经济数学系列教材

Calculus

微积分（二）

华长生 邓咏梅 徐 晔 钟友明 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

经济数学系列教材

微积分(二)

Weijifen

华长生　邓咏梅　徐　晔　钟友明　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书根据“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，以培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才为指导思想，结合编者多年的教学实践经验，系统介绍了微积分中积分部分、无穷级数和微分方程的知识。

本书内容包括不定积分、定积分、二重积分、微分方程与差分方程简介、无穷级数、微积分综合应用案例。本书力求做到深入浅出、通俗易懂、突出重点、循序渐进。各章有学习目标和学习要点，各节后有小结，书末附有 MATLAB 软件基本操作及其在微积分中的应用和部分练习与习题参考答案。

本书可以作为高等学校经济管理类专业微积分课程的教材和全国硕士研究生入学统一考试的教学参考书，也可供工科各专业参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分．2／华长生等编著．—北京：高等教育出版社，2013.1

ISBN 978－7－04－036685－3

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①华…　Ⅲ.①微积分－高等学校－教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 309123 号

策划编辑　胡　颖　　责任编辑　胡　颖　　封面设计　赵　阳　　版式设计　马敬茹
插图绘制　尹文军　　责任校对　陈旭颖　　责任印制　刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	肥城新华印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	23.75	版　　次	2013年1月第1版
字　　数	430千字	印　　次	2013年1月第1次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	34.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号　36685－00

前　　言

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，遵照大学数学教学改革的精神，结合编者多年的教学实践经验编写而成的。

在编写过程中，我们始终坚持如下特色：

1. 注重学科的基础。作为经济数学教材，我们在保持数学学科科学性、系统性的同时，适当弱化或略去了一些基本性质和定理证明的繁琐推理，注重基本知识、基本技能、基本方法的训练以及实际应用能力的培养，力求做到深入浅出、通俗易懂、突出重点、循序渐进。

2. 注重学生学习的可持续发展和进一步深造的需要。例题和习题选用基础、适中、综合提高三类题目，有一定难度的习题加注了 * 号。

本书可作为高等院校经济管理类专业微积分课程的教材和全国硕士研究生入学统一考试的教学参考书，也可供工科各专业参考使用。

本书由江西财经大学信息管理学院华长生、邓咏梅、徐晔和钟友明编著。华长生编写第 10 章、第 11 章，邓咏梅编写第 6 章、第 7 章，徐晔编写第 9 章，钟友明编写第 8 章。

衷心感谢江西财经大学信息管理学院柳键教授，感谢他在百忙之中抽出宝贵的时间认真阅读原稿，并提出宝贵的意见。衷心感谢数学系全体老师为教材编写提供的意见和帮助。

编者一直从事数学教学工作，在教学中使用过不少教材。如同济大学数学系编写的《高等数学》(第五版)、中国人民大学朱来义主编的《微积分》(第三版)、江西财经大学自编的《微积分》和外文原版教材：《Thomas' Calculus》(George B. Thomas)(影印版)(高等教育出版社)和《Calculus》(James Stewart)(影印版)(高等教育出版社)。这些优秀教材对于编者的教学方法有着重要的影响，同时也是编写本书的参考书，在此向这些教材的作者表示衷心感谢。

由于水平有限，书中可能存在疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

2012 年 8 月

目　　录

第6章　不定积分

学习目标

1. 理解原函数和不定积分的基本概念；
2. 熟练掌握基本积分公式；
3. 熟练掌握不定积分法则、换元积分法和分部积分法；
4. 了解几种特殊类型函数的积分技巧.

学习要点

原函数及其几何意义；不定积分的概念及其性质；基本积分公式及直接积分法；第一换元法；第二换元法；分部积分法；典型特殊类型积分；有理函数分解；有理函数积分；三角函数有理式的积分.

导言

积分学是微积分中的另一个基本组成部分，积分学中包括两个基本内容：不定积分和定积分．定积分将在下一章讨论，本章介绍不定积分．

不定积分是作为微分的逆运算引进的，在微分学中，给定函数 $F(x)$，求其导数 $F'(x)$或微分 $\mathrm{d}F(x)$，而对应的反问题是对给定的函数$f(x)$，要找出一个可导函数 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)$或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$. 这就是不定积分的任务．

微分学与积分学是一对矛盾，矛盾的主要方面是微分．正如算术中乘法与除法的关系那样，它们互为逆运算，而乘法是基础，在微分学与积分学中，微分学是基础．

本章介绍不定积分的基本概念、性质及求不定积分的基本方法．

6.1 不定积分的概念和性质

一、原函数与不定积分

先看一个例子.

设已知直线运动质点的速度为 $v(t)$，求质点的运动方程.

