

信号与网路分析讲义

无锡轻工业学院

一九八三年三月

前 言

本院自动化专业“电路”课程目前采用了李瀚荪同志编写的《电路分析基础》一书作为第一门电路课程的教材，根据一九八〇年六月在成都召开的高专学校工科电工教材编审委员会扩大会议审订的高专工业学校四年制电类各专业试用“电路教学大纲”的精神，结合本专业的特点，将编写本讲义作为第二门有关电路课程的教材，以适应进一步的需要。

全讲义共包括付里叶变换与拉氏变换，双口网络，网络拓扑和矩阵分析法，及网路分析的状态变量法等四章。供学完《电路分析基础》课程后讲授，学时按40~50左右课堂教学时数致意。

为了使读者能较好地掌握基本内容，一方面编入了较多的例题。另一方面在内容处理上解题问题尽量避免过于繁琐的方法，而选用较简捷的方法。例如对于含互感和受控源网络的矩阵分析法，则是通过列出支路电流、电压方程直接形成支路导纳矩阵和支路阻抗矩阵入手。又如对矩阵指数函数 $e^{[A]t}$ 的求法，则通过介绍凯莱—哈密顿定理，以进行计算等。

由于本人水平有限，加之编写时间仓促，错误和不妥之处在所难免，希望使用本讲义的同志多提宝贵意见。

学院自动化组 張斯漫

目 录

第十五章	付里叶变换与拉普拉斯变换	(4)
§ 15-1	付里叶级数的复数形式	(4)
§ 15-2	周期信号的频谱	(6)
§ 15-3	付里叶变换	(11)
§ 15-4	拉普拉斯变换的概念	(15)
§ 15-5	常用函数的拉普拉斯变换	(17)
§ 15-6	拉普拉斯反变换的求取	(21)
§ 15-7	拉普拉斯变换的性质	(27)
§ 15-8	线性系统的拉普拉斯变换分析法	(32)
§ 15-9	网络函数	(46)
§ 15-10	网络函数的零极点与极值	(48)
§ 15-11	卷积	(58)
习 题	十五	(64)

第十六章	双口网络	16-68
§ 16-1	双口网络的方程和参数	16-69
§ 16-2	双口网络的联结	16-79
§ 16-3	正弦稳态的网络函数	16-84
§ 16-4	线性可逆双口网络的等效	16-93
§ 16-5	不可逆双口网络的等效	16-97
习题十六		16-99

第十七章	网络拓扑和矩阵分析法	17-103
§ 17-1	关联矩阵	17-103
§ 17-2	节点分析法	17-107
§ 17-3	基本回路矩阵和回路分析法	17-114

§ 17-4	基本割集矩阵和割集分析法	17-120
§ 17-5	$[B]$ 与 $[C]$ 之间的关系	17-129
§ 17-6	特勒根定理	17-131
习题十七		17-137

第十八章	网络分析的状态变量法	18-144
§ 18-1	网络的状态变量和状态方程	18-144
§ 18-2	状态方程的直观编写法	18-146
§ 18-3	状态方程的系统编写法	18-151
§ 18-4	状态方程的求解	18-160
习题十八		18-178

第十五章 付里叶变换与拉普拉斯变换

§ 15-1 付里叶级数的复数形式

在第 14 章中已介绍过任意周期函数 $f(t)$ ，周期为 T ，角频率为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 。若满足狄利克雷条件，就可展为付里叶级数，即

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)$$

$$\text{其中 } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_1 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_1 t dt$$

根据欧拉公式可得

$$\cos k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}$$

$$\sin k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j}$$

因此，付里叶级数可改写如下：

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(a_k - jb_k)}{2} e^{jk\omega_1 t} + \frac{(a_k + jb_k)}{2} e^{-jk\omega_1 t} \right]$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\dot{A}_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \frac{\dot{A}_k^*}{2} e^{-jk\omega_1 t} \right] \dots (15-1)$$

式中 $A_0 = 2a_0$

$\dot{A}_k = a_k - jb_k = A_k / \text{tg}^{-1} \frac{-b_k}{a_k} = A_k \angle \varphi_k$ 是 k 次谐波的振幅相量，其对称公式可推求如下：

