中国书籍文库
China Books Library
汇集优秀原创学术论著
推动科研成果转化交流

无限与真矛盾

WuXian Yu ZhenMaoDun

董瑞侠 著

中国书籍出版社
China Book Press

中国书籍文库 China Books Library | 汇集优秀原创学术论著 推动科研成果转化交流

无限与真矛盾

WuXian Yu ZhenMaoDun

董瑞侠 著

中国书籍出版社 China Book Press

图书在版编目(CIP)数据

无限与真矛盾/董瑞侠著. —北京:中国书籍出版社,
2012

ISBN 978-7-5068-2892-5

Ⅰ. ①无… Ⅱ. ①董… Ⅲ. ①逻辑矛盾—研究
Ⅳ. ①B812.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 178742 号

责任编辑/ 周小雅 闫玉峰
责任印制/ 孙马飞 张智勇
封面设计/ 中联学林
出版发行/ 中国书籍出版社
地 址: 北京市丰台区三路居路 97 号(邮编:100073)
电 话: (010)52257143(总编室) (010)52257153(发行部)
电子邮箱: chinabp@ vip. sina. com
经 销/ 全国新华书店
印 刷/ 北京天正元印务有限公司
开 本/ 710 毫米×1000 毫米 1/16
印 张/ 18
字 数/ 324 千字
版 次/ 2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷
书 号/ ISBN 978-7-5068-2892-5
定 价/ 54.00 元

前　言

真矛盾是辩证逻辑矛盾

真矛盾是指由具有逻辑上的矛盾关系且同真同假的两个命题所组成的合取命题，具有“A 并且非 A”的形式特征，是两方面都有客观事实作支撑的特殊的辩证矛盾和逻辑矛盾。

真矛盾的存在似乎令人不可思议，然而它的存在具有客观性，无论人们多么不情愿，只要愿意把尊重事实放在首位，都迟早会承认真矛盾的客观性和合理性。

真矛盾的一个突出实例是数学上点的长度问题。早在古希腊时代，哲学家芝诺和亚里士多德就对点的长度提出质疑：从逻辑上讲，点的长度要么是0要么不是0，二者必居其一且仅居其一。如果点的长度是0，那么点没有任何积累性，唯物主义哲学肯定“无不生有，有不化无”，长度为0的点不可能组成有长度的线段；如果点的长度是非0，哪怕是极小极小的长度，组成线段的点的数目也不会是无限多而只能是有限多。实际情况是线段有大于0的长度和无限多个点，这表明点的长度既不是0也不是非0，根据排中律，也可以说点的长度既是0又是非0，这个事实说明点是具有矛盾性的对象，这个矛盾的一个方面是0，另一个方面是非0，从亦0非0的角度看，两个方面同真，从非0非非0的角度看，两个方面同假。这个矛盾不是普通的逻辑矛盾，因为普通的逻辑矛盾是两个方面一真一假，而这个矛盾是两个方面同真同假，这就是所谓真矛盾。

辩证法大师黑格尔和恩格斯都明确地肯定运动是矛盾，说“作机械运动的物体在同一瞬间既在这个地方又不在这个地方”。取两个瞬间 t_1 与 t_2，$t_2 - t_1 = \Delta t$，运动物体在 Δt 内移动的距离记为 Δs，Δt 越小，Δs 也越小，当 Δt 等于0时，Δs 也等于0。$\Delta t = 0$ 就是 t_1 和 t_2 重合为一个瞬间，$\Delta s = 0$ 就是位移为0，这表明在同一瞬间运动物体位移为0，是静止的。再换个角度看，如

果在每一瞬间物体都是静止的,怎么会有总体上的位置移动呢?总体上的位置移动是每一瞬间的位置移动累积而成的,这表明在同一瞬间运动物体位移为非0,是运动的。将这两方面综合起来就是运动物体在同一瞬间既静又动、既在这个地方又不在这个地方。这种矛盾也是超出了形式逻辑框架的真矛盾,是一种特殊的辩证矛盾。

上述真矛盾都涉及无限小,在头脑中建立无限小的直观形象相对困难。那么,存在只涉及宏观物体的离散型真矛盾吗?

