中学数学学习指南丛书

高中几何

解正己 主编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

中学数学学习指南丛书

高中几何

主　编　解正己

编　著　徐　宏　杨化奎

　　　　陈龙海　潘　佩

主　审　杜　平　廖云儿

中国水利水电出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中几何/解正己主编．—北京：中国水利水电出版社，1998.11

（中学数学学习指南丛书）

ISBN 7-80124-881-3

Ⅰ．高…　Ⅱ．解…　Ⅲ．几何课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G633.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 29048 号

书　　名	中学数学学习指南丛书　**高中几何**
作　　者	解正己　主编
出版、发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sale@waterpub.com.cn 电话：(010)63202266(总机)、68331835(发行部)
经　　售	全国各地新华书店
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市朝阳区小红门印刷厂
规　　格	787×1092 毫米　32 开本　12 印张　276 千字
版　　次	1999 年 1 月第一版　1999 年 1 月北京第一次印刷
印　　数	00001—10060 册
定　　价	**15.50** 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页者，本社发行部负责调换

前　言

数学是中学最重要的课程之一．为配合实施素质教育的需要，激发中学生的学习兴趣，帮助他们系统牢固地掌握基础知识和基本技能，加深对基本概念、定理、公式、法则的理解，培养运用基础知识分析问题、解决问题的能力，特别是帮助他们在学习现行全日制中学数学每一章节后进行系统复习的需要，我们特组织编著这套《中学数学学习指南丛书》，以供学生课外阅读和教师教学参考之用．

本丛书包括初中数学、高中代数、高中几何三个分册，每个分册的各讲与现行中学教材完全平行，由基本内容概述、基本方法与技巧、练习题与自我测验题四个部分组成．

“基本内容概述”部分，不论是对基础知识和基本技能的阐述，还是对重点、难点内容的分析等，都注意渗透数学的思想和方法，这对学生如何根据数学本身的特点学好数学，无疑具有重要意义．

“基本方法与技巧”部分，能从覆盖教材内容的基本要求出发，精心选择题型、题例，整个内容既能突出最基本的、最重要的基础知识和基本技能的主体地位，又能做到寓其解法于深刻理解基础知识和熟练掌握基本技能之中，这对学生紧扣教材学好数学将起到直接的指导作用．

“练习题”部分，分为 A、B 两组，能从中学数学教学的基本要求出发，兼顾系统复习和培养能力的需要进行精选与安排，力求具有典型性、代表性、新颖性、阶梯性、启发性，并安排少量具有一定难度的习题（一般注以 * 号），以达到普及与提高、练习与研究相结合的目的．

“自我测验题”部分，是为帮助读者系统复习和作自我学习检查安排的，题型、题量和计分方法参照重点中学教学设计，有较好的针对性、实用性，一般要求在120分钟内独立完成.

本丛书既适合中学生配合平时学习有关章节时使用，又适合初三或高三毕业复习迎考之用；既是中学生有益的课外读物，又是教师较好的教学参考用书.

参加本分册编著工作的均为长期从事中学数学教学与研究的特级教师和高级教师或是在教学、教改实践中作出显著成绩的中青年骨干教师，他们都具有较高的理论水平与丰富的实践经验. 本书在编著过程中，得到了章士藻教授、何履端副教授、特级教师陆顺苑的具体指导和严新国、张呈庆、顾正华、成开华等同志的大力帮助，谨此表示衷心的感谢. 同时还望广大中学师生提出批评和指正，以便进一步修改完善.

编 者

1998年8月

目　录

立体几何部分

天

第一讲　直线和平面

一、基本内容概述

本讲主要研究平面和直线，其中平面的概念和性质是研究空间图形性质的基础，也是将空间图形问题转化为平面图形问题的重要依据. 在此基础上，分别研究直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系及有关的性质和判定方法. 位置关系中平行和垂直关系的性质和判定是本讲的重点，而角和距离是进行位置关系定量研究的主要课题，也是本讲的难点.

（一）平面的基本性质及其作用

平面是无限延展的，这是平面的一个重要属性. 公理Ⅰ～Ⅲ及其三个推论揭示了平面的基本性质.

(1)公理Ⅰ是判定直线在平面内的依据，用集合符号表示为 $A\in\alpha$, $B\in\alpha\Rightarrow AB\subset\alpha$. 以“直线在平面内”的意义为根据，我们常用下面的推理判定“点在平面内”，即 $A\in l$, $l\subset\alpha\Rightarrow A\in\alpha$. 简言之，点在线上，线在面内，则点在面内.