(4)

$$\begin{aligned}\dot{A}_k &= a_k - j b_k \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j k \omega_1 t} dt \quad \text{--- (15-2)}\end{aligned}$$

$\dot{A}_k^* = a_k + j b_k$ 是 $\dot{A}_k$ 的共轭复数。

显而易见，将式(15-2)中的 k 换成 $(-k)$ ，即得 $\dot{A}_k^*$ 。因此，式(15-1)的 $\dot{A}_k e^{-j k \omega_1 t}$ 也就是将 $\dot{A}_k e^{j k \omega_1 t}$ 中的 k 换成 $(-k)$ 的结果。又若令(15-2)中的 $k=0$ ，则得 $\dot{A}_0 = A_0 = 2a_0$ ，即恒分量 $\frac{A_0}{2} = a_0$ 。可以看成频率为零，初相也为零的谐波。

于是，付里叶级数[式(15-1)]可继续化为

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{A}_k}{2} e^{j k \omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{\dot{A}_k}{2} e^{j k \omega_1 t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{j k \omega_1 t} \quad \text{--- (15-3)}\end{aligned}$$

上式就是付里叶级数的复数形式。

在付里叶级数的复数形式中，当 k 取负值时，是否意味着有“负频率”的谐波存在呢？

必须注意，在导出付里叶级数的复数形式的过程中，把表示谐波的三角函数化为复指数函数时，一个谐波是由两个同频率共轭复指数函数合成的[见式(15-1)]，也就是一为正频率，一为数值相等的负频率的成对的复指数函数之和，不能只取正或负频率的复指数函数来代表一个谐波。所以“负频率的谐波是不存在的，负频率的复指数函数只是一个谐波的组成部份而已。

下面通过相量图进一步观察付里叶级数的复数形式的几何意义， k 次谐波的一对共轭复指数函数分别为

$$\frac{1}{2} \dot{A}_k e^{j k \omega_1 t} = \frac{1}{2} A_k e^{j 0} e^{j k \omega_1 t}$$

$$\frac{1}{2} A_k e^{-jkw_1 t} = \frac{1}{2} A_k^* e^{-jkw_1 t} = \frac{1}{2} A_k e^{-j\theta_k} e^{-jkw_1 t}$$

它们在复平面上，是一对共轭旋转相量，大小相等，起始位置对称于实轴，而以同一角速度 $K\omega_1$ 向相反方向旋转，如图15-1所示。任何瞬时，这一对共轭旋转相量的几何和都是实数，而且等于每个旋转相量在实轴上的投影的二倍。这就是 K 次谐波的瞬时值。把周期函数中的每一个谐波分量表示为一对共轭旋转相量之和，就是付里叶级数的复数形式的几何意义。

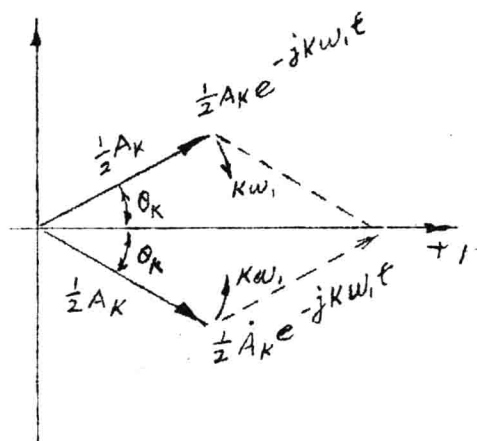


图15-1 由一对共轭旋转相量合成的一个谐波

§ 15-2 周期信号的频谱

将一个周期信号展开成付里叶级数进行谐波分析时，为了既方便而又直观地表示一个信号中包含哪些谐波分量，各谐波分量所占的比重及其间的相角关系，常采用频谱图的方法。前述付里叶级数的复数形式的表达式中 A_k 为 K 次谐波分量的振幅，作出 A_k 对频率的关系图，将了解各谐波分量所占的比重，称为“幅度频谱”。 A_k 的幅角 θ_k 与 K 次谐波的初相有关，作出 θ_k 对频率的关系图，将反应出各次谐波之间的相角关系，称为“相位频谱”。下面分别以矩形波和周期矩形脉冲为例来说明周期信号