一、存在离散型真矛盾

宏观物体看得见摸得着,容易在头脑中建立直观形象,只涉及宏观物体的离散型真矛盾,相对来说要比涉及无限小的真矛盾容易理解。下面给出一个典型的离散型真矛盾——万能钥匙悖论:

在一张桌上有若干把钥匙和若干把锁,能打开桌上一切锁的钥匙称为万能钥匙。在钥匙和锁一一对应且 m 号钥匙恰好能打开 1 至 m 号这 m 把锁的前提下,有万能钥匙吗?假设桌上有 3 把钥匙和 3 把锁,1 号钥匙能打开 1 号锁,2 号钥匙能打开 1 号锁和 2 号锁,3 号钥匙能打开 1 号锁、2 号锁和 3 号锁,显然存在万能钥匙,3 号钥匙就是万能钥匙。令钥匙和锁一对一对不断增加,只要钥匙和锁是有限多对,就总是存在万能钥匙,最后一把钥匙就是万能钥匙。当钥匙和锁增加到无限多对时,也就是钥匙和锁没有最后一对时,万能钥匙还存在吗?人们很容易想到正面答案:不存在万能钥匙,因为任取一把钥匙,它都处在钥匙序列的某个中间位置,在它后面一定存在着序号比它大的锁,它不能打开序号比它大的锁,不可能是万能钥匙。然而,世界的复杂性超出了人们的想象,反面答案竟然也是成立的。使用强制性反向思维法硬着头皮从反面思考:随着钥匙和锁一对一对增加,能够被同一把钥匙打开的锁越来越多,当有一万对钥匙和锁时,能被同一把钥匙打开的锁有一万把,当有一亿对钥匙和锁时,能被同一把钥匙打开的锁有一亿把,当钥匙和锁的对数最多时,能被同一把钥匙打开的锁也最多。当钥匙和锁有无限多对时,钥匙和锁的对数达到最多,此时,能被同一把钥匙打开的锁也达到最多。假设此时能被同一把钥匙打开的锁至多为前有限多把,记为前 m 把,易知这不成立,因为前 m + 1 把锁也能被同一把钥匙打开,如 m + 1 号钥匙就能打开前 m + 1 把锁,矛盾,故能被同一把钥匙打开的锁至少为

前无限多把,也就是说一切锁能够被同一把钥匙打开,这表明存在万能钥匙。既存在万能钥匙同时又不存在万能钥匙,这是一个典型的逻辑矛盾,这个逻辑矛盾的两个方面在逻辑地位上平起平坐、同真同假,故它是一个真矛盾。

二、真矛盾具有客观性

真矛盾具有客观性是指真矛盾不是人们主观臆造的,也不能被人们所消除,它具有不以人的意志为转移的性质。真矛盾的两个方面都有客观事实作支撑,否定其中任何一个方面都会与客观事实相抵触。以万能钥匙悖论为例:"不存在万能钥匙",这可以通过原则性实践检验来证明:如果存在万能钥匙,就必然存在第一把万能钥匙,无论第一把万能钥匙存在于多么远的地方,总是处在有限远的位置,原则上总是可以走到它的面前进行实际检验,它的序号记为 m,当我们用它无法打开 m+1 号锁的时候,就可以断定它不是万能钥匙。第一把万能钥匙不存在,也就不会存在万能钥匙,谁敢说这不是真的呢?"存在万能钥匙",这也可以通过原则性实践检验来证明:将能够被同一把钥匙打开的锁都染成红色,其余的锁都染成蓝色,如果存在蓝锁,必然有第一把蓝锁,无论它存在于多么远的地方,总是处在有限远的位置,原则上总是可以走到它的面前进行实际检验,它的序号记为 m,当我们用 m 号钥匙一一打开了 1 至 m 号锁的时候,就可以断定它应当染成红色。第一把蓝锁不存在,也就不会存在蓝锁,也就是说一切锁都是红锁,即一切锁都能被同一把钥匙打开,亦即存在万能钥匙,谁敢说这不是真的呢?