设质点的运动方程为 $s=s(t)$，$s(0)=0$，于是就有 $s'(t)=v(t)$. 由此，问题归结到求一个可微函数 $s(t)$，使 $s'(t)=v(t)$，并满足 $s(0)=0$.

抽去问题的物理内容，从数学的角度看，就是要进行求导的逆运算，即设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，求区间上可微函数 $F(x)$，使

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)\quad(x\in I).$$

我们已经知道了如何求一个已知函数的导数和微分，但在科学技术的许多领域，往往会遇到与此相反的问题，即已知一个函数的导数(或微分)，求这个函数. 例如，已知质点作直线运动时的速度 $v(t)$，要求路程 $s(t)$；或已知边际成本，要求总成本函数. 从数学角度来说，即求一个函数，使它的导数等于已知函数. 这种问题在数学及其应用中具有普遍意义，因而有必要在一般形式上对它进行讨论.

1. 原函数

定义 6-1 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果存在函数 $F(x)$，使得对已知区间 I 上的任意点都有

$$F'(x)=f(x)\quad 或\quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例如，由于 $(x^2)'=2x$，所以 $F(x)=x^2$ 是函数 $f(x)=2x$ 的一个原函数.

又如，在区间 $(0,+\infty)$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以 $F(x)=\ln x$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的一个原函数. 在区间 $(-\infty,0)$，$(\ln(-x))'=\dfrac{1}{x}$，所以 $F(x)=\ln(-x)$ 是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内的一个原函数.

原函数与导函数是一对互为相反的概念. 在某区间内，若 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数，则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数；反之，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数.

引入原函数的概念后，上述问题可以表述为：已知函数 $f(x)$，求其原函数．

关于原函数，我们首先要问：一个函数具备什么条件，才能保证它的原函数一定存在？

定理 6－1 若函数 $f(x)$ 在某区间上连续，则 $f(x)$ 在该区间上必存在原函数．

简单地说，即连续的函数一定有原函数．

这个定理的证明将在第 7 章中给出．

由于初等函数在其有定义的区间上是连续的，因此根据定理 6－1，初等函数在其有定义的区间上都有原函数．

其次，如果函数 $f(x)$ 有原函数，其原函数是否唯一？如果不唯一，那一共有多少个？并且，其一般表达式形式如何？

定理 6－2 如果函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在某区间上的一个原函数，则

（1）对任意常数 C，$F(x)+C$ 也是函数 $f(x)$ 的原函数；

（2）$f(x)$ 的任意两个原函数之间只相差一个常数．

证明 （1）由于 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$F'(x)=f(x),$$

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

所以，$F(x)+C$ 也是函数 $f(x)$ 的原函数．

（2）设 $F(x)$ 与 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意两个原函数，则

$$F'(x)=f(x),\quad G'(x)=f(x),$$

即

$$F'(x)=G'(x).$$

由拉格朗日中值定理的推论 2，有

$$F(x)=G(x)+C.$$

这个定理表明，如果函数 $f(x)$ 在某区间上有原函数 $F(x)$，则 $f(x)$ 在该区间上有无穷多个原函数，这个定理还给出了 $f(x)$ 的全体原函数的一般表达形式 $F(x)+C$（C 为任意常数），它们称为函数 $f(x)$ 的原函数簇．

至此，可以引入不定积分的概念．

2. 不定积分

定义 6－2 如果函数 $f(x)$ 在某区间上存在原函数，则 $f(x)$ 原函数的全体称为 $f(x)$ 在该区间上的不定积分．记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

这里“$\int$”称为积分符号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为积分表达式，x 称为

积分变量.

按此定义可知，如果函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad (C\text{ 为任意常数}), \tag{6-1}$$

任意常数 C 又称为积分常数.

由此可知，求不定积分实际上只需求出一个原函数，再加上任意常数 C 即可.

例如，由于 $(\sin x)' = \cos x$，即 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，所以 $\cos x$ 的不定积分为

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$$

例 6-1　求 $\int x^2\,\mathrm{d}x$.

解　因为

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2,$$

所以

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

例 6-2　求 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解　当 $x>0$ 时，$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$；

当 $x<0$ 时，$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C$.

总之

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

例 6-3　若曲线 $y=f(x)$ 上任意一点的切线斜率为 $2x$，且通过点(1，2)，求曲线的函数关系式 $y=f(x)$.

解　由题意，曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率为 $2x$，即

$$y' = f'(x) = 2x,$$

则

$$y = f(x) = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C.$$

又曲线通过点(1, 2)，即有

$$y\big|_{x=1} = f(1) = 2,$$

代入上式，有 $y\big|_{x=1} = f(1) = 1^2 + C = 2$，得 $C = 1$.

故所求曲线的函数关系式为 $y = x^2 + 1$.

例 6－4 求 $\int e^{-|x|}dx$.