(2)公理Ⅱ是判定两个平面相交的依据，用集合符号表示为 $A\in\alpha, A\in\beta\Rightarrow A\in a=\alpha\cap\beta$.

对公理Ⅱ(如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线)可进一步作如下理解：①如果两个平面有两个公共点 A、B，那么直线 AB 就是它们的交线；②如

果两个平面有三个或更多的公共点，那么这些点共线(都在交线上)；③如果两个平面相交于直线 l，且点 P 是这两个平面的公共点，则点 P 在交线 l 上.

以此可证空间“点共线”或“线共点”的问题.

例 1 如图 1-1，已知 O_1 为正方体 AC_1 上底面的中心，截面 AB_1D_1 与对角线 A_1C 交于 P. 求证：A、P、O_1 共线.

证明 由 A_1C_1 与 B_1D_1 交点为中心 O_1，连 AC，显然 A、O_1 为平面 AB_1D_1 与平面 ACC_1A_1 的公共点，

$\therefore$ AO_1 为这两个平面的交线，$P\in A_1C\subset$面 ACC_1A_1，

又 $P\in$面 AB_1D_1，

$\therefore$ $P\in AO_1=$ 面 $ACC_1A_1\cap$ 面 AB_1D_1，即 A、P、O_1 共线.

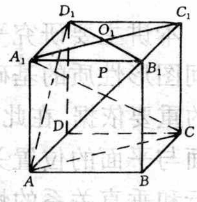

图 1-1

例 2 三个平面 α、β 和 γ 两两相交得到三条交线 a、b 和 c，$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$. 求证：$a/\!/b/\!/c$ 或 a、b、c 交于一点.

证明 由 $a\subset\beta$，$b\subset\beta$ 知，a、b 为共面两直线，a 与 b 不是平行就是相交.

若 $a/\!/b$，$b\subset\gamma$，$a\not\subset\gamma\Rightarrow a/\!/\gamma$，又 $a\subset\alpha$，$\alpha\cap\gamma=c\Rightarrow a/\!/c$，

$\therefore$ $a/\!/b/\!/c$，如图 1-2(a).

若 $a\cap b=P$，则 $P\in a\subset\alpha$，$P\in b\subset\gamma$，而 $\alpha\cap\gamma=c\Rightarrow P\in c$，

故 a、b、c 三线共点，如图 1-2(b).

(3)公理Ⅲ及其推论是确定平面的位置以及判定两个平面重合的依据. 例如，利用公理Ⅲ证明两个平面重合的推理形式是

$$\left.\begin{array}{l}A、B、C\in\alpha\\A、B、C\in\beta\\A、B、C\text{ 不共线}\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\text{ 与 }\beta\text{ 重合}.$$

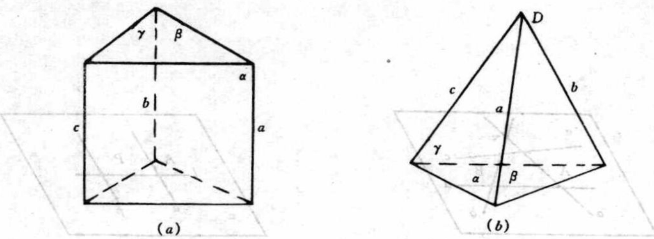

图 1-2

证明空间的若干个点和若干条直线都在同一个平面内这类问题的常用证法有:①先由给定的点或直线中的某些元素确定一个平面,然后证明其余的元素都在这个平面内;②在给定的点或直线中,指出其中的某些元素在一个平面内,其余的元素在另一个平面内,然后证明这两个平面重合.

例 3 求证:两两相交且不共点的四条直线必在同一平面内.

证明 如图 1-3 所示,四条直线 a、b、c、d 两两相交,且不共点,所以 a、b、c 两两相交于不共线的三点,这三点确定一个平面 α,且 a、b、$c\subset\alpha$. 设 $d\cap a=A$,$d\cap b=B$,则

$$\left.\begin{aligned}&A\in a,B\in b\\&a,b\subset\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&A\in\alpha,B\in\alpha\\&A\in d,B\in d\end{aligned}\right\}\Rightarrow d\subset\alpha.$$

故四直线 a、b、c、d 在同一平面内.

例 4 求证:与同一条直线相交的所有平行线都在同一个平面内.