一般说来,人们对"不存在万能钥匙"没有疑义,人们很容易想到在没有最后一把钥匙的情况下,每一把钥匙都处在某个中间位置,在它后面一定存在更大序号的锁,并且这种序号更大的锁有无限多把,因此对每一把钥匙而言,它不能打开的锁有无限多把,故它不可能是万能钥匙。于是问题的关键就在于证明"存在万能钥匙"成立,鉴于这方面的证明具有特殊难度,不妨采用一种虽不简洁但很通俗的证明方式:

易知:能够被同一把钥匙打开的锁至少有 1 把成立;能够被同一把钥匙打开的锁至少有 2 把成立;能够被同一把钥匙打开的锁至少有 3 把成立;能够被同一把钥匙打开的锁至少有 4 把成立;……,这样的真命题共有无限多个。由此可推出:能够被同一把钥匙打开的锁至多有 1 把不成立;能够被同

一把钥匙打开的锁至多有2把不成立;能够被同一把钥匙打开的锁至多有3把不成立;……,这样的真命题也有无限多个。这表明能够被同一把钥匙打开的锁的数目用任何自然数都不能表示,也就是说这个数目不是有限数而只能是无限数。能够被同一把钥匙打开的锁有无限把等价于至少存在一把钥匙能够打开无限把锁,这能够打开无限把锁的钥匙还不是万能钥匙吗?

三、无限具有真矛盾性质

自然数有无限多个,一切自然数的集合 $N=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 是公认的最简单的无限集合。凡是能够与N建立元素间的一一对应关系的集合都被称为可数集,任一无限集合都包含一个可数子集。如果N具有真矛盾性质,那么一切可数集和包含可数子集的无限集便都具有真矛盾性质。

对于任意一条辫子,将其中至少被一根头发统一贯穿的部分染成红色,其余部分为黑色,这两部分分别称为红段和黑段。将辫子的始端记为0,将红段和黑段的分界点记为a。假设存在长度大于0的黑段,那么黑段中没有任何头发通过,否则,红段和黑段的分界点就不是a,而是大于a。黑段中没有任何头发通过,表明黑段不是辫子的组成部分,矛盾,故不存在长度大于0的黑段,即整条辫子都是红段,亦即至少有一根头发贯穿整条辫子。在辫子有限长的情况下不会出现矛盾,在辫子无限长的情况下有可能出现矛盾。例如,由长度依次为1米,2米,3米,……的无限多根头发所组成的无限长的辫子中,一方面每一根头发都是有限长,另一方面贯穿整条辫子的头发无限长,也就是说在辫子中既不存在无限长的头发同时又存在无限长的头发。由于无限长的头发必然是辫子中最长的头发,也可以说在辫子中既不存在最长头发同时又存在最长头发。在此,最长头发与最大自然数相对应,于是可以说既存在最大自然数又不存在最大自然数。N有终元吗?从存在最大自然数的角度看,N有终元,最大自然数就是N的终元;从不存在最大自然数的角度看,N无终元。N既有终元同时又无终元表明N具有真矛盾性质,由此可以推知一切无限集皆有真矛盾性质,正是在这个意义上说无限具有真矛盾性质,简而言之,无限是真矛盾。

四、无限具有客观原型

真矛盾往往同无限有关,这容易使人对无限的客观性产生疑惑。实际

上,可以找到无限的客观原型,面对无限的客观原型,肯定无限的客观性就是顺理成章的事。

整体与部分的区分需要有一定标准,然而这个标准可以不包括界限分明的分割和绝对精确的测量。例如,说到某人左小臂靠近腕部的三分之一这一段时,这一段无疑是某人的一部分,即使不把这一段切割下来也不作精确测量,我们也不能否认这个部分是客观存在的。在此前提下,随便找一根1米长的木棍,它的前半部分(前1/2米),其余部分的前半部分(接下来的1/4米),其余部分的前半部分(接下来的1/8米),其余部分的前半部分(接下来的1/16米),……,构成一个无限序列。尽管没有把木棍截成一段一段,也没有通过精确测量并做上标记,这无限多个部分也是在客观上同时并存的,这就是无限的客观原型。自然数是客观对象在数目方面的客观属性的抽象标志,每一个自然数都可以从上述无限序列中找到一个特定的前段作为客观原型,例如,从上述序列中找到前6项就可以作为自然数6的客观原型,找到前1000项就可以作为自然数1000的客观原型。一切自然数是否同时并存取决于它们的实质性内容是否同时并存,在上述无限序列中,一切自然数的客观原型是同时并存的,由此可知一切自然数是同时并存的。一切同时并存的自然数构成数学世界中基础性无限对象。

