高等教育“十二五”规划教材

LINEAR ALGEBRA

线性代数

主编/李　国　王晓峰

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

线性代数

李　国　王晓峰　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为高等院校非数学专业普遍开设的“线性代数”课程编写的教材，其内容主要包括矩阵与初等变换、矩阵代数、行列式、向量间的线性关系与线性方程组、特征值与特征向量、向量的内积与正交化、二次型等. 每章后都附有习题. 全书理论体系完整、逻辑严密、推理简洁，适用于教学.

本书可作为高等院校经济管理专业以及其他一些理工专业的教材，也可作为自学的参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李国，王晓峰主编. —北京：科学出版社，2012
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-034598-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李…②王… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 115612 号

策划：刘玉兴
责任编辑：李 瑜 / 责任校对：马英菊
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2012 年 7 月第一次印刷 印张：8 3/4
字数：164 000

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135763-2038

前　言

进入21世纪，数学工具在学科发展中的重要性越来越突出，这一点在经济管理等学科专业表现得尤为明显. 利用数学工具解决问题，首先是数学模型的建立，其次是模型的分析与求解. 其中，线性代数所讨论的线性模型是最重要、最基础的部分，不仅很多问题直接归纳为这种线性模型，而且许多其他模型的求解最后也归结为这种线性模型. 这种现象对经济管理专业也不例外.

本书的主要内容包括矩阵与初等变换、矩阵代数、行列式、向量间的线性关系与线性方程组、特征值与特征向量、向量的内积与正交化、二次型等. 在保证体系完整、逻辑严密、推理简洁的前提下，本书还注重基本概念自然的引入、直观生动的理解，注重基本方法的来龙去脉，不但深入衔接，而且操作简明扼要. 具体地说，本书的主要特点如下：

1. 结构编排新颖. 本书不同于传统教材首先介绍行列式的编排方式，而是开宗明义直接引入矩阵的概念，以矩阵为主线串联以下各章. 行列式不再是作为一个相对独立的内容，而是作为矩阵的一个数值特征引入.

2. 突出以"初等变换"为解决问题的主要手段. 在自然引入初等变换的概念后，以后各章强调用初等变换求解问题，从而有利于形成系统的以初等变换为基础的解决线性问题的思维方式.

3. 在行列式一章中，摒弃传统的通过奇偶排列引入定义的方式，直接通过递归简洁明了地引入定义. 这样有利于学生对行列式作为一种解决问题方法的理解与应用.

4. 为了让学生在处理诸如求向量组的极大无关组以及求一向量由该极大无关组线性表出时心里踏实，编者给出了具体矩阵的初等行变换不改变其列向量间的线性关系的证明.

考虑到理工类和经管类专业各自的需求以及各学科学时安排的不同，教师可对用 * 号标记的部分进行取舍. 特别地，书中有两个定理的证明用附录的形式给出，而关于生成子空间的定义及相关内容（用 * 号标记）和第6章关于向量内积以及正交矩阵的内容有利于理工类学生对后续课程的学习，经管类学生则不必学习这些内容.

本书第1～3章由李国副教授编写，第4～7章由王晓峰教授编写. 全书由李国副教授统稿.

本书参阅了许多专家学者的论著，并引用了部分文献的信息，恕不一一指明出处，在此向他们表示诚挚的谢意！

限于编者的水平，疏漏之处在所难免，敬请读者与专家批评指正.

编　者

2012.5

目　　录

第 1 章　矩阵与初等变换

人们在科学研究、工程技术、经济、管理等众多领域，经常会遇到各种各样的线性问题. 矩阵就是描述和处理这些线性问题最基本、最重要的工具之一.

§ 1.1　矩阵的定义

1.1.1　矩阵

定义 1.1.1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$构成的形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

的矩形数表，称为一个规模为 m 行 n 列(称为 $m\times n$ 级，简称 $m\times n$)的**矩阵**. 若数据 a_{ij} 复数取值，则称之为**复矩阵**；若 a_{ij} 实数取值，则称之为**实矩阵**. 本书除非特别说明，所讨论的矩阵均指实矩阵. 构成矩阵的数据 a_{ij} 称为**元素**，双下标 ij 中的 i 为行下标，j 为列下标. 一般用大写的英文字符 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵，用记号 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是一个其第 i 行、第 j 列[记为(i, j)]位元素为$a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$的 $m\times n$ 矩阵.