证明 如图 1-4,设直线 a 与 l 相交于点 A,过直线 a 和 l 可确定一平面 α. 过直线 l 上异于点 A 的任一点 P 作与 a 平行的直线 p. 设过平行两直线 a、p 所确定的平面为 β. 显然平面 α 和 β 都通过直线 a 和其外一点 P,所以平面 β 与 α 重合. 因此与 l

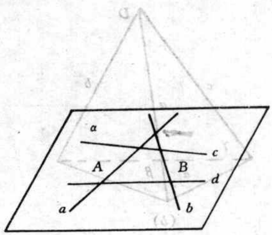

图 1-3

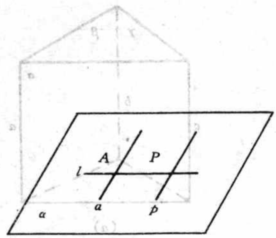

图 1-4

相交且与 a 平行的所有直线都在平面 α 内.

说明 这种以"任一"代表"所有的"进行证明的思想方法，希望读者能予以理解，并切实掌握.

例 5 已知斜线 l 与平面 α 相交于点 O，求证：l 上所有点在 α 内的射影共线，且该直线过点 O.

证明 设 A 是 l 上异于 O 的一点，它在平面 α 内的射影为 A'（图 1-5）.

在 l 上取异于 O、A 的任一点 P，设点 P 在 α 内的射影为 P'，只要证明三点 O、A'、P' 共线就行了.

$\because AA' \perp \alpha, PP' \perp \alpha$,

$\therefore AA' \parallel PP'$. AA' 与 PP' 可确定一平面 β. 显然平面 α 与 β 交线为 $A'P'$.

$\because O$、A、$P \in l$, A、$P \in \beta$,

$\therefore O \in \beta$，又 $O \in \alpha$，$\therefore O \in \alpha \cap \beta = A'P'$.

故点 O、A'、P' 共线，即 l 上所有的点在 α 内的射影都在直线 OA' 上.

例 6 求证：过直线 l 上一点 O 与 l 垂直的所有直线都在与 l 垂直的平面内.

证明 如图 1-6，设过点 O 垂直于 l 的任三直线 OA_1、OA_2、

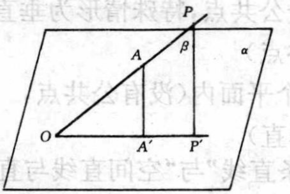

图 1-5

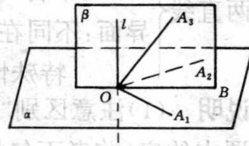

图 1-6

OA_3，过 OA_1 与 OA_2 可确定一平面 α.

由 $\left.\begin{array}{l}OA_1\perp l\\OA_2\perp l\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$.

假设 $OA_3\not\subset\alpha$，则过 l 与 OA_3 可确定另一平面 β，由公理Ⅱ知平面 α、β 相交于过 O 点的一直线，设为 OB，

$\left.\begin{array}{l}OB\subset\alpha\\l\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp OB$，又 $l\perp OA_3$ 且 OB、$OA_3\subset\beta$，这与平面几何中“过直线上一点只能作一条直线与该直线垂直”相矛盾，故 $OA_3\subset\alpha$. 显然，如果点 O 在直线 l 外，该命题也成立.

同样可证得以下命题：①过平面 α 外一点 O 与 α 平行的所有直线都在过 O 点且与 α 平行的平面内；②经过平行于直线 AB 的平面 α 内任意一点 C，引平行于 AB 的直线 CD，则 CD 在 α 内；③α，β 为互相平行的两平面，过 α 内任一点平行于 β 的直线必在平面 α 内；④平面 α 与 β 互相垂直，过 α 内一点引平面 β 的垂线必在平面 α 内.

（二）空间直线、平面间的位置关系

空间直线、平面间的位置关系指的是空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系.

1. 空间两条直线的位置关系分类

- 两直线
  - 共面
    - 相交(只有一个公共点,特殊情形为垂直)
    - 平行(没有公共点)
  - 异面:不同在任何一个平面内(没有公共点,特殊情形为垂直)

说明 (1)注意区别“空间两条直线”与“空间直线与直线”,根据课本约定,前者不包括“重合”,而后者可能“重合”(对平面亦类似).

(2) 异面直线定义为“不同在任何一个平面内的两条直线”,即不可能找到一个平面能同时包含的两条直线,但是分别在两个平面内的两条直线未必就是异面直线. 事实上,分别在两个相交平面内的两条直线的位置关系有相交、平行和异面三种情形;分别在两个平行平面内的两条直线的位置关系有平行和异面两种情形.