五、排中律依然可用

排中律断定互相矛盾的两个命题必然是一真一假,既然存在两个互相矛盾的命题同真同假的真矛盾,就说明排中律不是普遍有效的。有鉴于此,在证明真矛盾存在的过程中能够使用排中律吗?

如果证明不存在真矛盾,那就不能使用排中律,因为排中律的有效性以不存在真矛盾为前提,使用排中律是一种循环论证。如果证明存在真矛盾,就可以使用排中律,因为使用排中律的场合无非是两类:一类是有效场合,一类是无效场合,如果论证过程中所有使用排中律的场合都是有效场合,最终却推出了真矛盾,这说明论证过程无懈可击,真矛盾无可避免;如果论证过程中所有使用排中律的场合中至少有一个无效场合,这说明无论真矛盾推出与否,真矛盾已经存在了。

六、存在有限型真矛盾

无限场合必有真矛盾,但真矛盾并非只存在于无限场合。下面给出一个有限型真矛盾——绝对集悖论:

对于任一集合 $A=\{x \mid P(x)\}$,如果 A 具有性质 P,那么 A 称为相对集;如果 A 不具有性质 P,那么 A 称为绝对集。规定任何集合不能自身属于自身。在一页纸上写下如下内容:"$T=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 5\}=\{0,1,2,3,4,5\}=6$;$Q=\{x \mid x$ 为本页纸上用大写英文字母表示的绝对集$\}=\{T\}$。"T 是绝对集,因为 T 不具有 T 中元素所具有的性质。Q 是不是绝对集呢?如果 Q 是绝对集,Q 就与自己的元素具有同样性质,Q 就是相对集;如果 Q 是相对集,Q 就不具有与自己元素相同的性质,Q 就是绝对集。对于 Q 来说,绝对集与相对集这两种性质不是先后相继、无限振荡的,而是同时并存的。任取一个瞬间 i,正因为 Q 在 i 这一瞬间是绝对集,Q 才在 i 这一瞬间与自己的元素性质不同,Q 才在 i 这一瞬间是相对集,反之亦然。Q 在同一瞬间既是绝对集又是相对集,这是一个逻辑矛盾。这个逻辑矛盾的两个方面是互为前提、同真同假的,故它是一个真矛盾。这个真矛盾没有涉及无限对象,因此它是一个有限型真矛盾。

七、连续变化具有真矛盾性质

恩格斯说:"一切差异都在中间阶段融合,一切对立都经过中间环节而互相过渡,对自然观的这种发展阶段来说,旧的形而上学的思维方法就不再够了。辩证法不知道什么绝对分明的和固定不变的界限,不知道什么无条件的普遍有效的'非此即彼!',它使固定的形而上学的差异互相过渡,除了'非此即彼!',又在适当的地方承认'亦此亦彼!',并且使对立互为中介;辩证法是唯一的、最高度地适合于自然观的这一发展阶段的思维方法。"①当一个事物的性质连续地由"此"变到"彼"时,在"此"和"彼"的分界处其界限具有一定的模糊性,存在着"半此半彼"的中间状态,这个中间状态"亦此亦彼并且非此非彼",这就是真矛盾状态。例如,在从猿到人的漫长的演化过