解 当 $x \geqslant 0$ 时，$\int e^{-|x|}dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C_1$；

当 $x < 0$ 时，$\int e^{-|x|}dx = \int e^{x}dx = e^{x} + C_2$.

由于一个函数的原函数必是连续函数，故

$$\lim_{x\to 0^+}(-e^{-x} + C_1) = \lim_{x\to 0^-}(e^{x} + C_2),$$

即有 $C_1 = C_2 + 2$，从而

$$\int e^{-|x|}dx = \begin{cases} -e^{-x} + 2 + C, & x \geqslant 0, \\ e^{x} + C, & x < 0 \end{cases} \quad (C\text{ 为积分常数}).$$

3. 不定积分的几何意义

在例 6－3 中，我们求得 $y = x^2 + C$，而曲线 $y = x^2 + C$ 可以认为是由曲线 $y = x^2$ 沿 y 轴方向平移距离 $|C|$ 所得到的，当 $C > 0$ 时，沿 y 轴正方向平移；当 $C < 0$ 时，沿 y 轴负方向平移，故函数簇 $y = x^2 + C$ 的图形是一曲线簇，而所求曲线 $y = x^2 + 1$ 是曲线簇 $y = x^2 + C$ 中通过点(1, 2)的那一条.

一般情形，如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则称曲线 $y = F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一条积分曲线. 把曲线 $F(x)$ 沿 y 轴平移可以得到曲线簇 $y = F(x) + C$. 不定积分 $\int f(x)dx$ 的图形就是 $f(x)$ 的全部积分曲线组成的积分曲线簇. 显然，若在每一条曲线上横坐标相同的点上作切线，则这些切线是相互平行的(图 6－1).

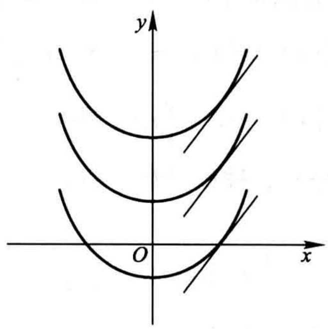

图 6－1

二、不定积分的性质

由不定积分的定义，直接可以得到性质 6－1.

性质 6－1 （1）若$f(x)$有原函数，则

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

（2）若 $F(x)$可导，且导函数 $F'(x)$连续，则

$$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \quad 或 \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

性质 6－1 说明了求不定积分的运算与求导数（或微分）运算是互逆的．若先积分后微分（或求导），则两者的作用相互抵消；反之，若先微分（或求导）后积分，则作用抵消后还差一个积分常数．可简单地记为“先积后微，形式不变；先微后积，差个常数”.

性质 6－2 两个函数代数和的不定积分等于它们各自不定积分的代数和．即若$f(x)$和 $g(x)$有原函数，则

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6－2}$$

证明 为了证明等式成立，只需要证明等式右端的导数等于左端不定积分的被积函数$f(x) \pm g(x)$就可以了．对右端求导，有

$$\begin{aligned}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x\right]' &= \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' \pm \left[\int g(x)\,\mathrm{d}x\right]' \\ &= f(x) \pm g(x).\end{aligned}$$

所以，式(6－2)的右端表达式是左端的被积函数的原函数，而且，右端表达式中的不定积分式已包含积分常数，故不必另写．由此可知，式(6－2)的右端确是$f(x) \pm g(x)$的不定积分．

性质 6－2 可以推广到有限多个函数的情形，即有

$$\begin{aligned}&\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\,\mathrm{d}x \\ =& \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_3(x)\,\mathrm{d}x \pm \cdots \pm \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

性质 6－3 求不定积分时，被积函数中的非零常数可以提到积分号外面．即若$f(x)$有原函数，则

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (k\,为常数，k \neq 0). \tag{6－3}$$

性质 6－3 的证明和性质 6－2 的证明类似．只需证明(6－3)式右端的导数等于左端积分的被积函数即可．

本节小结

本节主要介绍了原函数和不定积分的概念、几何意义、不定积分的性质．不定积分虽然是微分的逆运算，但是不定积分需要具有很高的技巧，注意：

(1) 求原函数与求微分的联系、区别，可导函数的导数只有一个，可积函数的原函数有无穷多个；

(2) 原函数与不定积分的联系和区别，不定积分是原函数的全集；

(3) 不定积分的性质是以后进行不定积分的基础．

练　习　6.1

1. 什么是函数 $f(x)$ 的原函数？什么是 $f(x)$ 的不定积分？它们之间有什么区别与联系？

2. 填空题：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int \mathrm{e}^{-x^3}\mathrm{d}x =$ ______________;

(2) $\int \mathrm{d}(\cos x) =$ ______________;

(3) $\mathrm{d}x =$ ______________ $\mathrm{d}(ax+b)\quad (a\neq 0)$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(\sqrt{x})$;

(5) $\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(\ln(1-x))$;

(6) $x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x^2})$;

(7) $\sin 2x\mathrm{d}x =$ ________ $\mathrm{d}(\cos 2x)$.