(3) 在同一平面内没有公共点的两条直线平行,在空间中没有公共点的两条直线平行或异面;空间中垂直的两条直线相交或异面.

(4) 如何判定两条直线是异面直线呢?如果按照定义,则需要证明两条直线不能同在任何一个平面内,这往往是困难的,因此我们常用反证法来证明两条直线是异面直线.

例1 已知直线 a、b、c 不共面,且都经过同一点 O,M、N 是直线 a 上的两点,P 是直线 b 上的一点,Q 是直线 c 上的一点. 求证:MQ 和 NP 是异面直线.

证明 如图 1-7,假设 MQ 和 NP 不是异面直线,则它们必在同一个平面 α 内,由 $M、N\in a\Rightarrow a\subset\alpha$,又 $O\in a\Rightarrow O\in\alpha$,又 $P\in\alpha,\Rightarrow b\subset\alpha$.

同理 $c\subset\alpha$,这样,a、b、c 共面,这与已知条件 a、b、c 不共面相矛盾,故 MQ 和 NP 是异面直线.

(5) 为简便有效地识别两条直线是异面直线，还有如下的判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线．

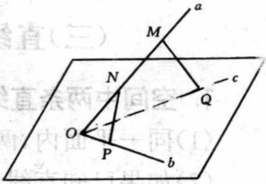

图 1-7

根据这个判定定理，例 1 中 MQ 和 NP 是异面直线还可以作如下证明：设相交直线 a、b 确定一个平面 β，由 $N\in a$，$P\in b\Rightarrow NP\subset\beta$，$M\in a\subset\beta\Rightarrow M\in\beta$，$M\notin NP$，$Q\notin\beta\Rightarrow MQ$ 和 NP 为异面直线．

2．直线和平面的位置关系

直线和平面的位置关系可分以下三类：

(1) 直线和平面相交(有唯一的公共点) $\begin{cases}\text{正交；}\\ \text{斜交．}\end{cases}$

(2) 直线和平面平行(没有公共点)．

(3) 直线在平面内(有无数个公共点)．

例 2 分别就下列条件，判断直线 b 和平面 α 的位置关系：①若直线 a 在平面 α 内，直线 a、b 为异面直线；②若直线 a 在平面 α 内，直线 $b /\!/$ 直线 a；③若直线 a 在平面 α 内，直线 $b\perp$ 直线 a；④若平面 α 和平面 β 相交，直线 b 在平面 β 内．

答：①相交或平行；　　②$b\subset\alpha$ 或 $b /\!/ \alpha$；

③$b\subset\alpha$ 或相交或平行；　　④$b\subset\alpha$ 或相交或平行．

3．空间两个平面的位置关系分类

空间两个平面 $\begin{cases}\text{平行(没有公共点)；}\\ \text{相交(有一条公共直线)}\begin{cases}\text{直交；}\\ \text{斜交．}\end{cases}\end{cases}$

说明 若平面 α 与平面 β 共点，则 α 与 β 的位置关系为重合或相交．

（三）直线、平面平行关系的判定

1. 空间中两条直线平行的判定方法

(1)同一平面内，两直线无公共点，则此两直线平行(定义).

(2)如果已知直线都在同一平面内，则可根据平面几何中直线平行的条件来判定已知直线相互平行的关系.

(3)空间两直线分别平行于第三条直线，则两直线平行.

(4)一已知直线与一已知平面平行，过已知直线的平面如与已知平面相交，则交线必与已知直线平行.

(5) 一平面和两平行平面相交，则它们的交线平行.

(6) 垂直于同一平面的两直线平行.

例 1 求证：如果两个平面分别垂直于两条异面直线中的一条，那么这两个平面的交线平行于这两条异面直线的公垂线.

证明 如图 1-8，已知 a 和 b 是异面直线，PQ 是它们的公垂线段，平面 $\alpha \perp a$ 于点 A，平面 $\beta \perp b$ 于点 B，且 $\alpha \cap \beta = l$. 作 $PC \perp$ 平面 β 于点 C，则 $PC \parallel b$. 直线 $b \parallel$ 平面 APC，平面 α、β 皆垂直于平面 APC，故 $\alpha \cap \beta = l \perp$ 平面 APC.

又因 PQ 是 a、b 的公垂线，$PC \parallel b$，故 $PQ \perp$ 平面 APC，因此有 $l \parallel PQ$.