① 恩格斯:《自然辩证法》,人民出版社 1971 年版,第 190 页。

程中，存在着若干万年的半人半猿状态，他们亦人亦猿并且非人非猿。再如，在数轴上取两个点集 $A=[0,1]$ 和 $B=(a,a+1)$，令 A 代表“此”，令 B 代表“彼”。点 a 是一个动点，由 0 出发连续地运动到 2。在这个过程中，当 a 小于 1 时，A 与 B 的交集非空，存在“亦此亦彼”点；当 a 大于 1 时，在 A 和 B 之间存在“非此非彼”点；当 a 等于 1 时，从经典数学的观点看，A 与 B 之间既无“亦此亦彼”点，也无“非此非彼”点，是严格的“非此即彼”，然而实际上并非如此。考虑无限序列 $(1,1+0.1]$，$(1,1+0.01]$，$(1,1+0.001]$，……中有共同元素的区间有多少：假设有共同元素的区间至多为前有限多项，记为前 m 项，易知这不成立，因为前 m+1 项也有共同元素，如 $1+(1/10^{m+1})$ 就是它们的共同元素，矛盾，故有共同元素的区间至少为前无限多项，即一切区间有共同元素。假设一切区间的共同元素至少有两个，任取两个共同元素，它们的差大于 0，差的第一位非 0 数字所在小数位的序号记为 n，易知较大的那个共同元素不会小于 $1+(1/10^n)$，因此它不能存在于序列的第 n+1 个区间中，亦即它不可能是一切区间的共同元素，矛盾，故一切区间的共同元素至多有一个。将上述序列中一切区间的唯一的共同元素记为 f。任取一个 B 中的元素 i，i 大于 1，将 i 小数点后第一个非 0 数字所在小数位的序号记为 n，易知 i 不会小于 $1+(1/10^n)$，因此它不能存在于上述序列的第 n+1 个区间中，亦即它不可能是上述序列一切区间的共同元素，也就是说它比上述序列一切区间的共同元素 f 大。这表明 B 中一切元素都比 f 大，故 f 不属于 B。另一方面上述序列中的任一区间的元素都比 1 大，因此 f 也比 1 大，这表明 f 也不属于 A。将上述两方面综合起来可知 f 是介于 A 与 B 之间的“非此非彼”点。据此可知，在 a 从 0 出发向 2 连续运动的过程中，起初有“亦此亦彼”点，接下来“亦此亦彼”点不断减少直到完全消失，在“亦此亦彼”点消失的同时产生“非此非彼”点。任取一个瞬间，在这个瞬间要么有“亦此亦彼”点，要么有“非此非彼”点，即横竖都有真矛盾。

八、真矛盾不能从逻辑上化解

对于任何一个逻辑矛盾，如果能够发现前提有误或推理不合逻辑，能够通过调整前提或推理过程而使之消失，就称这个逻辑矛盾能够从逻辑上化解。一般说来，逻辑主要考虑推理形式有效性问题而把前提的真假判定问题交给具体科学来解决，但逻辑也在相当程度上涉及前提的真假判定和调

整。如数学上的反证法，当使用命题 A 推出矛盾时，就断定 A 是假的和非 A 是真的，这就是对前提真假的一种判定，同时也对以后的相关推理带来用非 A 取代 A 的前提调整。真矛盾是一种特殊的逻辑矛盾，它是从 A 合乎逻辑地推出矛盾，同时又从非 A 合乎逻辑地推出矛盾，此时逻辑过程没有调整余地，用 A 与非 A 互相代换以调整前提也无济于事，故真矛盾不能从逻辑上化解。

无限过程的存在是无可置疑的，例如用后继法逐个构造自然数的过程就是一个没有最终环节的无限过程。无限过程中存在在任何时刻都不能完成的不可完成环节吗？为了使这个问题更直观形象以利于理解，我们看一个本质上相同的直观模型：

