西北工业大学专著出版基金资助

H-矩阵类的理论及应用

徐仲 陆全 张凯院 安晓虹 编著

H-矩阵类的理论及应用

徐　仲　陆　全　张凯院　安晓虹　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书专门研究具有广泛应用背景的H-矩阵类. 全书共5章, 第1章介绍有关的预备知识; 第2章至第4章详细阐述正定矩阵类、稳定矩阵类、对角占优矩阵类、M-矩阵类和H-矩阵类等的定义、结构、性质、判定方法, 以及几类矩阵之间的密切联系. 第5章介绍几类矩阵在数值计算、齐次Markov过程、投入产出分析等方面的应用.

本书取材丰富, 反映了这些矩阵类研究的最新进展, 可作为高等院校理工科研究生和数学专业高年级本科生的教学用书, 也可作为相关专业科研和技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

H-矩阵类的理论及应用/徐仲等编著. —北京: 科学出版社, 2013
ISBN 978-7-03-038067-8

Ⅰ. H… Ⅱ. 徐… Ⅲ. 矩阵 Ⅳ. O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字 (2013) 第141209号

责任编辑: 汤 枫 魏英杰 孙 芳 / 责任校对: 桂伟利
责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年7月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2013年7月第一次印刷 印张: 34 1/4
字数: 667 000

定价: 108.00元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

本书的编写目的是提供一部尽可能详细且全面的介绍 H-矩阵类的论著。H-矩阵类不仅在学术上而且在应用上都有其自身的价值和独特的作用.

19 世纪末，人们在研究行列式的性质和求值时，就注意到“对角占优”这一性质. 由于严格的对角占优矩阵是非奇异的，所以，在求解线性方程组是否有唯一解等问题中，经常用到这一性质. 进而，人们又陆续提出不可约对角占优矩阵、具非零元素链对角占优矩阵、半强对角占优矩阵、弱对角占优矩阵、广义严格对角占优矩阵、正定矩阵、M-矩阵和 H-矩阵等一系列概念，它们都可以包含在 H-矩阵类之中. H-矩阵类在数学物理问题、控制论、电力系统理论、经济数学以及弹性力学等众多领域中都有广泛的应用，对这类矩阵的研究一直是近年国内外数学工作者研究的热点问题之一. 究其原因，主要是 H-矩阵类在稳定性研究以及在求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的迭代解法中的重要作用. 数学物理问题的许多实际问题最后常归结为大型矩阵的线性代数方程组的求解，而这类大型线性方程组的求解往往用的是迭代算法，这使得我们对系数矩阵性质的讨论有重要的意义. 若系数矩阵是对角占优矩阵，那么，我们熟悉的很多经典迭代法，如 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法等都是收敛的. 但若系数矩阵是具有其他性质的特殊矩阵，如广义严格对角占优矩阵、M-矩阵等，我们研究相关的部分迭代法也是收敛的. 所以，如何判别一个矩阵是否为 H-矩阵以及研究这类矩阵的有关性质就显得尤为重要. 对 H-矩阵类的研究已取得了丰硕的成果，相关的研究论文有数百篇之多，但相应的结果散见于诸多的文献之中，为继续深入的研究带来不便. 作者将该领域有关结果的基本思想和主要方法进行分析、归纳和整理，汇集成书，书中也包括了作者近年来在该领域的部分研究成果.

第 1 章介绍后面章节要用到的预备知识，主要是一些著名的不等式、矩阵的代数与分析运算、矩阵特征值的估计、矩阵的分解与分裂、矩阵的可约和不可约性等. 特别是详细介绍了非负矩阵，它的一个很重要的性质是有非负特征值和与之对应的非负特征向量，而且这个特征值就是矩阵的谱半径。这就是著名的 Perron-Frobenius 定理的主要内容.

第 2 章从对称正定矩阵出发，逐步推广到一般的正定矩阵和广义正定矩阵，研究了这类矩阵的特征值、主子阵、乘积和行列式等的性质，最后介绍了稳定矩阵和振荡矩阵的有关理论.

