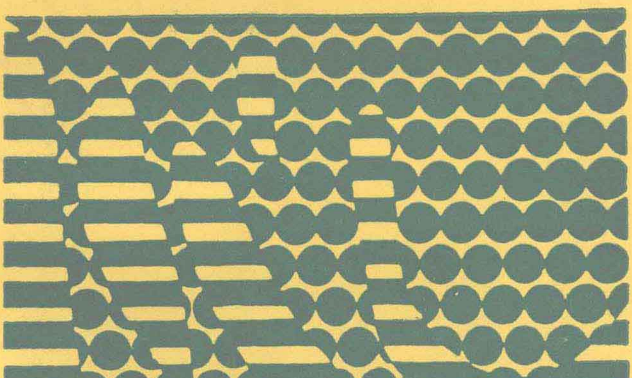
九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

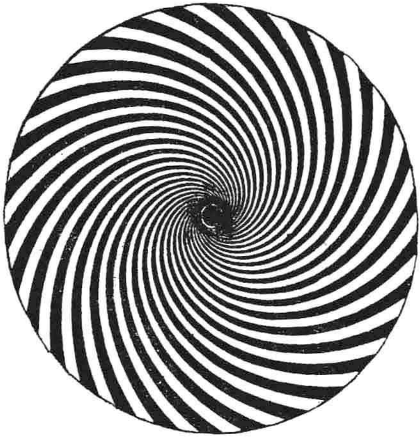
相似形

唐霞宾



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

相似形

唐霞宾

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

(川)新登字005号

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物
相似形

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　内江新华印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32　印张 4　字数68千
1992年8月第一版　1992年8月第一次印刷
印数：1—4,710 册

ISBN7-5408-1732-1/G·1654　定价：1.45元

前　言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

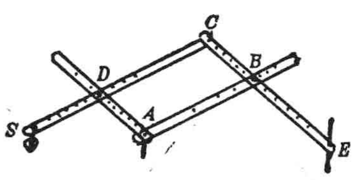
1992年2月

目录

说到相似形，读者一定不会感觉陌生吧？留意一下，日常生活中可以见到许许多多的相似形，它与我们的生活、学习有着密切的联系，有很大的用途．

当你与家人合影了一张全家福，当你与同学好友在公园尽情玩耍时，照了一些有趣的照片，照相馆会按你的要求把相片扩印出来，同一张底片放出的大大小小的照片不就是相似形吗？你翻开一本地图册，那页中国地图与墙上挂的中国地图不也是相似形吗？教师上课时用两块教具三角板画出的三角形，与同学们用自己的两块小三角板画出的三角形当然也是相似形了．这么一说，你一定会联想起许许多多相似的物体和图形．有趣的是，圆无论大小都是相似形；而角却没有相似形（若相等除外），即使放在显微镜下，角也是“放”不大的．

相似形在生活、生产和科研中用处很多，促使人们去认识它，研究它．通过研究发现，两个相似形中，彼此相对应的部分都是成比例的．而最基本的性质是相对应的任意两点间的距离（线段）成比



例．人们利用线段成比例的性质制出了一种放缩尺（如图所示）．用这种放缩尺，你可以把一个图形随意放大或缩小若干倍，并准确地画出来．你用过这种放缩尺吗？

下面我们还是从最基本的线段成比例的知识说起吧！

一　比例线段

§1　线段的比例

1．成比例的线段

我们在课本上已经学过，用线段a为长度单位度量一条线段所得的数，叫做用a度量这条线段的量数．线段的量数都是正数．

用同一长度单位度量两条线段所得量数的比，叫做这两条线段的比．容易理解，两条线段的比与所采用的长度单位没有关系．

在四条线段a、b、c、d中，如果a和b的比等于c和d的比，即$a:b=c:d$（或写作$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$）时，这四条线段就叫做成比例的线段．为称呼方便，式中b、c叫做比例内项，a、d叫做比例外项，d叫做a、b、c的第四比例项．

当线段a和b的比等于线段b和c的比，即$a:b=b:c$时，b叫做a和c的比例中项．

2．比例的性质

因为两条线段的比是它们关于同一长度单位的量数的比，由线段所成的比例是它们的量数所成的

比例，所以，关于数的比和比例的各种性质，完全适用于线段的比和成比例的线段．

关于数的比和比例，有下面一些性质（这里所有的字母都不等于零；以后用于线段时，代表正数，其证明都省略）：

（1）比例的基本定理：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$ad=bc$；反之，如果$ad=bc$，那么$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longleftrightarrow ad=bc$．

推论：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Longleftrightarrow b^2=ac$．

比例的基本定理主要应用在比例式与乘积式的互化上．例如$mx=ny$（$mnxy\neq 0$）写成的比例式可以是$x:y=n:m$，也可以是$y:x=m:n$等等．

（2）反比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$．

（3）更比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$等等．上面的第一式也叫做交换内项，第二式也叫做交换外项．

（4）合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$．

（5）分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$．

显然，合比定理与分比定理互为逆定理．

（6）合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq 1\Longrightarrow\frac{a+b}{a-b}$
$=\frac{c+d}{c-d}$.