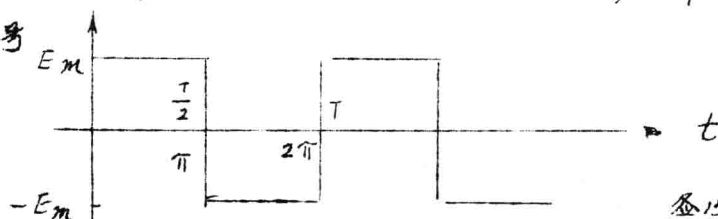


图15-2 矩形波

的频谱及其特性。

各 15-2 所示矩形波 $f(t)$ ，在一个周期内的表示式为

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= E_m & 0 < t < \frac{T}{2} \\ f(t) &= -E_m & \frac{T}{2} < t < T \end{aligned} \right\}$$

展开为复数形式的付里叶级数，并画出其幅度频谱和相位频谱。
其 K 次谐波的振幅相量为

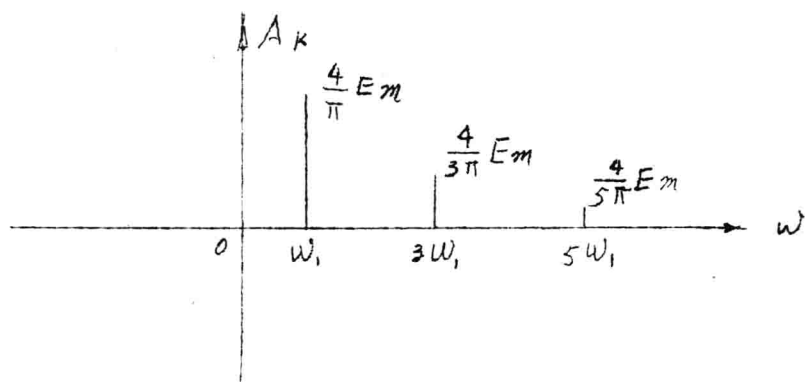
$$\dot{A}_K = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_m e^{-jK\omega_1 t} dt - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T E_m e^{-jK\omega_1 t} dt = \frac{2E_m}{jK\omega_1 T} (1 - 2e^{-jK\omega_1 \frac{T}{2}} + e^{-jK\omega_1 T})$$

由于 $K\omega_1 T = 2K\pi$ ，故

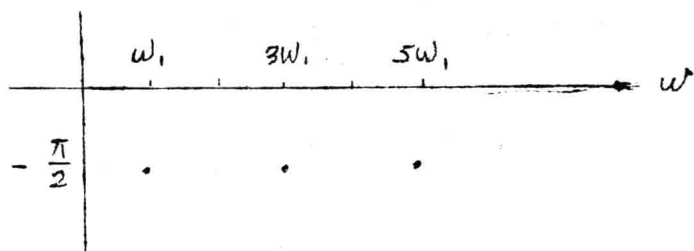
$$\dot{A}_K = \frac{2E_m}{jK\omega_1 T} (1 - 2e^{-jK\pi} + e^{-j2K\pi})$$

$$\text{所以 } \dot{A}_K = \begin{cases} \frac{2}{T} \frac{4E_m}{jK\omega_1} = \frac{4E_m}{jK\pi} & \text{当 } K \text{ 为奇数时} \\ 0 & \text{当 } K \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

此周期性矩形波的幅度频谱如各 15-3 a 所示。由于各次谐波是 ω_1 的整数倍，所以这种幅度频谱是离散的，有时又称为线频谱，而其相位频谱则如各 15-3 b 所示。