有一棵苹果树，上面结了无限多个苹果，用正整数给苹果依次编号。以 1 秒钟摘一个苹果的速度无止境地摘下去，显然这是一个无限过程。如果有不可完成环节，就存在在任何时刻也摘不到的苹果，也就是存在永远也摘不下来的苹果，也就是存在不可摘苹果。假设存在不可摘苹果，那么一方面，在可摘苹果和不可摘苹果分界处有最后一个可摘苹果和第一个不可摘苹果，当摘下最后一个可摘苹果后，再过 1 秒钟就能摘下第一个不可摘苹果，矛盾，故不存在不可摘苹果；另一方面，假设不存在不可摘苹果，那么没有最后一个可摘苹果。任取一个可摘苹果，不妨将它的序号记为 m，将它后面的苹果的序号所组成的集合记为 $m'=\{m+1,m+2,m+3,\cdots\}$，称为 m 的超集。一切超集的集合记为 $C=\{1',2',3',\cdots\}$。假设有共同元素的超集至多为前有限多个，记为前 m 个，易知这不成立，因为前 m+1 个超集也有共同元素，如 m+2 就是它们的共同元素，矛盾，故有共同元素的超集至少为前无限多个，即一切超集有共同元素。任取一个一切超集的共同元素，与它对应的苹果在一切可摘苹果的后面，也就是说它是一个不可摘苹果。这与不存在不可摘苹果相矛盾，故存在不可摘苹果。由于存在不可摘苹果和不存在不可摘苹果都导致矛盾，故无限过程既存在不可完成环节又不存在不可完成环节的逻辑矛盾是一个不能从逻辑上化解的真矛盾。

九、真矛盾是辩证矛盾

真矛盾有两个特征，一是超出形式逻辑框架，二是符合客观事实。辩证矛盾分两类：第一类是普通辩证矛盾，它符合客观事实但不超出形式逻辑框

架;第二类是特殊辩证矛盾,它符合客观事实并超出形式逻辑框架。显然,真矛盾就是特殊辩证矛盾。从古至今,不少辩证哲学家对于真矛盾的存在都有明确的肯定性论述,下面列举几例为本书前言作结:

古希腊哲学家芝诺说:"运动的东西既不在它所在的地方运动,又不在它所不在的地方运动"。①

古希腊哲学家阿那克萨戈拉说:"在小的当中没有最小的,在大的当中没有最大的,但是总有某个东西最小,也总有某个东西最大"。②

黑格尔说:"运动恰恰在于:在一个位置同时又在另一个位置,同样也可以说不在另一个位置,而只是在这个位置。""某物之所以运动,不仅因为它在这个'此刻'在这里,在那个'此刻'在那里,而是因为同一个'此刻'在这里又不在这里,因为它在同一个'这里'同时又有又非有。"③

恩格斯说:"运动本身就是矛盾,甚至简单的机械的位移之所以能够实现,也只是因为物体在同一瞬间既在一个地方又在另一个地方,既在同一个地方又不在同一个地方。……生物在每一瞬间是它自身,同时又是别的东西。"④

列宁说:"运动是(时间和空间的)不间断性与(时间和空间的)间断性的统一。运动是矛盾,是矛盾的统一。"⑤

---

① 李武林、谭鑫田、龚兴:《欧洲哲学范畴简史》,山东人民出版社 1985 年版,第 130 ~ 131 页。
② 伊莱·马奥尔:《无穷之旅》,上海教育出版社 2000 年版,第 3 页。
③ 李武林、谭鑫田、龚兴:《欧洲哲学范畴简史》,山东人民出版社 1985 年版,第 160 页。
④ 恩格斯:《反杜林论》,人民出版社 1972 年版,第 117 ~ 118 页。
⑤ 列宁:《列宁全集》第 38 卷,人民出版社 1959 年版,第 283 页。

目　录
CONTENTS

前言　真矛盾是辩证逻辑矛盾 …… 1

第一章　数学矛盾 …… 1
第二章　数学世界 …… 7
第三章　集合与集合论公理系统 …… 10
第四章　演绎推理 …… 18
第五章　矛盾的分类 …… 26
第六章　真矛盾的哲学探究 …… 30
第七章　无限集合与无限过程 …… 38
第八章　无限集合是真矛盾 …… 45
第九章　无限过程是真矛盾 …… 53
第十章　真矛盾证明的一般模式 …… 56
第十一章　真矛盾经典实例精析 …… 63
第十二章　自然数序列全分析 …… 66
第十三章　若干疑点精析 …… 68
第十四章　数学公理的相对性 …… 71
第十五章　形式逻辑基本规律的相对性 …… 74
第十六章　对真矛盾的辩证理解 …… 78
第十七章　真矛盾的若干直观模型 …… 81
第十八章　原则性间接实践证明 …… 100