例 2 求证：平行于空间四边形一双对边的平面，把另一双对边分成的四条线段成比例.

证明 如图 1-9，设 $ABCD$ 是空间四边形，平面 $\alpha \parallel AB$，平面 $\alpha \parallel CD$，设直线 BC、DA、AC 分别交平面 α 于 E、F、K，则 EK 是平面 ABC 和平面 α 的交线，因而由平面 $\alpha \parallel AB$，得 $EK \parallel AB$，所以 $BE : EC = AK : KC$. 同理 $FK \parallel DC$，因而 $AF : FD = AK : KC$，$BE : EC = AF : FD$.

2. 直线与平面平行的判定方法

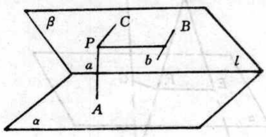

图 1-8

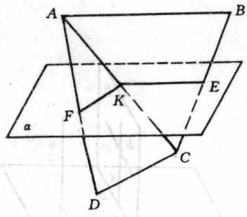

图 1-9

(1) 直线和平面没有公共点,则直线与平面平行(定义).

(2) 平面外一条直线如果和这个平面内的一直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

(3) 两平面平行,其中一个平面内任意一条直线都与另一个平面平行.

例 3 已知 a 和 b 是异面直线,并且 $a\perp b$,平面 $\alpha\perp$ 直线 a,且 b 不在 α 内,求证:$b/\!/\alpha$.

证明 如图 1-10,在直线 b 上任取一点 P,过 P 作直线 $c/\!/a$,因为 $a\perp$ 平面 α,所以 $c\perp$ 平面 α,设垂足为 B. 又设直线 b 和 c 所确定的平面为 β,则平面 β 和 α 交于过 B 点的一条直线 d,由 $c\perp$ 平面 α,得 $c\perp d$.

另一方面,由 $a\perp b$,$c/\!/a$ 得 $c\perp b$. 在平面 β 内,直线 b 和 d 都垂直于 c,所以 $b/\!/d$. 而 d 又在平面 α 内,b 不在平面 α 内,所以 $b/\!/$ 平面 α.

例 4 设 AB、BC、CD 是不在同一平面内的三条线段,则过这三条线段中点的平面平行于 AC 和 BD.

证明 如图 1-11,设线段 AB、BC、CD 的中点分别是 E、F、G,过三点 E、F、G 的平面是 α. 连结 EF、FG,则由 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线得 $EF/\!/AC$.

现在证明 AC 不在平面 α 内. 用反证法,假定直线 AC 在平

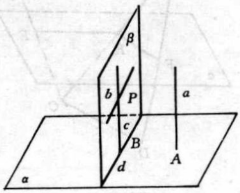

图 1-10

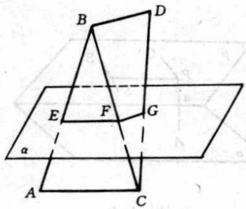

图 1-11

面 α 内，那么点 C 和 G 都在平面 α 内，因而通过这两点的直线 CD 在平面 α 内. 同理直线 AB 和 BC 也都在平面 α 内，这与已知 AB、BC、CD 不在同一平面内矛盾，所以 AC 不在平面 α 内. 于是 $AC /\!/$ 平面 α. 同理 $BD /\!/$ 平面 α.

3. 平面与平面平行的判定方法

(1) 两平面无公共点，则这两平面平行(定义).

(2) 一平面内的两条相交直线都与另一平面平行，则这两平面平行.

(3) 垂直于同一条直线的两个平面平行.

例 5 求证：正方体 $ABCD-EFGH$ 中平面 $BDE /\!/$ 平面 CFH.

证明 如图 1-12，由 CD、BA、FE 相互平行且相等得 $CDEF$ 是平行四边形，因而 $CF /\!/ DE$，故 $CF /\!/$ 平面 BDE，同理可证：$CH /\!/$ 平面 BDE，而 $CF \cap CH = C$，所以平面 $BDE /\!/$ 平面 CFH.

例 6 如图 1-13，已知平面 $\alpha /\!/$ 平面 β，线段 PQ、PD、QF 分别交平面 α 于点 A、C、F，交平面 β 于点 B、D、E，$PA = 9$ 厘米，$AB = 12$ 厘米，$BQ = 16$ 厘米，$\triangle ACF$ 的面积为 72 厘米^2，求 $\triangle BDE$ 的面积.