（7）等比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)\Longrightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$.

以上定理都是建立在等式性质的基础上的，可以用等式的性质来证明.

注意：在应用合比定理和分比定理时，要灵活应用. 例如解方程$\frac{x}{x-3}=\frac{3}{2}$，可在分母施行减法，即有$\frac{x}{x-(x-3)}=\frac{3}{3-2}\Longrightarrow x=9$；在应用合分比定理和等比定理时，分别要注意条件$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq 1$（即$b\neq d$）和$b+d+\cdots+n\neq 0$.

例 1　（1）已知$x:(x+2)=5:7$，求x；

（2）设$-5<x<5, y=\dfrac{\sqrt{\dfrac{5+x}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{5-x}{5+x}}}{\sqrt{\dfrac{5+x}{5-x}}-\sqrt{\dfrac{5-x}{5+x}}}$，

写出用y表示x的等式.

解：（1）由比例的基本定理，已知等式可为$5(x+2)=7x\Longrightarrow 2x=10\Longrightarrow x=5$.

又解：$\frac{x}{x+2}=\frac{5}{7}\xRightarrow{\text{（反比定理）}}\frac{x+2}{x}=\frac{7}{5}$

$$\xRightarrow{\text{(分比定理)}} \frac{(x+2)-x}{x}=\frac{7-5}{5} \Longrightarrow \frac{2}{x}=\frac{2}{5} \Longrightarrow$$

$x=5$.

（2）已知等式应用合分比定理得

$$\frac{y+1}{y-1}=\frac{\sqrt{\frac{5+x}{5-x}}}{\sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}=\sqrt{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2}=\frac{5+x}{5-x};$$

再用合分比定理，得

$$\frac{(y+1)-(y-1)}{(y+1)+(y-1)}=\frac{(5+x)-(5-x)}{(5+x)+(5-x)} \Longrightarrow$$

$$\frac{2}{2y}=\frac{2x}{10} \Longrightarrow x=\frac{5}{y}.$$

说明：本例看到当比例式中的比的前项与后项之和或差可以化简比例式时，应用合比定理或分比定理或合分比定理为宜．特别是像（2）中的比的前项与后项分别是两数和与这两数差时，宜用合分比定理化简．另外需注意合比定理、分比定理、合分比定理的变形：

合比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ $(a+b\neq 0,\ c+d\neq 0)$.

分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ $(a\neq b,\ c\neq d)$.

合分比定理：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq -1 \Longrightarrow \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$.

例2 （1）已知$x:y:z=2:3:4$，求$\frac{x+y+z}{z}$与$\frac{y+z-x}{z+x-y}$的值；（2）设非零实数a、b、c满足$\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$，求$\frac{a+b+c}{a}$的值.

解：（1）$x:y:z=2:3:4\Longrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\xRightarrow{(\text{等比定理})}\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{z}{4}\Longrightarrow\frac{x+y+z}{z}=\frac{9}{4}$.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\xRightarrow{(\text{等比定理})}\frac{y+z-x}{3+4-2}=\frac{x}{2}=\frac{z+x-y}{4+2-3}\Longrightarrow\frac{y+z-x}{z+x-y}=\frac{5}{3}.$$

（2）令$\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=k$，则$b+c=ak$，$c+a=bk$，$a+b=ck$，三式相加得$2(a+b+c)=k(a+b+c)\Longrightarrow a+b+c=0$或$k=2$.

当$a+b+c=0$时，$\frac{a+b+c}{a}=0$；

当$k=2$时，$b+c=2a$，则$\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+2a}{a}=3$.

综上，得$\frac{a+b+c}{a}=0$ 或$\frac{a+b+c}{a}=3$.