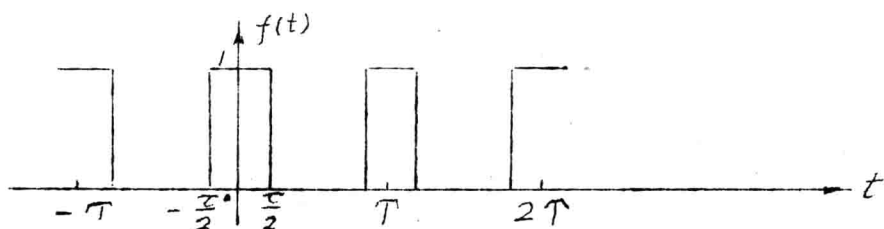
(a) 幅度频谱



(b) 相位频谱

例 15-3 周期性矩形波的频谱

下面讨论周期性矩形脉冲的频谱。设有一幅度为 1，脉冲宽度为 τ 的周期性矩形脉冲，其周期为 T ，如例 15-4 所示。根据 (15-2) 式可求得其复付里叶系数为：



例 15-4 周期性矩形脉冲

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-jk\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\frac{e^{-jk\omega_1 t}}{-jk\omega_1} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{T} \frac{e^{-jk\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{jk\omega_1 \frac{\tau}{2}}}{-jk\omega_1} \\
 &= \frac{4}{T} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}}{k\omega_1} = \frac{2\tau}{T} \left[\frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau}{2}} \right] \dots (15-4)
 \end{aligned}$$

求上式在 $k=0$ 时的极限，可得其直流分量

$$\frac{A_0}{2} = \frac{\tau}{T}$$

根据 (15-3) 可写出该矩形脉冲的付里叶级数 (指数形)
(8)

式)为:

$$f(t) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau}{2}} e^{jk\omega_1 t}$$

$$= \frac{\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau}{2}} \cos k\omega_1 t \right] \dots (15-5)$$

由式(15-4)可得其K次谐波的振幅

$$A_k = \frac{2\tau}{T} \left| \frac{\sin \frac{k\omega_1 \tau}{2}}{\frac{k\omega_1 \tau}{2}} \right| \dots (15-6)$$

在15-5中画出了, $T = 4\tau$ 的周期性矩形脉冲的振幅频谱。由此可见, 频谱是离散的, 仅有角频率 $\omega = k\omega_1$ 的各分量其相邻两谱线的间隔是 ω_1 ($\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$)。

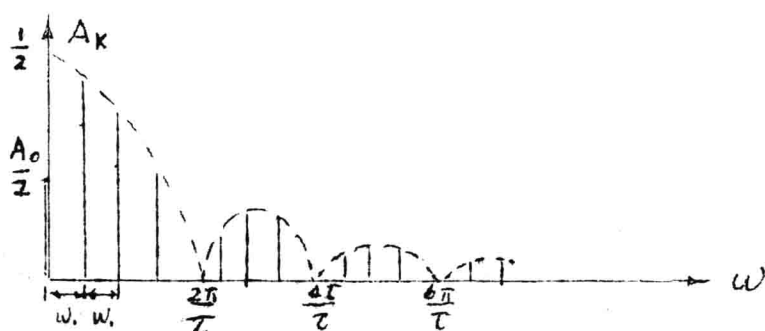


图15-5 周期性矩形脉冲的振幅频谱 ($T = 4\tau$)

对于矩形脉冲而言, 其各谱线端头连线所形成的包络线(在15-5中虚线所示)为

$$\frac{2\tau}{T} \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \right|$$

当 $\frac{\omega \tau}{2} = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 时, 即 $\omega = \frac{2n\pi}{\tau}$ 时, 其包络线为零。在图15-5中用于 $T = 4\tau$, 而 $k\omega_1 = \frac{2k\pi}{T}$, 所以当 $k\omega_1 = \frac{2k\pi}{T} = \omega = \frac{2n\pi}{\tau}$, 即当 $k = 4n$ 时, 亦即 $k = 4, 8, 12, \dots$ 的各次谐波振幅均为零