第十九章　相关自由想象 …… 103
第二十章　经典悖论解析 …… 110
第二十一章　数学总体印象 …… 119
第二十二章　直接研究方法 …… 122
第二十三章　若干相关成果 …… 132
第二十四章　基本创新方法 …… 134
第二十五章　破除创新心理障碍 …… 157

附　录 …… 164
主要参考文献 …… 258
后　记 …… 259

第一章

数学矛盾

所谓数学矛盾，指的是数学中的逻辑矛盾，即运用数学界公认的公理和推理规则推导出来的两个互相矛盾的命题所组成的有机整体。

数学堪称是逻辑性最强的学科，形式逻辑是数学的基本推理工具，说数学中存在逻辑矛盾，并且这种逻辑矛盾植根于数学本性，是原则上不可消除的，这对许多人来说无异于"天方夜谭"。然而，事实是检验真理的最终标准，可以举出一系列严格的数学矛盾摆在世人面前，面对铁一般的客观事实，作为一个彻底的唯物主义者，除了正视和承认已是别无选择。

一、古代哲学家的质疑

古希腊哲学家芝诺和亚里士多德在两千多年前就向数学家提出尖锐质疑，指出数学不能自圆其说，即数学包含逻辑矛盾，这就是著名的芝诺悖论和亚里士多德悖论。

1. 芝诺悖论

芝诺提出过许多悖论，在此仅以单子悖论为例。古希腊毕达哥拉斯学派的数学信条是"万物皆数"，这里的"数"最初只是指有理数即整数和作为整数之比的分数，在无理数被发现以后，不得不将无理数也纳入"数"的范畴。至此，任何线段的长度，包括不能用有理数来表示的单位正方形对角线的长度都有确定的"数"与之对应。一条有限长的线段，由无限多个"单子"所组成，每个"单子"对应一个确定的"数"，该"数"表示从开端到该"单子"的线段长度。对此，芝诺提出了"单子"长度是0还是非0的问题：如果"单子"长度为0，那么"单子"毫无积累性，根据"无不生有、有不化无"的哲学信条，线段的长度只能是0，这与事实不符；如果"单子"的长度是非0，无限多个"单子"所组成的线段只能是无限长，也与事实不符。所谓"单子"就是数学中的"点"，直到今天，"有限长的线

段上有无限多个点”仍然是主流数学的经典观点。让我们用更通俗的方式再来回味一下芝诺的上述悖论:假设一条长度为1的单位线段是由无限多个点所组成的,如果点的长度为0,点就是一个不占有任何空间的虚无的对象,就是“什么都没有”,它不能成为任何对象的组成部分,当然也不能成为线段的组成部分;如果点的长度大于0,那么点组成线段时就像珍珠穿成项链那样是链式排列的,于是可以将点一个接一个地数出来,数到终端不会是无限数,如果真是无限数,那么中间一定会有一个分界,使得分界两边相邻的两个数一个是最后一个有限数、一个是第一个无限数,而这是不可能的。这表明如果肯定数学家所说的“有限长线段由无限多个点所组成”是真的,那就势必隐含地承认这样一个逻辑矛盾——点的长度既是0又不是0!