第 3 章介绍对角占优矩阵. 对严格对角占优矩阵和不可约弱对角占优矩阵、具非零元素链对角占优矩阵和半强对角占优矩阵、广义严格对角占优矩阵等的性质进行了细致的研究. 特别是结合不等式的放缩技巧和 α-对角占优矩阵等的性质，给出了一些实用的广义严格对角占优矩阵的直接判别方法. 进而研究共轭对角占优矩阵和分块对角占优矩阵.

第 4 章介绍 M-矩阵和 H-矩阵. 主要介绍非奇 M-矩阵和一般 M-矩阵的基本性质、判别方法，它们与正定矩阵、对角占优矩阵、稳定矩阵等的密切关系，若干重要的等价命题等. 进而研究逆 M-矩阵、非奇 H-矩阵的有关结果.

第 5 章介绍 H-矩阵类在求解线性方程组的迭代法、求解特殊方程组直接解法、求解矩阵方程、齐次 Markov 链和投入产出分析等方面的应用.

本书取材丰富，反映该类矩阵研究的最新进展；理论严谨、重点突出、择优推证方法贯穿于应用背景；结构合理，既有系统性，适合全面阅读，又具有可分性便于选读，灵活实用、深入浅出、查阅方便. 阅读本书只需具备微积分和线性代数的基本知识.

本书由徐仲、陆全、张凯院、安晓虹撰写，徐仲统稿. 在编撰本书过程中，得到了西北工业大学教务处、研究生院和应用数学系的大力支持；多届研究生，如陈芳、袁志杰、尹军茹、周伟伟等帮忙进行了大量的资料收集整理工作. 特别是崔俊芝院士、徐宗本院士、黄廷祝教授审阅了书稿，提出了意见并给予很高的评价，作者在此一并表示衷心的感谢.

作者由衷地感谢西北工业大学专著出版基金资助本书的出版.

由于作者水平有限，疏漏及不妥之处在所难免，敬请同行和广大读者不吝批评指正.

作　者

2012 年 11 月 1 日

符 号 说 明*

$a \in \mathrm{W}$	元素 a 属于集合 W
$a \notin \mathrm{W}$	元素 a 不属于集合 W
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
$\mathrm{s}_{\boldsymbol{u}}^{-}$	实数序列 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的最小变号数
$\mathrm{s}_{\boldsymbol{u}}^{+}$	实数序列 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的最大变号数
$\mathrm{s}_{\boldsymbol{u}}$	实数序列 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的确定变号数
$\mathrm{sign}\, a$	实数 a 的符号函数
$\mathrm{W}_1 \subset \mathrm{W}_2$	集合 W_2 包含集合 W_1
$\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2$	集合 W_1 与集合 W_2 的交
$\mathrm{W}_1 \cup \mathrm{W}_2$	集合 W_1 与集合 W_2 的并
$\mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2$	集合 W_1 与集合 W_2 的直和
N	数 $1,2,\cdots,n$ 的集合
s.t.	满足于，是 subject to 的缩写
$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$	以 a_{ij} 为 i 行 j 列元素的 $m\times n$ 矩阵的简记
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行 j 列的元素
$\boldsymbol{A}[\mathrm{J}_1 \mid \mathrm{J}_2]$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中由 J_1 指定的行和 J_2 指定的列的子矩阵
$\boldsymbol{A}[\mathrm{J}_1]$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中由 J_1 指定的行和列所确定的主子矩阵
$\boldsymbol{A}^k$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次方幂
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{A}^{*}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$\boldsymbol{A}^{-1}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆

* 本书集合符号统一用正体.

