高等专科学校应用数学基础系列教材

# 多元函数微积分

主编 王学谦 刘明福 王晋章

山西高校联合出版社

应用数学基础系列教材

# 多元函数微积分

王学谦　刘明福　王晋章　主编

山西高校联合出版社

（晋）新登字 8 号

# 多元函数微积分

王学谦　刘明福　王晋章　主编

*

山西高校联合出版社出版发行
（邮编 030012　　太原南内环街 31 号）
临汾日报社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：11 字数：247 千字
1994 年 7 月第一版 1994 年 7 月临汾第一次印刷
印数：1—8150

*

ISBN7—81032—620—1
O・59　　定价 7.50 元

# 《应用数学基础》系列教材

主　　编　吴诗咏　励金华　周泽民

编　　委　（以姓氏笔划为序）

马英田　王　京　王学谦　王贵保
王晋章　王维锦　王渝生　王道勇
刘明福　孙韫玉　张世铭　张家琦
张雅琴　励金华　吴诗咏　何根发
周泽民　查中伟　楼天容

责任编辑　张家琦

# 前　　言

随着我国高等专科教育的发展，国家教委对高等专科教育的培养目标、制订教学计划的原则都作了明确的规定，并对一些主要课程制订了教学基本要求。在新形势下，高等专科学校急需一套适合专科教学要求，具有专科特色的教材。为此，在电力部高教处领导下，依据国家教委关于“抓好专科教材建设”的指示精神，电力部属高校数学协作组于1993年组成《应用数学基础》系列教材编写组，开始编写工作。

《应用数学基础》系列教材由我们主编，由电力部属高校中具有多年教学经验的教师编写。包括《一元函数微积分》、《多元函数微积分》、《线性代数》、《复变函数与拉普拉斯变换》、《概率论与数理统计》等共五种，可供高等专科学校各专业使用，也可作为专科层次的高等成人教育以及函授的教学用书。

本系列教材的编写以国家教委制订的高等学校工程专科数学课程《教学基本要求》和原能源部（水利电力系统）高校数学协作组制订的专科数学《教学基本要求》为依据，依照专科学校基础理论教学中要求“以应用为目的，以必需、够用为度”和“掌握概念、强化应用”的原则，努力体现高等工程专科特色。在教材内容的选取上，除保证必要的系统外，尽量注意本课程的应用性和针对性。本教材以基础理论与基本方法为重点，注意加强学生分析问题和解决问题能力的培养。本教材总

结了编者们的多年教学经验；在语言表达方面注意精练准确、简明易懂，使教材既便于教又便于学。

在教材编审过程中，得到了电力部属高校领导的大力支持；许多同志参加了编写提纲、样稿的讨论，并提供宝贵意见；编撰者和审稿人为《应用数学基础》系列教材付出了辛勤劳动，太原电专数学教研室的同志们为校对本书花了大量的心血，谨此一并致谢。

由于编写具有专科特色的高等学校专科教材的工作刚刚起步，加之我们水平有限，教材中难免存在不妥之处，希望使用本教材的广大读者不吝赐教。

吴诗咏（太原电力高等专科学校）

励金华（北京电力高等专科学校）

周泽民（上海电力学院）

一九九四年四月

# 编 者 的 话

本书是根据国家教委制订的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写的。是《应用数学基础》系列教材之一。包括空间解析几何、向量代数、多元函数及其微分、重积分、曲线积分与曲面积分、场论及无穷级数等内容。总学时为70学时。带“*”号的内容供有关专业选学，但要另加学时。

本书的编写注意实践——理论——实践的原则，每部分内容由实例引出理论，然后推出性质再得出它的计算公式去解决实际中的问题。例题的选择注意各种类型的示范，解题中注意分析做题的思路与方法。这样就培养了学生认识问题的思维能力和逻辑推理能力，同时也培养了学生分析问题和解决实际问题的能力。

本书语言精炼、通俗，直观性强。便于教学和学生自学。

本书由我们任主编，励金华、吴诗咏二位教授任主审。

由于我们水平有限、时间仓促，不足之处在所难免，敬请同行提出宝贵意见。

王学谦
（太原电力高等专科学校）

刘明福
（湖北宜昌葛州坝水电工程学院）

王晋章
（广东电力专科学校）

一九九三年十二月

# 目　　录

# 第一章　向量代数与空间解析几何

向量在数学、物理、力学以及工程技术中都是一种重要的数学工具.

本章将先介绍向量的基本概念和向量的加法、减法、乘法等运算.本章还将介绍空间解析几何的有关基本概念,在坐标法的基础上,把方程与图形联系起来,然后以向量为工具讨论空间的平面与直线,最后介绍几种常见的二次曲面,这些内容都是本书后面研究多元函数所必备的知识.

## 第一节　向量概念及向量的加、减运算

### §1.1.1　向量概念

物理学中常遇到的量有两类:一类仅用数值大小表示,如温度、时间、质量等都属此类,这类量称为数量;另一类量,不仅有数值的大小而且还要表明它的方向,例如位移、速度、加速度、力等,这种既有数值大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**.