2. 亚里士多德悖论

据说亚里士多德有一次同他的邻居开玩笑,说自己能够证明大圆周长等于小圆周长,邻居们都摇头表示不信。于是,亚里士多德当众做了一个实验,令他的邻居目瞪口呆。亚里士多德用一整块木头刻了一个特殊的轮子,这个轮子像空竹一样,一半是大轮、一半是小轮,大轮和小轮同心连锁,大轮周长是小轮周长的两倍。将轮子放在台阶上,小轮同上一级台阶相切、大轮同下一级台阶相切。在大轮和小轮的轮缘上涂上颜料汁,以大轮为主动轮旋转一周,在上下两级台阶上印出等长的两条轨迹。亚里士多德解释说,由于大轮和小轮同心连锁,因此,大轮转一周的同时,小轮也只能转一周。上一条轨迹是小轮一周展开线、下一条轨迹是大轮一周展开线,圆周展开线等于圆周长。既然大轮和小轮的圆周展开线等长,那么,当然是大轮周长等于小轮周长!这里的奥秘在于大轮是纯粹的滚动,而小轮是连滚带滑。滚与滑的结合水乳交融,体现在每一点上,因此,如果从小轮轨迹上任取一点,从中去掉滑动的成分,该点将变小。数学家认为一切数学点除了位置可以不同外其他方面都是无差别的,没有大小之别,然而上述实验却表明,大轮与平面的切点要比小轮与平面的切点大。将此问题完全数学化:在平面上作两个同心圆,使得大圆周长为小圆周长的两倍。从圆心出发过大圆圆周上的每一点作射线,每条射线都同小圆圆周有交点,由此建立了大圆圆周同小圆圆周的点的一一对应。“一一对应即相等”,这表明大圆圆周上的点同小圆圆周上的点在“数目”上同样多。在此前提下,如果大圆圆周上的点同小圆圆周上的点在“大小”上毫无差别,如何说明大圆圆周长、小圆圆周短这个客观事实呢?面对事实,在肯定大圆圆周同小圆圆周点的“数目”相同的前提下,只有华山一条路,那就是承认大圆圆周上的点大、小圆圆周上的点小!点有大小之别表明点的长度大于0,即点是可分的。在该具体问题中,大圆

圆周上的点相当于两个小圆圆周上的点，将一个大点分成两个小点，这两个小点是相邻的，由此可知，无论是大圆圆周还是小圆圆周，点与点之间都是有相邻关系的。联想到数学上可以证明任何两个不同的点之间都可以找到它们的中点，即任何两个不同的点都不能相邻而只能相隔，一个逻辑矛盾跃然而出：两个不同的数学点既可以彼此相邻又不可以彼此相邻！

芝诺和亚里士多德这两位哲学家对数学不能自圆其说的质疑是十分有力的，其论证非常符合人们的经验和直觉，毫无牵强和难以接受的地方。数学不能自圆其说就是指数学有自相矛盾的地方，也就是说，存在数学矛盾的问题早在两千多年前就已经进入哲学的视野。

二、近代数学家的忧虑

尽管哲学家已经指出存在数学矛盾，但数学家长期不予理睬，一直乐观地相信数学在本质上是协调的，即不会出现本质上不可消除的逻辑矛盾。一直到现在，多数数学家仍然相信任何一个悖论都是同数学的本质不相容的，都是暂时存在的，终究有一天会被消除。不过到了近代，随着非欧几何的诞生，终于有一些数学家开始正视数学协调性问题并为此忧虑。

罗巴切夫斯基创立的非欧几何同传统的欧氏几何在公理系统上只有一条公理不同，这就是在平行公理上正相反对。欧氏平行公理肯定在同一平面上过已知直线外任意一点只能作唯一的一条直线与之平行，罗氏平行公理肯定在同一平面上过已知直线外任意一点至少可以做两条不同的直线与之平行。尽管两个平行公理是互相矛盾的，但都可以在直觉与经验的基础上加以理解。例如，对于欧氏平行公理可以这样理解：在同一平面上过已知直线外任意一点 a 可以做一条不向已知直线倾斜的直线 P_1 与之平行，如果还可以过 a 做一条不同于 P_1 的直线 P_2 与已知直线平行，那么，P_2 一定在 a 的一侧向已知直线倾斜，在该侧 P_2 同已知直线逐渐接近，由于 a 到已知直线的距离是有限的，而 P_2 是可以无限延伸的，因此 P_2 一定会在逐渐接近过程中达到与已知直线相交，故除了 P_1 之外不可能再作出一条过 a 点的与已知直线平行的直线，这表明欧氏平行公理是真的；对于罗氏平行公理可以这样理解：在同一平面上作三条欧氏平行线，依次称为上线、中线、下线，在下线上选定一点 a，令一只永生的蜘蛛将蛛丝的开端固定在 a，然后爬到中线上并永远沿中线向右方爬去。将蛛丝称为斜线，可以想象，即使蜘蛛沿中线爬到无限远的地方，斜线也不会同上线相交并且也不会同下线重合。当斜线无限长的时候，对于上线来说，在同一平面上过 a 点做了两