例如，如下两个矩阵分别是 2×2、2×3 矩阵：

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

如下两个矩阵分别是 1×4、4×1 矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

特别地，设 a 是一个数，则以 a 为元素的 1×1 矩阵表示为

$$[a]$$

其实际意义就是表示数 a，即$[a]=a$.

例 1.1.1 设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个变元. 由 m 个 n 元实系数线性代数方程构成的线性代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.1.2}$$

的系数构成的形如矩阵(1.1.1)的矩阵，称为线性方程组(1.1.2)的系数矩阵. 进一步，把方程组右端数据补充到系数矩阵(1.1.1)的右端形成的 $m\times(n+1)$ 的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

称为线性方程组(1.1.2)的增广矩阵.

线性方程组(1.1.2)的所有信息均储存在增广矩阵(1.1.3)中. 不难看出，方程组与增广矩阵是一一对应的.

例 1.1.2 某城市过去一年土地使用变更情况如下：92%的商业用地仍作为商用，其余 8%改作居民用地；87%的居民用地保持不变，12%改作商用，剩余 1%留作空地；原有空地的 89%仍不变，4%改作商用，7%改作民用. 试用矩阵描述土地使用的变更情况.

解 该城市过去一年土地使用变更情况用矩阵可描述如下：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.92 & 0.08 & 0 \\ 0.12 & 0.87 & 0.01 \\ 0.04 & 0.07 & 0.89 \end{bmatrix}$$

其中，第 1、2、3 行分别描述商用、民用、空地的变更情况；第 1、2、3 列分别描述这三者获取土地的情况.

例 1.1.3 诺贝尔经济学奖获得者 Wassily Leontief 曾考虑如下的一个经济学模型：一个原始部落根据分工，人们分别从事三种劳动：农田耕作(记以 F)，农具制作(记以 M)，以及织物编织(记以 C). 人们之间通过实物交易进行贸易. 图 1-1-1 给出了这三组人之间的交易系统.

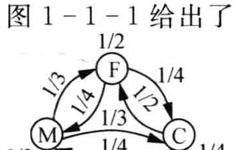

图 1-1-1

图示表明农夫们将每年的收获的 1/2 留给自己，并分别拿出 1/4 给工匠们和织布者们；而工匠们平均分配他们制作的用具给每个组；织布者们留下 1/4 的衣物给自己，并拿出 1/4 给工匠们，1/2 给农夫们. 试用矩阵描述此交易系统.

解　此交易系统可用矩阵描述如下：

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$$

其中，第 1、2、3 列分别表示 F、M 与 C 对自己劳动成果的分配情况；第 1、2、3 行分别表示 F、M 与 C 分配得到的情况.

例 1.1.4　某公司有四个工厂，分布在不同地区，它们同时生产三种产品，产量(单位：t)如表 1-1-1 所示.

表 1-1-1

工厂＼产品	P_1	P_2	P_3
甲	5	2	4
乙	3	8	2
丙	6	0	4
丁	0	1	6

试用矩阵统计这些数据.

解　该公司四个工厂生产三种产品的数量可用下述矩阵描述：

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

其中，四行分别表示甲、乙、丙、丁四个工厂的生产情况，三列分别表示三种产品 P_1，P_2，P_3 的产量.

1.1.2　几种特殊矩阵

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

是一个 $m\times n$ 矩阵. 当 m 或 n 取某些特定的值，或当 $\boldsymbol{A}$ 的某些指定位置上的元素为特定的数时，便得到相应的特殊矩阵.

当 $m=n$ 时，即 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数相同时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵时，元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以下的元素(不包括主对角元)均为零，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角矩阵**；如果 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以上的元素(不包括主对角元)均为零，

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**下三角矩阵**. 例如，下述两个 4 阶方阵中，$\boldsymbol{U}$ 是上三角矩阵，而 $\boldsymbol{V}$ 是下三角矩阵：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角矩阵又是下三角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**. 例如，下述矩阵是一个 4 阶对角矩阵：

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个对角矩阵，并且对角线上元素全部相等，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**. 特别地，如一数量矩阵其对角线上的元素均为 1，则称之为**单位矩阵**，用记号 $\boldsymbol{I}$ 表示，必要时用 $\boldsymbol{I}_n$ 表示其为 n 阶单位矩阵. 例如，下述矩阵中，$\boldsymbol{B}$ 是一个数量矩阵，$\boldsymbol{I}_4$ 是一个 4 阶单位矩阵.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{I}_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为 $m\times n$ **零矩阵**，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或简记为 $\boldsymbol{O}$.