该矩形脉冲的相位频谱十分简单，当振幅相量为正实数时，该谱波的初相为零；振幅相量为负实数时，该谱波的初相为 π 。

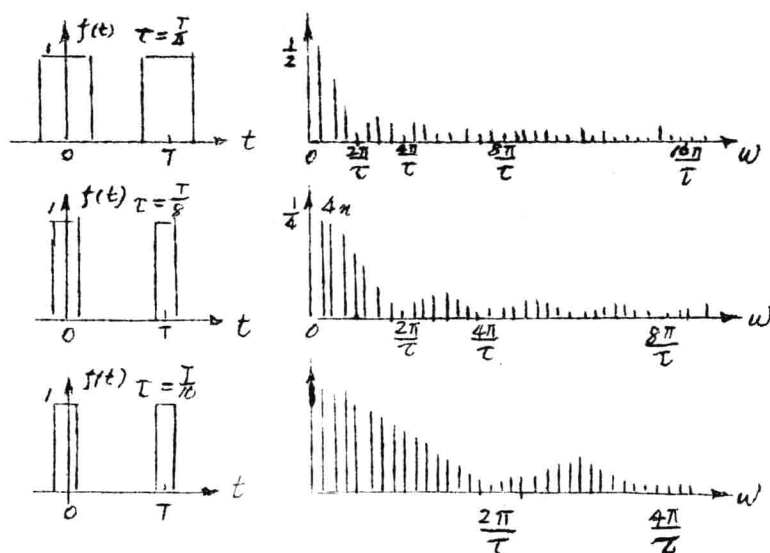


图15-6 脉冲宽度与频谱的关系
(各中频谱振幅未按比例)

图15-6中画出了周期相同，而脉冲宽度不同时频谱。由此可见，由于周期相同，因而相邻谱线的间隔相同；脉冲宽度愈窄，其频谱包络线零值的频率（ $\omega = \frac{2K\pi}{\tau}$ ）愈高，从而相邻两个零值间所包含的谐波分量就愈多，也就是说，谐波振幅的收敛速度愈慢。

严格地说，周期性信号所包含的谐波分量有无限多，不过由于谐波振幅随频率增高而减小，通常只考虑频率较低的一些分量就够了。从零频率到需要考虑的最高次谐波频率间的频段称为信号的频带宽度。信号频带宽度的具体定义视情况而定，有时将零频率到频谱包络线第一个零值间的频段，认为是信号的频带宽度；也有时将零频率到谐波振幅下降到最大值的 $\frac{1}{K}$ （例如10%）的频率之间的频段称为信号的频带宽度。根据前面