$\boldsymbol{A}^{\#}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的群逆
$\boldsymbol{A}_{(k)}$	由 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式构成的 k 阶相伴矩阵
$\vec{\boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行拉直得到的列向量
$\det \boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\operatorname{index} \boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的指标
$\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和
$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\lambda(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
$\sigma(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值集合
$\rho(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$i_+(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数
$i_-(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的负特征值的个数
$i_0(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的零特征值的个数
$\operatorname{In} \boldsymbol{A}$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的惯性，即 $\operatorname{In} \boldsymbol{A} = \{i_+(\boldsymbol{A}), i_-(\boldsymbol{A}), i_0(\boldsymbol{A})\}$
$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域，$\boldsymbol{A}$ 的列空间
$\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间，$\boldsymbol{A}$ 的零空间
$R_i(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行非对角元素的模之和
$C_i(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列非对角元素的模之和
$S(\boldsymbol{A})$	实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对称分量，即 $S(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
$F(\boldsymbol{A})$	实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的反对称分量，即 $F(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
$H(\boldsymbol{A})$	复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的Hermite 分量，即 $H(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
$K(\boldsymbol{A})$	复方阵 $\boldsymbol{A}$ 的反Hermite 分量，即 $K(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	模矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的元素用其模代替得到的非负矩阵
$\langle\boldsymbol{A}\rangle$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵
$M(\boldsymbol{A})$	分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵
$\boldsymbol{H}_f$	多项式 $f(x)$ 的 Hurwitz 矩阵
$\boldsymbol{H}_A$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Hurwitz 矩阵
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意范数

$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数，F-范数
$\|\boldsymbol{A}\|_{\infty}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 ∞-范数，行和范数
$\|\boldsymbol{x}\|$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的任意范数
$\|\boldsymbol{x}\|_p$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的 p-范数，l_p-范数
A_{ij}	元素 a_{ij} 的代数余子式
M_{ij}	元素 a_{ij} 的余子式
$\boldsymbol{I}_n$	n 阶单位矩阵
$\boldsymbol{e}_i$	第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的单位列向量
$\boldsymbol{e}$	分量全为 1 的列向量
$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$	以 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 为对角元素的 n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s)$	以 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$ 为对角子块的分块对角矩阵
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	n 维实向量的全体
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	n 维复向量的全体
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m\times n$ 实矩阵的全体
$\mathbf{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 复矩阵的全体
$\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{O}$	非负矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 的所有元素为非负实数
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{O}$	正矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 的所有元素为正数
$\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素不超过 $\boldsymbol{A}$ 的对应元素
$\boldsymbol{A} > \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素大于 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素
$\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$	正向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$ 的所有分量为正数
$\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}$	非负向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}$ 的所有分量为非负实数
$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的直积，Kronecker 积
$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积，Schur 积
$\boldsymbol{A} \star \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Fan 积
$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}$	分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Khatri-Rao 积
D_0	(按行)对角占优矩阵的集合
D	(按行)严格对角占优矩阵的集合
G	(按行)不可约弱对角占优矩阵的集合

F	(按行)具非零元素链对角占优矩阵的集合
D_0^0	按列对角占优矩阵的集合
D^0	按列严格对角占优矩阵的集合
G^0	按列不可约弱对角占优矩阵的集合
F^0	按列具非零元素链对角占优矩阵的集合
$\tilde{D}$	广义严格对角占优矩阵的集合
$\tilde{D}_0$	广义对角占优矩阵的集合
D_0^α	α-链对角占优矩阵的集合
D^α	严格α-链对角占优矩阵的集合
$\tilde{D}^\alpha$	广义严格α-链对角占优矩阵的集合
Z_n	n 阶 Z-矩阵的集合
$D_0(\alpha)$	α-对角占优矩阵的集合
$D(\alpha)$	严格α-对角占优矩阵的集合
$\tilde{D}(\alpha)$	广义严格α-对角占优矩阵的集合
HD	共轭严格对角占优矩阵的集合
HG	共轭不可约弱对角占优矩阵的集合
HF	共轭具非零元素链对角占优矩阵的集合
$H\tilde{D}$	共轭广义严格对角占优矩阵的集合
BD_0	分块对角占优矩阵的集合
BD	分块严格对角占优矩阵的集合
BG	分块不可约弱对角占优矩阵的集合
$B\tilde{D}$	广义分块严格对角占优矩阵的集合
$\tilde{B}D$	分块弱严格对角占优矩阵的集合
$\tilde{B}\tilde{D}$	广义分块弱严格对角占优矩阵的集合
BD^α	分块α-链严格对角占优矩阵的集合
P_I	正定矩阵的集合
$P_{\tilde{D}}$	$\tilde{D}$ -正定矩阵的集合
P_D	D-正定矩阵的集合
$P_{\tilde{S}}$	准广义正定矩阵的集合
P_S	广义正定矩阵的集合