当 $m=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ **维行向量**；当 $n=1$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{m}$ **维列向量**. 我们常用 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，……表示行向量和列向量. 例如，下述矩阵中，$\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 4 维行向量(通常地，行向量也用圆括弧表示)，$\boldsymbol{\beta}$ 是一个 3 维列向量：

$$\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 4\end{bmatrix}$$

一般地，设 $\boldsymbol{A}$ 为任一 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个行向量和 n 个列向量，即如果 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，那么，

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots,\ a_{in}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

和

$$\boldsymbol{\beta}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

分别是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量和 n 个列向量，并形式地记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_n]$$

§1.2　矩阵的初等变换

1.2.1　线性方程组的初等变换

现在考虑如下的两个线性方程组：

$$(\mathrm{a})\begin{cases}x+2y-3z=4\\ -x-3y+5z=3\\ 2x+4y-5z=-1\\ x+y=2\end{cases}\qquad (\mathrm{b})\begin{cases}x+2y-3z=4\\ -y+2z=7\\ z=-9\\ 0=0\end{cases}$$

读者将会知道，方程组(a)可同解地化为(b). 明显地，方程组(b)更容易求解：从第三个方程得 $z=-9$，通过回代，可以求出 $y=-25$，$x=27$. 显然，方程组的解是唯一的，这组唯一的解用行向量可描述为：$(27,\ -25,\ -9)$.

方程组(b)称为阶梯型方程组. 一般地，一个 n 元线性方程组若满足如下条件则称为**阶梯型方程组**.

1) 若方程组中某一方程的各项系数(含常数项)均为零，则它以下所有方程(若存在)的各项系数均为零；

2) 若方程组中某一方程的各项系数(含常数项)不全为零，假设第一个不为零的项是第 i 项，则此方程以下所有方程(若存在)的前 i 项的系数均为零.

例如，如下的方程组均是阶梯型的：

$$(\mathrm{c})\begin{cases}2x+2y+z=0\\ z=-3\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}\qquad (\mathrm{d})\begin{cases}-3x+y=2\\ 3z=-7\\ 0=3\end{cases}$$

$$(\mathrm{e})\begin{cases}5x_1-2x_2-3x_4=7\\ 2x_3+5x_4=-2\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}$$

$$(\mathrm{f})\begin{cases}x_1-2x_2-x_3+x_4=-1\\ x_2+3x_4=2\\ x_3-5x_4=0\\ x_4=-5\end{cases}$$

解线性方程组的消元法就是要对给定的线性方程组施行三种所谓的初等变换，将其变换成一个同解的阶梯型方程组，从而达到求解的目的. 我们先考察如下的一个例子.

将方程组

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-2x_2 \quad\quad =-1 \\ 2x_1 \quad\quad -2x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-2x_3=1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

依次作如下的变形：

将方程组(1.2.1)中前两个方程位置互换，得

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \quad\quad =-1 \\ \quad\quad 2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1 \quad\quad -2x_3=2 \\ 4x_1-2x_2-2x_3=1 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

将方程组(1.2.2)中第一个方程的－1倍和－2倍分别加到第三个和第四个方程上，得

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \quad\quad =-1 \\ \quad\quad 2x_2+2x_3=1 \\ \quad\quad 2x_2-2x_3=3 \\ \quad\quad 2x_2-2x_3=3 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

将方程组(1.2.3)中第二个方程的－1倍分别加到第三个和第四个方程上，得

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \quad\quad =-1 \\ \quad\quad 2x_2+2x_3=1 \\ \quad\quad\quad\quad -4x_3=2 \\ \quad\quad\quad\quad -4x_3=2 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

将方程组(1.2.4)中第三个方程的－1倍加到第四个方程上，得

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2 \quad\quad =-1 \\ \quad\quad 2x_2+2x_3=1 \\ \quad\quad\quad\quad -4x_3=2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0=0 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

方程组(1.2.5)是一个阶梯型方程组，容易求得其唯一解为

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=1,x_3=-\frac{1}{2}$$

上述过程可以任意采取下述三种变换，即所谓线性方程组的初等变换：

Ⅰ. 交换某两个方程的相互位置；

Ⅱ. 用一非零数乘以某一方程；

Ⅲ. 某一方程乘以一数后加到另一方程上.