向量通常用有向线段$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$表示,在取定单位长后,有向线段的长度表示该向量的大小,有向线段的方向表示该向量的方向.$A$表示向量的起点,$B$表示向量的终点.为了书写方便,向量常用黑体字母$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$等表示.

始点在原点$O$，终点在 $M$ 的向量称为点 $M$ 的向径，记作$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$.

向量的大小称为向量的模(或称向量的长度). 例如向量$\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ 的模分别记作$|\boldsymbol{a}|$、$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|$. 与向量$\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为向量$\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

模等于 1 的向量称为单位向量. 模等于 $O$ 的向量称为零向量，记作$\boldsymbol{O}$，零向量的方向不确定.

在实际问题中，有些向量与其始点有关，有些向量与其始点无关. 本书只研究与始点无关的向量，这种向量称为自由向量(以后简称为向量). 所以，如果两个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，就称$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 换句话说，就是经过平行移动后能完全重合的向量称为相等的向量.

### §1.1.2 向量的加、减运算

由物理实验知，力、速度、位移都可以合成. 向量的加法就是从这些量的合成法则中抽象出来的运算.

1. 向量的加法

设有两个力$\boldsymbol{F}_1 = \overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ 作用于 $O$ 点，于是此二力的合力$\boldsymbol{F}$ 就是以$\overrightarrow{OA}$ 和$\overrightarrow{OB}$ 与邻边的平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$(图 1—1).

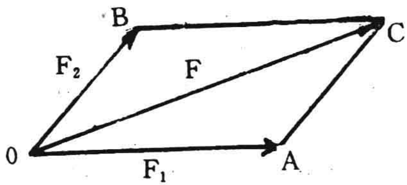


图 1—1

记作$\boldsymbol{F} = \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$

$\boldsymbol{F}$ 是$\boldsymbol{F}_1$ 与$\boldsymbol{F}_2$ 的合力或称为$\boldsymbol{F}_1$ 与$\boldsymbol{F}_2$ 的和，而$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 则是$\boldsymbol{F}$ 的两个分力.

力的合成法则〈平行四边形法则〉也适用于速度、位移等

物理量.总结这些物理量所遵循的规律,我们有如下向量的加法定义:

**定义 1** 设向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$有共同的起点 0,以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形,则称对角线向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和,记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \qquad (\text{见图 } 1—2).$$

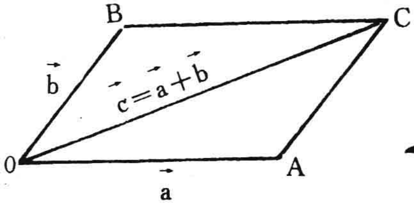

图 1—2

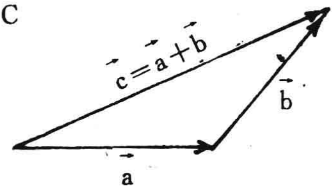

图 1—3

如图 1—2,因$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$,因此可将$\boldsymbol{b}$的起点置于$\boldsymbol{a}$的终点上,然后以$\boldsymbol{a}$的起点为始点,以$\boldsymbol{b}$的终点为终点作向量$\boldsymbol{c}$(见图 1—3).容易看出$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.这种求向量的方法称为三角形法则.

容易证明,向量的加法满足如下规律:

1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

2. *向量的减法* 与数量的减法类似.我们定义向量的减法为向量加法的逆运算.

**定义 2** 若向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的和为向量$\boldsymbol{a}$,则称向量$\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差,记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

即若$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$.则$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (如图 1—4 所示).

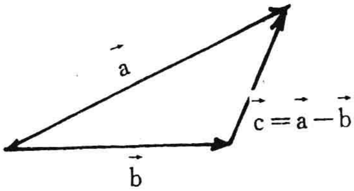


图 1—4

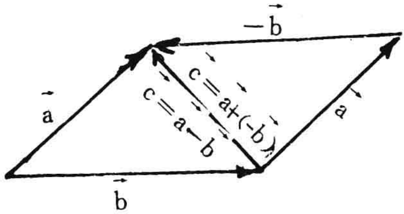


图 1—5

由图 1—5 可以看出，利用负向量概念，可以把向量的减法变成向量的加法运算. 即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

### §1.1.3　数与向量的乘积

由向量的加法知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 仍为一向量. 此和向量与 $\boldsymbol{a}$ 平行且同向，它的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 2 倍. 可记作为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$. $2\boldsymbol{a}$ 是数 2 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积.

**定义　设 $\boldsymbol{a}$ 为任意向量，$\lambda$ 为任意一实数，数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(简称数乘)，记为**

$$\lambda\boldsymbol{a} \text{ 或 } \boldsymbol{a}\lambda$$

即数乘 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量，而 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $\lambda$ 倍，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，特别，当 $\lambda=0$ 时，$0\boldsymbol{a}=0$. $\lambda=1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量时，取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1$. 因而 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是一个单位向量. 记作