，如图 8-10 所示，显然

$$OA=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha, OB=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta, OC=|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma$$

即

$$\cos\alpha=\frac{OA}{|\overrightarrow{OM}|}, \cos\beta=\frac{OB}{|\overrightarrow{OM}|}, \cos\gamma=\frac{OC}{|\overrightarrow{OM}|}$$

通常称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为该向量的方向余弦.

如果用向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示，则有

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

从而有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

通常称与方向余弦成比例的一组实数 m、n、p 为该向量的方向数，即若 m、n、p 满足

$$\frac{m}{\cos\alpha}=\frac{n}{\cos\beta}=\frac{p}{\cos\gamma}$$

则称 m、n、p 为该向量的方向数.

另外，由单位向量的定义可知，($\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$)为与$\overrightarrow{OM}$同向的单位向量.

【例 8-7】　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴正向间的夹角分别为 $\alpha=60°$，$\beta=120°$，求该向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴正向间的夹角 γ.

解　由方向余弦的关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

及 $\alpha=60°$，$\beta=120°$可知

$$\cos\alpha=\cos60°=\frac{1}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{4}$$

$$\cos\beta=\cos120°=-\frac{1}{2},\quad \cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

故有

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $\gamma=45°$或 $135°$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴正向间的夹角 γ 为 $45°$或 $135°$.

【例 8-8】　已知点 $A(x_1，y_1，z_1)$、$B(x_2，y_2，z_2)$，求线段 AB 的中点 M 的坐标.

解　设线段 AB 连线的中点 M 的坐标为 $(x，y，z)$，由题设可知$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，且有

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

$$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

因此

$$x-x_1=x_2-x,y-y_1=y_2-y,z-z_1=z_2-z$$

由此可得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

习惯上称上式为中点公式.

习　题　8-3

1. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模是 5，它与 x 轴的夹角为$\frac{\pi}{4}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影.

2. 一向量的中点为点 $B(2，-1，7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、-4、7，求该向量的始点 A 的坐标.

3. 已知空间中的三点 $A(0，-1，2)$、$B(-1，3，5)$、$C(3，-1，-2)$，计算 $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=(2，0，-1)$、$\boldsymbol{b}=(1，-2，-2)$，试求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$、$2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$、$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

5. 设 $\boldsymbol{a}=(2，-2，-1)$，试求与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\mathbf{e}_a$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$，$\boldsymbol{b}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}-7\mathbf{k}$，$\boldsymbol{c}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}$，$\boldsymbol{u}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试求（1）$\boldsymbol{u}$ 在 y 轴上的投影；（2）$\boldsymbol{u}$ 在 x 轴和 z 轴上的分量.

7. 设 $A(2,-1,1)$、$B(1,2,2)$，试求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦.

第四节 向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

引例 外力做功问题

由物理学知识可以知道，若质点受外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，沿直线运动，位移为 $\boldsymbol{s}$，设位移方向与力的方向间的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$，则这个力所做的功 W 为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}})$$

依据上述运算，本节引入向量的另一种运算。

定义 1 若给定向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，定义数值 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或内积、点积），记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \tag{8-5}$$

由数量积的定义可以证明下面的结论：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

（2）两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积满足下列运算律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则向量的数量积可以用向量的坐标来表示：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})\cdot(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})\\&=x_1x_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}+x_1y_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+x_1z_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}+y_1x_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}+y_1y_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\\&\quad+y_1z_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}+z_1x_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}+z_1y_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+z_1z_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 是互相垂直的单位向量，所以

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{8-6}$$

由式（8-6）可知，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 垂直当且仅当 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ 时成立.

特别地，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=x_1^2+y_1^2+z_1^2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$$

注意到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时有

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

仿照向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{a}$ 上投影的定义，可以定义向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影为 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，