的讨论可知，信号的脉冲宽度愈窄，则信号所占有的频带宽宽。

由式(15-6)可知，当周期保持不变，而脉冲宽度减小时，频谱的振幅也相应地减小，在图15-6中未按比例画出这种关系。

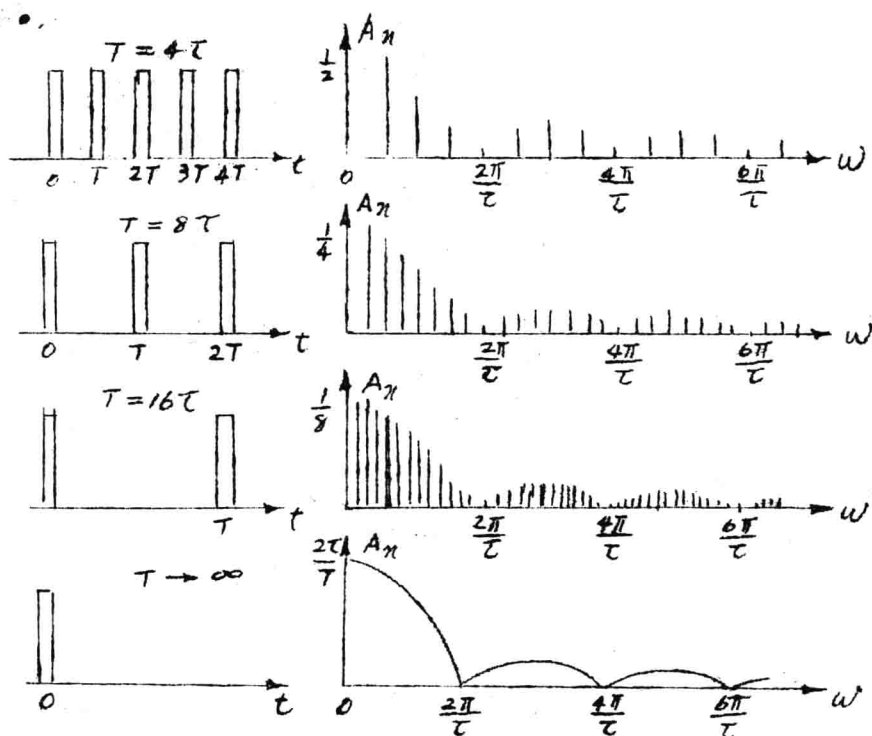


图15-7 周期与频谱的关系

(图中频谱振幅未按比例)

图15-7中画出了脉冲宽度相同而周期不同时信号的频谱。由图可见，这时频谱包络线的零值($\omega = \frac{2n\pi}{T}$)所在位置不变，而当周期加长时，相邻谱线的间隔($\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$)减小，即频谱变密。如果周期无限加长，这时就成为非周期信号的连续频谱。

§15-3 付里叶变换

如前所述，周期性脉冲信号可以利用付里叶级数展开成不

连续频谱，并且谱线间隔及振幅频谱的谱线高度将随周期的增大而减小。当周期无限增大（周期信号向非周期信号转化）时，谱线将无限密集（不连续频谱向连续频谱转化），各谐波的振幅将趋近无穷小，但仍保持着一定的比例关系，即振幅频谱包络线的形状保持不变。

就是说，当 $T \rightarrow \infty$ 时，信号频谱的谱线间隔 $\omega_k = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ 成为无穷小量；不连续变量 $n\omega_k = n\Delta\omega \rightarrow \omega$ 成为连续变量；同时，各谐波的振幅也将成为趋近于零的无穷小量。这时，再孤立地讨论各谐波的振幅及振幅相量就没有意义了。因此，分析非周期信号的频谱结构，就只能着眼于各频率分量的相对分布状况，即只能分析各频率分量的振幅间的相对比例关系和相角关系。

由周期信号中谐波振幅相量的积分公式：

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j k \omega_k t} dt$$

可见，谐波的振幅是与周期 T 成反比变化的，故而周期无限增大时，谐波振幅必然成为趋近于零的无穷小量。各谐波振幅的差别和相角的变化，则完全由上式中的定积分部分所决定的。这个定积分的结果一般是复数，且其值随不连续变量 $n\omega_k$ 的改变而改变。当 T 趋近无穷大时， $n\omega_k$ 成为连续变量 ω ，这个定积分的结果就变成 ω 的函数。所以，我们定义

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j k \omega_k t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \omega t} dt \quad \text{----- (15-7)} \end{aligned}$$

这个函数称为非周期信号（原函数） $f(t)$ 的频谱函数，又可称为 $f(t)$ 的付里叶变换函数。由非周期信号 $f(t)$ 求它的频谱函数 $F(\omega)$ 的积分变换式（15-7）称为付里叶正变换，这个

变换式又可以简写为

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

频谱函数一般用复函数，用复数的指数形式来表达，则

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

式中频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 用以表示非周期信号 $f(t)$ 的各频率分量振幅间的比例关系，它的图形就是非周期信号 $f(t)$ 的振幅频谱，也可以直接称 $|F(\omega)|$ 为 $f(t)$ 的振幅频谱。频谱函数的幅角 $\theta(\omega)$ 代表非周期信号 $f(t)$ 的各频率分量的初相，它的图形就是非周期信号 $f(t)$ 的相角频谱，也可以直接称 $\theta(\omega)$ 为 $f(t)$ 的相角频谱。由于不连续变量 $n\omega$ ，已变成连续变量 ω ，所以非周期信号的频谱是连续频谱。

由频谱函数 $F(\omega)$ 寻求它的原函数（非周期信号） $f(t)$ 的积分变换，可根据付里叶级数的级数形式取 $T \rightarrow \infty$ 时的极限导出。