$\overline{\mathrm{P}}_{\boldsymbol{I}}$	复正定矩阵的集合
$\overline{\mathrm{P}}_{\tilde{\boldsymbol{D}}}$	复 $\widetilde{\mathrm{D}}$ -正定矩阵的集合
$\overline{\mathrm{P}}_{\boldsymbol{D}}$	复 D-正定矩阵的集合
$\overline{\mathrm{P}}_{\tilde{\boldsymbol{S}}}$	复准广义正定矩阵的集合
$\overline{\mathrm{P}}_{\boldsymbol{S}}$	复广义正定矩阵的集合
S^{+}	实对称正定矩阵的集合
S_0^{+}	实对称半正定矩阵的集合
$\overline{\mathrm{S}}^{+}$	Hermite 正定矩阵的集合
$\overline{\mathrm{S}}_0^{+}$	Hermite 半正定矩阵的集合

目 录

前言

符号说明

第 1 章 预备知识 …… 1

§ 1.1 常用不等式 …… 1

§ 1.2 置换矩阵和主子矩阵 …… 5

1.2.1 置换矩阵与酉矩阵 …… 5

1.2.2 主子矩阵与 Schur 补 …… 6

1.2.3 Sherman-Morrison-Woodbury 公式 …… 10

§ 1.3 正规矩阵 …… 10

1.3.1 Schur 定理 …… 10

1.3.2 正规矩阵 …… 11

1.3.3 两个矩阵同时对角化或三角化 …… 14

1.3.4 实反对称矩阵的有关理论 …… 16

1.3.5 H-合同与 T-合同 …… 18

§ 1.4 向量范数和矩阵范数 …… 19

1.4.1 向量范数 …… 19

1.4.2 方阵范数 …… 22

1.4.3 长方阵范数 …… 26

1.4.4 矩阵范数的性质 …… 27

1.4.5 范数的应用 …… 29

§ 1.5 矩阵分析 …… 33

1.5.1 矩阵序列的极限 …… 33

1.5.2 矩阵级数和矩阵幂级数 …… 34

1.5.3 矩阵函数 …… 37

1.5.4 常用矩阵函数的性质 …… 41

1.5.5 函数矩阵微积分 …… 42

1.5.6 一阶常系数线性微分方程组的解 …… 44

§ 1.6 特征值的估计与表示 …… 45

1.6.1 Gerschgorin 定理 …… 45

1.6.2 Hermite 矩阵特征值的表示 ······ 48

§ 1.7 矩阵的特殊乘积 ······ 51

1.7.1 Kronecker 积 ······ 51

1.7.2 Hadamard 积和 Fan 积 ······ 54

1.7.3 Khatri-Rao 积 ······ 56

§ 1.8 矩阵分解与广义逆矩阵 ······ 57

1.8.1 奇异值分解 ······ 57

1.8.2 三角分解 ······ 58

1.8.3 Drazin 逆 ······ 61

1.8.4 广义左逆和右逆 ······ 65

§ 1.9 非负矩阵 ······ 66

1.9.1 非负矩阵的基本性质 ······ 66

1.9.2 不可约矩阵 ······ 70

1.9.3 Perron-Frobenius 定理 ······ 73

1.9.4 正矩阵与素矩阵 ······ 79

1.9.5 随机矩阵 ······ 85

§ 1.10 迭代法与矩阵分裂 ······ 87

1.10.1 迭代法的基本原理 ······ 87

1.10.2 常用迭代法 ······ 90

1.10.3 矩阵的正则分裂 ······ 95

§ 1.11 线性关系式组的相容性条件 ······ 98

参考文献 ······ 101

第 2 章 正定矩阵与稳定矩阵 ······ 103

§ 2.1 Hermite 正定矩阵 ······ 103

2.1.1 定义和等价条件 ······ 103

2.1.2 乘积矩阵的正定性 ······ 106