注意：我们在解第（2）小题时，之所以没有用等比定理，那是因为在用等比定理时，各比的各项

之和不能为零，而(2)的各比的后项之和恰可以为零，所以不能用等比定理解之，而采用了设辅助未知数解．又由于(1)中的各比的各项之和不为零，所以(1)可以采用等比定理解之．当然(1)也可以用(2)的方法解，读者可试试看．由此可见，用等比定理解题时，务必要注意应用时的条件，而(2)的解法具有普遍性．

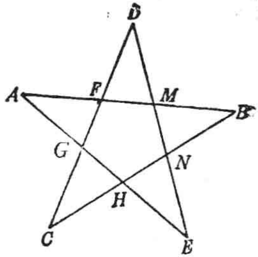
例3 （选择题）如果实数 a、b、c、d 满足 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么(1) $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$；(2) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$；(3) $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$；(4) $\frac{a-2b}{a+2b}=\frac{c-2d}{c+2d}$．这四个关系式中：(A)仅(1)正确；(B)仅(3)正确；(C)仅(4)不正确；(D)全正确．

分析：这实际上是一个判断题．注意到在(1)、(2)和(4)这三个关系式中的各个比的后项是可以为零这一特殊情况，例如(1)，当 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=-1$ 时，则 $a+b=c+d=0$，可见(1)不正确；同样可说明(2)、(4)两个关系式也不正确．而(3)中的关系式显然是正确的．因此本题应选(B)（解略）．本题进一步说明了在使用合比定理、分比定理及合分比定理要注意条件．

3. 黄金分割

我们都喜爱的解放军军帽上的正五角星帽徽，那上面可有不少数学问题呢．这里只介绍其中的一

点：就是在如图的正五角星$ABCDE$的边与边，例如AB与DE的交点M，满足$AM^2=AB\cdot MB$，且还满足$BM^2=BF\cdot MF$（为什么？读者学完正多边形后自行研究）．由此我们有：



定义：将一条长为a的线段AB分成两条线段，使其中较长的线段AM是全线段AB和较短的线段MB的比例中项，叫做把这条线段AB分成“中外比”，又叫做“黄金分割”，点M叫做黄金分割点．可见，正五角星上的点M既是线段AB的黄金分割点，又是线段BF的黄金分割点，等等．

根据定义，我们来计算AM的长．设$AM=x$，则$MB=a-x$．于是由定义得$x^2=a(a-x)\Longrightarrow x^2+ax-a^2=0\Longrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$（只取正值），即$AM=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a\approx 0.618a$，$MB\approx 0.382a$．可见在黄金分割后，全长将被分成各约占62％及38％的两部分．

黄金分割的作图方法很多，流传最广的是由上面代数法计算的结果$AM=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$，先作$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使一条直角边等于$AB$，另一条直角边$BC=\dfrac{1}{2}AB$，以$C$为圆心，$BC$长为半径画弧交$AC$于$D$，再以$A$为圆心，$AD$长为半径画弧交$AB$于$M$，

则点M就是所求作的黄金分割点（如图1—1．读者可自行证明作法的正确性）．

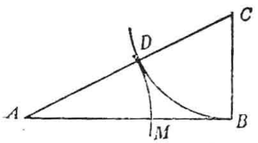


图1—1

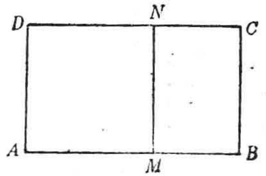


图1—2

图1—2中，M是AB的黄金分割点，以AB为长，宽$AD=AM$，作成的矩形$ABCD$，被称做“最佳矩形”，或叫“黄金矩形”．这种矩形看上去十分优美、和谐，所以人头像的标准照，许多建筑物的框架设计都是采用的这种矩形．

其实人们早在公元前就知道了黄金分割，并用以作出了正五角星的图．很多科学家对它进行了长期的研究，并断言：无论在自然界或艺术中，黄金分割都是最完美的．

§2 平行线分线段成比例

1. 平行线分线段成比例

这一节介绍的定理及其推论是中学课本上有的，因此这里只作介绍不予证明，着重说明它们的应用．

平行线分线段成比例定理：三条平行线截两条

直线，所得的四条线段成比例．

具体说来，这个定理的意思是：如图1—3，若直线$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，直线$a$与$b$分别和$l_1$、$l_2$、$l_3$交于点$A$、$B$、$C$和$D$、$E$、$F$，则$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$或$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$．

推论：平行于三角形一边的直线截其它两边所得线段对应成比例；其中的一边和这边上截得的一条线段以及另一边上截得的对应线段成比例．

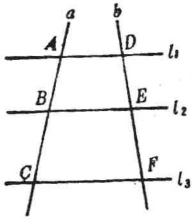


图1—3

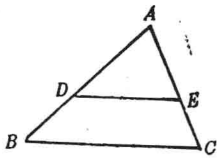


图1—4

这个推论具体说来是：如图1—4，在$\triangle ABC$中，若$DE \parallel BC$，则$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$或$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}$及$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$或$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$．

下面是推论的逆定理．

逆定理：如果一条直线截三角形的两边所得的线段对应成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

推论：如果一条直线截三角形的两边，其中一边和这边上截得的一条线段与另一边和另一边上截得的对应线段成比例，那么，这条直线平行于第三