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega_1 t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{T}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \right\} e^{jk\omega_1 t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \right] e^{jk\omega_1 t} \omega_1 \end{aligned}$$

式中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 。当 $T \rightarrow \infty$ 时 $\omega_1 \rightarrow d\omega$ ， $n\omega_1 \rightarrow \omega$ ，故

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \dots\dots\dots (15-8)$$

上述就是由频谱函数 $F(\omega)$ 寻求它的原函数 $f(t)$ 的积分变换式，称为付里叶反变换。通常所谓的付里叶积分就是指这个付里叶反变换积分公式。付里叶反变换式又可以简写为

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

将非周期信号的付里叶积分〔式(15-8)〕与周期信号的付里叶级数的复数形式〔式(15-3)〕相比，显然，付里叶积分中的 $\frac{1}{\pi} F(\omega) d\omega$ ，相当于付里叶级数的复数形式中的振幅系数 A_k 。所以，付里叶积分的物理意义是：一个非周期信号 $f(t)$ ，可以看成是由无穷多个频率连续变化的简谐分量迭加而成，所有简谐分量的振幅 $[\frac{1}{\pi} |F(\omega)| d\omega]$ 都是无穷小量，它们之间的比例关系由频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 来决定。

总的来说，付里叶正变换〔式(15-7)〕与付里叶反变换〔式(15-8)〕是一对积分变换，前者是由时域到频域的变换，即将非周期信号展开成连续频谱；后者则是由频域到时域的变换，即可用以将非周期信号的连续频谱综合成为信号的原函数。

必须指出，为了对非周期函数 $f(t)$ 进行付里叶变换，该函数不仅应满足狄利克雷条件，而且应当是绝对可积的，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 应为有限值。不满足绝对可积条件的函数使

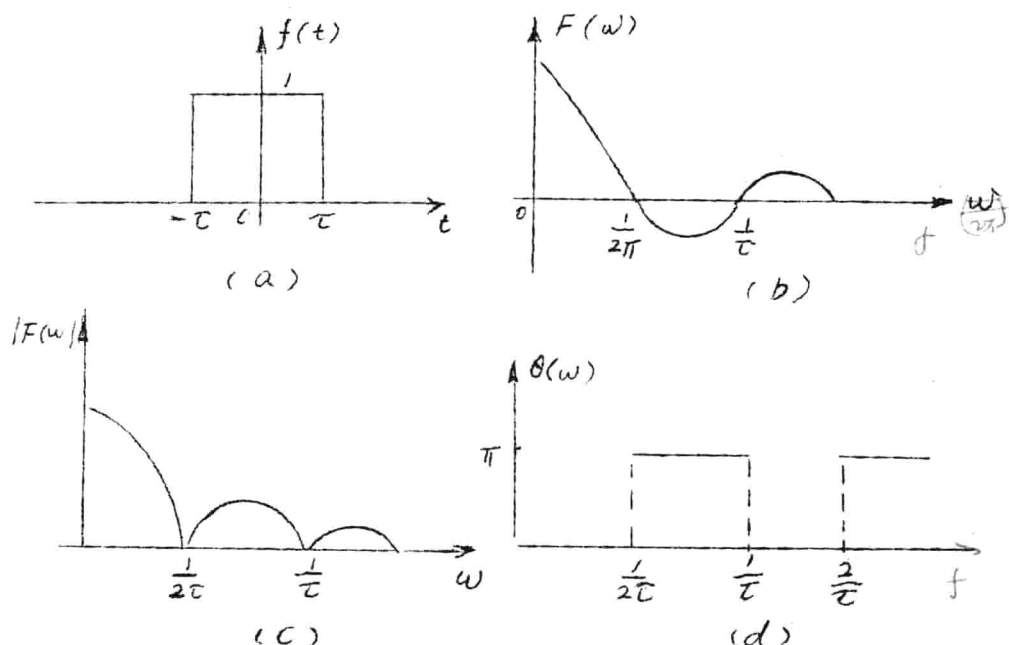


图 15-8 矩形脉冲及其频谱

不能直接用傅里叶正变换(式(15-7))来求它的频谱。

例 15-1, 求图 15-8(a) 所示矩形脉冲的频谱

【解】 按式(15-7), 给定脉冲波形的傅里叶正变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt$$
$$= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau}) = 2\tau \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} = 2\tau \frac{\sin 2\pi f\tau}{2\pi f\tau}$$