定理 1.2.1　一线性方程组经过若干上述初等变换后得到的方程组与原方程组同解.

证明　仅证明初等变换(Ⅲ)不改变方程组的解(其他两个作为练习). 设有方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.2.6}$$

把第 i 个方程乘以一数 k 后加到第 j 个方程上得到方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \qquad\cdots\cdots \\ (a_{j1}+ka_{i1})x_1+(a_{j2}+ka_{i2})x_2+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})x_n=b_j+kb_i \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.2.7}$$

现证方程组(1.2.6)与方程组(1.2.7)的同解. 如果(c_1，c_2，…，c_n)是方程组(1.2.6)的任一解，只须验证它也是方程组(1.2.7)中第 j 个方程的解即可. 因

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n=b_i\ ,\ a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n=b_j$$

故

$$k(a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n)+a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n=kb_i+b_j$$

即

$$(ka_{i1}+a_{j1})c_1+(ka_{i2}+a_{j2})c_2+\cdots+(ka_{in}+a_{jn})c_n=kb_i+b_j$$

从而(c_1，c_2，…，c_n)确为方程组(1.2.7)中第 j 个方程的解.

另一方面，因为方程组(1.2.6)也可由方程组(1.2.7)的第 i 个方程乘以 $-k$ 后加到第 j 个方程得到，故由刚才的证明，方程组(1.2.7)的任一解也是方程组(1.2.6)的解. 证毕.

由上面的定理知，方程组(1.2.5)与方程组(1.2.1)同解，从而

$$x_1=\frac{1}{2}\ ,\ x_2=1\ ,\ x_3=-\frac{1}{2}$$

也是方程组(1.2.1)的解.

1.2.2 矩阵的初等行变换与初等列变换

从方程组(1.2.1)到方程组(1.2.5)的初等变换过程可用相应的矩阵初等行变换表示. 首先写出方程组(1.2.1)的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

交换前两行得方程组(1.2.2)的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

将第一行的-1倍和-2倍分别加到第三、四行上得到方程组(1.2.3)的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

将第二行的-1倍分别加到第三、四行上得到方程组(1.2.4)的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

将第三行的-1倍加到第四行上得方程组(1.2.5)的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

总结上述矩阵的变换过程，定义矩阵的初等行变换如下.

定义 1.2.1 矩阵的**初等行变换**是指下述三种矩阵变换：

Ⅰ. **交换某两行的相互位置**，用记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示 i，j 行互换；

Ⅱ. **某一行乘以一非零数**，用记号 kr_i 表示第 i 行乘以数 k；

Ⅲ. **某一行乘以一数后加到另一行上**，并用记号 $kr_i + r_j$ 表示把第 i 行乘以数 k 加到第 j 行上(第 i 行保持不变).

这样，对线性方程组施行的初等变换相应于对其增广矩阵进行初等行变换. 从而，定理 1.2.1 可改述如下.

定理 1.2.1′　将一个线性方程组的增广矩阵施行一系列初等行变换后得到的矩阵作为增广矩阵，其对应的线性方程组与原方程组同解.

证明　(略)

对应于阶梯型方程组，我们有如下的阶梯型矩阵的定义.

定义 1.2.2　满足下列条件的矩阵称为**阶梯型矩阵**：

1) 若某一行为零行(即其元素均为零. 零列同理)，则它以下所有行(若存在)均为零行；

2) 若某一行为非零行，并且第一个非零元素位于第 i 列，则它以下所有行(若存在)的前 i 个元素均为零.