2.1.3 有关不等式 ······ 108

2.1.4 在迭代法中的应用 ······ 111

§ 2.2 正定矩阵 ······ 114

2.2.1 定义和基本性质 ······ 114

2.2.2 合同标准形 ······ 118

2.2.3 正定矩阵的主子矩阵 ······ 122

§ 2.3 正定矩阵的有关结果 ······ 128

2.3.1 乘积矩阵的正定性 ······ 128

2.3.2 行列式不等式 133
§ 2.4 广义正定矩阵与 P-矩阵 144
2.4.1 广义正定矩阵 144
2.4.2 P-矩阵 153
2.4.3 正定矩阵类的包含关系 157
§ 2.5 复正定矩阵 158
2.5.1 复正定矩阵 158
2.5.2 H-合同标准形 160
2.5.3 复正定矩阵的主子矩阵 162
2.5.4 乘积矩阵的复正定性 162
2.5.5 行列式不等式 163
2.5.6 迹不等式 165
2.5.7 复广义正定矩阵 166
§ 2.6 稳定矩阵 167
2.6.1 线性系统的稳定性 168
2.6.2 正稳定矩阵 174
2.6.3 一般惯性定理 177
2.6.4 Routh-Hurwitz 判定方法 184
§ 2.7 其他稳定矩阵类 190
2.7.1 D-稳定矩阵 190
2.7.2 强稳定矩阵与 V.L.稳定矩阵 193
2.7.3 P_0-矩阵 195
2.7.4 低阶矩阵稳定性的判定 197
2.7.5 稳定矩阵类的包含关系 204
§ 2.8 振荡矩阵 206
2.8.1 相伴矩阵及其性质 206
2.8.2 全非负矩阵与全正矩阵 208
2.8.3 振荡矩阵 218
§ 2.9 Jacobi 矩阵 224
2.9.1 定义及 Sturm 性质 224
2.9.2 特征值与特征向量 226
2.9.3 全非负性与振荡性准则 230
2.9.4 稳定性判定 231
参考文献 233

第 3 章　对角占优矩阵 ······ 241
§ 3.1　严格对角占优矩阵 ······ 241
3.1.1　严格对角占优矩阵 ······ 241
3.1.2　元素严格对角占优矩阵 ······ 248
§ 3.2　不可约弱对角占优矩阵 ······ 250
§ 3.3　具非零元素链对角占优矩阵 ······ 252
3.3.1　具非零元素链对角占优矩阵 ······ 252
3.3.2　半强对角占优矩阵 ······ 254
§ 3.4　广义严格对角占优矩阵 ······ 257
3.4.1　定义和基本性质 ······ 257
3.4.2　Nekrasov 矩阵 ······ 263
§ 3.5　判定广义严格对角占优矩阵的充分条件 ······ 265
3.5.1　连对角占优性 ······ 265
3.5.2　构造压缩因子 ······ 266
3.5.3　行模比值之和 ······ 273
3.5.4　细分指标集 ······ 277
§ 3.6　广义严格对角占优矩阵的迭代判定 ······ 281
3.6.1　充要条件 ······ 281
3.6.2　充分条件 ······ 290
3.6.3　广义 Nekrasov 矩阵的判定 ······ 292
3.6.4　数值算例 ······ 296
§ 3.7　α-对角占优矩阵 ······ 299
3.7.1　α-链对角占优矩阵 ······ 299
3.7.2　α-对角占优矩阵 ······ 307
3.7.3　对角占优矩阵的包含关系 ······ 312
§ 3.8　共轭对角占优矩阵 ······ 312
3.8.1　共轭对角占优矩阵 ······ 312
3.8.2　比较矩阵的共轭对角占优性 ······ 316
§ 3.9　分块对角占优矩阵 ······ 318
参考文献 ······ 325
第 4 章　M-矩阵与 H-矩阵 ······ 340
§ 4.1　非奇 M-矩阵的定义及基本性质 ······ 340
4.1.1　定义及基本性质 ······ 340
4.1.2　非奇 M-矩阵的乘积 ······ 347