$F(\omega)$ 随 ω 的变化曲线如图 15-8(b), 当 $\omega\tau = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ 时, $F(\omega) = 0$ 。另外注意 $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau} = 1$ 。这条曲线其幅度随 ω 的增大而成反比地减小的减幅曲线; 取绝对值的结果, 将所有负值部分都反过来就得到振幅频谱如图 15-8(c) 所示, 其相位频谱如图 15-8(d) 所示简单地为零或 π 。

从图 15-8(c) 可见, 此脉冲波的各频率分量随频率的增高而显著地减小, 因此其主要频率分量大体上集中在 $f \leq \frac{1}{\tau}$ 之间。当脉冲宽度变小时, 此区间就变宽, 但幅度则相应地减小。所以当我们要求一个窄脉冲基本上无畸变地通过一个电路, 那么此电路必须能让较宽频率范围的分量顺利地通过; 反之, 对于宽脉冲则对电路的频率响应要求可松一些。举一个例子来说, 如果 $\tau = \frac{1}{2} \times 10^{-7}$ 秒, 那么对应于此 $1/\tau$ 的频率约为 20 兆赫, 而 $\tau = \frac{1}{2} \times 10^{-6}$ 秒, 则频率约为 2 兆赫。

上面的例子初步说明傅里叶变换对信号分析具有重要意义。

§ 15-4 拉普拉斯变换的概念

前一节内, 曾指出一个时间函数 $f(t)$ 既要满足狄利克雷条件, 又要满足绝对可积的条件(即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 收敛), 其傅里叶变换才能成立。在图 2 和线电工程中的函数, 虽然都能满足狄利克雷条件, 但却不一定都能满足绝对可积条件。

可见付里叶变换的适用范围有一定的局限性。解决这个问题、可用一个被称为“收敛因子”的指数函数 $e^{-\sigma t}$ 去乘该函数 $f(t)$ ，而且将 σ 的值取得足够大时，则总可以使在 $t \rightarrow \infty$ 时，其乘积 $f(t)e^{-\sigma t}$ 减幅足够快，从而满足绝对可积条件。

此外，在电路理论中，通常把换路的瞬时定为 $t=0$ ，然后研究 $t>0$ 时的过渡过程，这节中谈，激励函数是从 $t=0$ 时开始作用于换路后的电路的，响应函数也定义在 $t \geq 0$ 的区域。因此，若用 $f(t)$ 代表换路后的电路中的激励函数或响应函数，则当 $t < 0$ 时， $f(t)=0$ ，从而函数 $e^{-\sigma t}f(t)$ 的付里叶正变换中积分的下限可改为 0。为了计入原函数 $f(t)$ 中可能包括的冲激函数起见，积分的下限宜记为 0^- 。于是得拉普拉斯变换的定义公式如下：

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \dots\dots (15-9)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad \dots\dots (15-10)$$

式中 s 是一个复数， $s = \sigma + j\omega$ ，而 $f(t)$ 定义在 $t > 0$ 的区域。积分变换式 (15-9) 称为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯正变换，式中的积分称为拉普拉斯积分；经过拉普拉斯积分这样得到的复变函数 $F(s)$ 称为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯象函数（可简称象函数）。积分变换式 (15-10) 称为拉普拉斯反变换。

拉普拉斯正变换和反变换可分别简写为

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

拉普拉斯变换中的复参变量 $s = \sigma + j\omega$ 通常称为复频率。这是一个广义的频率概念。因此，拉普拉斯正变换是由时域到复频域的变换；拉普拉斯反变换是由复频域到^时域的变换；拉普拉斯象函数 $F(s)$ 又可称为复频谱函数，它是频谱函数 $F(\omega)$

(16)