例如，下列矩阵均是阶梯型矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&1&0\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3&1&0&-2\\0&0&3&-7\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&-2&0&-3&7\\0&0&0&5&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-2&-1&1&1\\0&1&0&3&2\\0&0&1&-5&0\\0&0&0&1&-5\end{bmatrix}$$

而下述矩阵则不是阶梯型矩阵：

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-1&0&2&3&0\\0&2&-1&0&4\\0&0&0&4&-2\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

定理 1.2.2　任一矩阵经若干次初等行变换后均可化为阶梯型.

证明　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 是一 $m\times n$ 级矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵，则已是阶梯型矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵，则从第一列起依次查找非零列，不妨设第一个非零列为第 j 列，并设此列中从上到下第一个非零元素为 a_{ij}. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第 i 行互换并把得到的矩阵记为 $\boldsymbol{A}_1$. 此时，$\boldsymbol{A}_1$ 的前 $j-1$ 列全为零列，第 j 列的第一个元素 $a_{ij}\neq0$. 如果 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 j 列除 a_{ij} 外还有非零元素，例如，$a_{kj}\neq0$，则将 $\boldsymbol{A}_1$ 的第一行的 $-\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$ 倍加到 a_{kj} 所在的行使其为零. 因而，经过若干Ⅲ型初等行变换可将 $\boldsymbol{A}_1$ 的第 j 列除 a_{ij} 外的元素全化为零，记得到的矩阵为 $\boldsymbol{A}_2$. 此时，$\boldsymbol{A}_2$ 的前 $j-1$ 列

仍全为零列.

如果 $\boldsymbol{A}_2$ 仍不是阶梯型，那么 $\boldsymbol{A}_2$ 的后 $m-1$ 行不全为零，则对 $\boldsymbol{A}_2$ 的后 $m-1$ 行重复以上过程得到 $\boldsymbol{A}_3$. 如此重复至多 $m-2$ 次可将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯型. 证毕.

相应于矩阵的初等行变换，同样可以定义矩阵的初等列变换.

定义 1.2.1′ 矩阵的**初等列变换**是指下述矩阵变换：

Ⅳ. **交换某两列的相互位置**，用记号 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表 i，j 列互换；

Ⅴ. **某一列乘以一非零数**，用记号 kc_i 表第 i 列乘以数 k；

Ⅵ. **某一列乘以一数后加到另一列上**，并用记号 $kc_i + c_j$ 表示把第 i 列乘以数 k 加到第 j 列上(第 i 列保持不变).

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**.

完全类似于定理 1.2.2，对矩阵施行初等列变换，同样可得到阶梯型矩阵.

定理 1.2.3 任一矩阵经若干次初等列变换后均可化为阶梯型.

证明 （略）

1.2.3 矩阵的最简型

定义 1.2.3 一阶梯型矩阵称为**最简型**，如果其非零行的第一个非零元素均为 1，并且这些元素所在列的其他元素均为零.

容易证明，任一阶梯型矩阵均可经若干次初等行(列)变换化为最简型.

解线性方程组时，如果方程组有解，可以通过其最简型直接写出原方程组的解. 例如，对 § 1.2.2 中方程组(1.2.5)对应的增广矩阵进一步施加如下的初等行变换

$$
\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\xrightarrow{r_3/2+r_2}
\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_2+r_1}
\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\xrightarrow[r_3/(-4)]{r_1/2,\ r_2/2}
\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

由定义 1.2.3 知，最后一个矩阵是最简型，并且原方程组与此最简型对应的方程组同解，即

$$
\begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1/2 \end{cases}
$$

§ 1.3　线性方程组解的初步讨论

1.3.1　*n* 元线性方程组

给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.3.1}$$

由定理 1.2.1′，可设其增广矩阵经若干次初等行变换后化为前 r 行非零的阶梯型：

$$\left[\begin{array}{ccccccc:c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1.3.2}$$

为叙述方便起见，不失一般性，假设 $c_{ii}\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, r$(若非如此，可通过调整原方程组中变量的排列顺序来实现)．方程组(1.3.2)对应的线性方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

情形 1　方程组(1.3.2)中 $d_{r+1}\neq 0$．此时，方程组(1.3.3)有矛盾式 $0=d_{r+1}$，因此线性方程组(1.3.1)无解．

情形 2　方程组(1.3.2)中 $d_{r+1}=0$，并且 $r=n$．此时，方程组(1.3.3)具有如下形式：