§ 4.2　非奇 M-矩阵的判定 …… 349
4.2.1　三角 M-矩阵的判定 …… 349
4.2.2　利用顺序主子式判定 …… 350
4.2.3　S-矩阵的判定 …… 353
4.2.4　利用对称分量判定 …… 354
§ 4.3　一些特殊的实方阵 …… 355
4.3.1　逆正矩阵与单调矩阵 …… 355
4.3.2　半正矩阵 …… 358
4.3.3　具有正对角元素的广义严格对角占优矩阵 …… 358
4.3.4　实特征值为正值的实方阵 …… 360
§ 4.4　非奇 M-矩阵的等价条件 …… 363
4.4.1　50 个充要条件介绍 …… 363
4.4.2　50 个条件的包含关系 …… 369
§ 4.5　一般 M-矩阵 …… 373
4.5.1　M-矩阵的定义与基本性质 …… 373
4.5.2　不可约 M-矩阵 …… 376
4.5.3　广义逆正矩阵 …… 379
4.5.4　M-矩阵的等价条件 …… 384
4.5.5　可约奇异 M-矩阵 …… 387
§ 4.6　具有“性质 c”的 M-矩阵 …… 389
4.6.1　定义与基本性质 …… 390
4.6.2　等价条件 …… 393
§ 4.7　逆 M-矩阵 …… 399
4.7.1　逆 M-矩阵的定义与性质 …… 399
4.7.2　逆 M-矩阵的结构特征 …… 401
4.7.3　三对角逆 M-矩阵 …… 405
4.7.4　逆 M_0-矩阵 …… 407
§ 4.8　N_0-矩阵与 F_0-矩阵 …… 409
4.8.1　N-矩阵与 N_0-矩阵 …… 409
4.8.2　F_0-矩阵 …… 418
4.8.3　L_r-矩阵 …… 422
§ 4.9　M-矩阵的有关结果 …… 423
4.9.1　逆矩阵∞-范数的估计 …… 423
4.9.2　行列式不等式 …… 430

4.9.3 最小特征值的估计 ……436
§ 4.10 非奇 H-矩阵 ……439
4.10.1 定义与判定方法 ……439
4.10.2 基本性质 ……441
4.10.3 有关不等式 ……446
参考文献 ……449
第 5 章 应用举例 ……454
§ 5.1 迭代法的收敛性 ……454
5.1.1 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性 ……454
5.1.2 SOR 迭代法和 SSOR 迭代法的收敛性 ……456
5.1.3 AOR 和 SAOR 迭代法的收敛性 ……460
5.1.4 API 法的收敛性 ……463
§ 5.2 周期三对角方程组求解 ……464
5.2.1 追赶法与变参数追赶法 ……464
5.2.2 PE 方法与 PE_k 方法 ……474
§ 5.3 线性矩阵方程求解 ……488
5.3.1 Lyapunov 矩阵方程的参数迭代解法 ……488
5.3.2 Lyapunov 矩阵方程的分组迭代解法 ……493
§ 5.4 有限齐次 Markov 链 ……499
§ 5.5 投入产出分析 ……509
5.5.1 开式 Leontief 模型 ……509
5.5.2 闭式 Leontief 模型 ……517
参考文献 ……523

第 1 章　预 备 知 识

首先介绍本书常用的记号. $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中，a_{ij} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 i 行 j 列元素. 当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵. 当 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 全为实数时，称为实矩阵. $m\times n$ 实矩阵的全体记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$. 当 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 为复数时，称为复矩阵. $m\times n$ 复矩阵的全体记为 $\mathbf{C}^{m\times n}$.

方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式记为 $\det\boldsymbol{A}$，伴随矩阵记为 $\boldsymbol{A}^*$，逆矩阵记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 单位矩阵记为 $\boldsymbol{I}$，如需表示其阶数 n，则记为 $\boldsymbol{I}_n$. $\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ 表示以 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为对角元素的对角矩阵. 由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 得到的 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=(\overline{a}_{ji})_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置. 显然，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 i 行 j 列元素是 a_{ji}，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 i 行 j 列元素是 $\overline{a}_{ji}$，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$. $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

$n\times 1$ 的矩阵称为 n 维列向量，用小写英文黑体字母表示，如

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$$

其中，x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量. 分量全为实数的向量称为实向量，n 维实列向量的全体记为 $\mathbf{R}^n$. 分量为复数的向量称为复向量，n 维复列向量的全体记为 $\mathbf{C}^n$. 分量都是 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$.

§ 1.1　常用不等式

在此，我们给出几个常用的不等式.

定理 1.1.1(几何平均与算术平均不等式)　设 $x_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n)$，则