3. 填括号，并计算出相应的不定积分：

(1) $(\qquad)' = 10$，求 $\int 10\mathrm{d}x$；

(2) $(\qquad)' = 2\sin x$，求 $\int 2\sin x\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}(\qquad) = 5x^4\mathrm{d}x$，求 $\int 5x^4\mathrm{d}x$.

4. 已知 $f'(x)=\sqrt{x}$，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，求 $f'(x)$.

6. 一物体由静止开始运动，经 t s 后的速度是 $3t^2$ m/s，问：

(1) 3 s 后物体离开出发点的距离是多少？

(2) 物体走完360 m需要多少时间?

6.2 基本积分公式

我们在求函数导数时必须掌握基本初等函数的求导公式，为了有效地计算不定积分，必须掌握一些基本积分公式．由于求不定积分是求微分的逆运算，因此任何一个微分公式，反过来就是一个求不定积分的公式，故由基本求导公式可以得到下面的基本积分公式．

一、基本积分公式

(1) $\int 0\mathrm{d}x = C$（C为任意常数，下同）;

(2) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$;

特别，$\int 1\mathrm{d}x = x + C$，简写为$\int \mathrm{d}x = x + C$;

(3) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

特别，$\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C$，$\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \sqrt{x} + C$，这两个不定积分公式在下节换元积分法中有广泛应用;

(4) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

(5) $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

特别，$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$;

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$;

(11) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$;

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$(或 $-\arccos x + C$);

(13) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$(或 $-\operatorname{arccot} x + C$).

要验证这些公式，只要验证等式右端的导数等于左端不定积分的被积函数，这种方法是我们验证不定积分的计算是否正确的常用方法.

关于积分公式(12)、(13)，都有两种不同形式的结果，但表示同一原函数簇. 以公式(12)为例：

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = \frac{\pi}{2} - \arccos x + C = -\arccos x + \left(C + \frac{\pi}{2}\right),$$

这里 $C+\frac{\pi}{2}$ 也是任意常数，可记为 C'，即得

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\arccos x + C'.$$

同理

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\operatorname{arccot} x + C.$$

二、直接积分法

直接积分法是将被积函数进行适当变形，利用基本积分公式和不定积分性质求不定积分的一种方法.

例 6-5 求不定积分 $\int\left(2x^3 - x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\left(2x^3 - x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= 2\int x^3\mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

说明：在分项积分后，每个不定积分的结果都含有一个任意常数，但由于任意常数之和(或差)仍是任意常数，因此，只要总的写一个任意常数就可以了.

例 6-6 求不定积分 $\int\left(10^x - 2\sin x + 3\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$.

解 $\int\left(10^x - 2\sin x + 3\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x = \int 10^x\mathrm{d}x - \int 2\sin x\mathrm{d}x + \int 3\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{10^x}{\ln 10} + 2\cos x + 3\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{10^x}{\ln 10} + 2\cos x + \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} + C.$$

例 6-7　求不定积分$\int 3^x e^x dx$.

解　$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{1 + \ln 3} + C.$

例 6-8　求不定积分$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解　$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

例 6-9　求不定积分$\int \tan^2 x dx$.

解　$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$

例 6-10　求不定积分$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

解　$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$

例 6-11　求不定积分$\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$.

解　$\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} dx$

$$= \int (x - 3 + 3x^{-1} - x^{-2}) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

例 6-12　求不定积分$\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx$.

解　$\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} dx$

$$= \int -(\sin x + \cos x) dx$$

$$= \cos x - \sin x + C.$$

例 6－13 求不定积分$\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx$.

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)dx$

$$= \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{x}dx = \arctan x + \ln|x| + C.$$

例 6－14 求不定积分$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

解 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cos^2 x}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan x + C.$$

例 6－15 求不定积分$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

解 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$$= \int(\csc^2 x + \sec x^2)dx = -\cot x + \tan x + C.$$

例 6－16 求不定积分$\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$.

解 $\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x dx$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

从以上例题我们可以看出，在应用直接积分法求不定积分时，通常要将被积函数进行恒等变形后，才能使用基本积分公式．

本节小结

本节主要介绍了不定积分的基本积分公式和直接积分法．注意：

（1）基本积分公式是求不定积分的基础，要熟练掌握（本书后续介绍的各种不定积分方法都是将不定积分向基本积分公式转化从而求出不定积分的）；

（2）要特别注意求导函数和原函数的方向，建议读者认真复习基本导数公式和基本微分公式；

（3）不定积分的结果是所有原函数的集合，不要丢掉后面的“C”；

（4）求不定积分具有很高的技巧，经常要用到三角变换、因式分解、有理