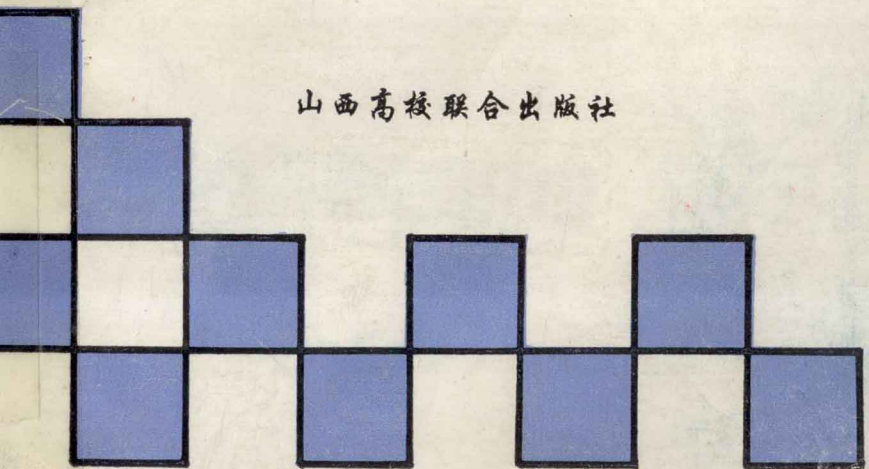


高等专科学校应用数学基础系列教材

多元函数微积分

主编 王学谦 刘明福 王晋章

山西高校联合出版社



应用数学基础系列教材

多元函数微积分

王学谦 刘明福 王晋章 主编

山西高校联合出版社

(晋)新登字 8 号

多元函数微积分

王学谦 刘明福 王晋章 主编

*

山西高校联合出版社出版发行
(邮编 030012 太原南内环街 31 号)
临汾日报社印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:11 字数:247 千字
1994 年 7 月第一版 1994 年 7 月临汾第一次印刷
印数:1—8150

*

ISBN7-81032-620-1
O·59 定价 7.50 元

《应用数学基础》系列教材

主 编 吴诗咏 励金华 周泽民

编 委 (以姓氏笔划为序)

马英田	王 京	王学谦	王贵保
王晋章	王维锦	王渝生	王道勇
刘明福	孙韞玉	张世铭	张家琦
张雅琴	励金华	吴诗咏	何根发
周泽民	查中伟	楼天容	

责任编辑 张家琦

前 言

随着我国高等专科教育的发展,国家教委对高等专科教育的培养目标、制订教学计划的原则都作了明确的规定,并对一些主要课程制订了教学基本要求。在新形势下,高等专科学校急需一套适合专科教学要求,具有专科特色的教材。为此,在电力部高教处领导下,依据国家教委关于“抓好专科教材建设”的指示精神,电力部属高校数学协作组于1993年组成《应用数学基础》系列教材编写组,开始编写工作。

《应用数学基础》系列教材由我们主编,由电力部属高校中具有多年教学经验的教师编写。包括《一元函数微积分》、《多元函数微积分》、《线性代数》、《复变函数与拉普拉斯变换》、《概率论与数理统计》等共五种,可供高等专科学校各专业使用,也可作为专科层次的高等成人教育以及函授的教学用书。

本系列教材的编写以国家教委制订的高等学校工程专科数学课程《教学基本要求》和原能源部(水利电力系统)高校数学协作组制订的专科数学《教学基本要求》为依据,依照专科学校基础理论教学中要求“以应用为目的,以必需、够用为度”和“掌握概念、强化应用”的原则,努力体现高等工程专科特色。在教材内容的选取上,除保证必要的系统外,尽量注意本课程的应用性和针对性。本教材以基础理论与基本方法为重点,注意加强学生分析问题和解决问题能力的培养。本教材总

结了编者们的多年教学经验;在语言表达方面注意精练准确、
简明易懂,使教材既便于教又便于学。

在教材编审过程中,得到了电力部属高校领导的大力支持;许多同志参加了编写提纲、样稿的讨论,并提供宝贵意见;编撰者和审稿人为《应用数学基础》系列教材付出了辛勤劳动,太原电专数学教研室的同志们为校对本书花了大量的心血,谨此一并致谢。

由于编写具有专科特色的高等学校专科教材的工作刚刚起步,加之我们水平有限,教材中难免存在不妥之处,希望使用本教材的广大读者不吝赐教。

吴诗咏	励金华	周泽民
(太原电力	(北京电力	(上海
高等专科学校)	高等专科学校)	电力学院)

一九九四年四月

编者的话

本书是根据国家教委制订的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写的。是《应用数学基础》系列教材之一。包括空间解析几何、向量代数、多元函数及其微分、重积分、曲线积分与曲面积分、场论及无穷级数等内容。总学时为70学时。带“*”号的内容供有关专业选学，但要另加学时。

本书的编写注意实践——理论——实践的原则，每部分内容由实例引出理论，然后推出性质再得出它的计算公式去解决实际中的问题。例题的选择注意各种类型的示范，解题中注意分析做题的思路与方法。这样就培养了学生认识问题的思维能力和逻辑推理能力，同时也培养了学生分析问题和解决实际问题的能力。

本书语言精炼、通俗，直观性强。便于教学和学生自学。

本书由我们任主编，励金华、吴诗咏二位教授任主审。

由于我们水平有限、时间仓促，不足之处在所难免，敬请同行提出宝贵意见。

王学谦

(太原电力高等专科学校)

刘明福

(湖北宜昌葛州坝水电工程学院)

王晋章

(广东电力专科学校)

一九九三年十二月

目 录

第一章 向量代数与空间解析几何	(1)
第一节 向量概念及向量的加减运算	(1)
§ 1.1.1 向量概念	(1)
§ 1.1.2 向量的加减运算	(2)
§ 1.1.3 数与向量的乘积	(4)
§ 1.1.4 向量在轴上的投影	(5)
习题 1—1	(7)
第二节 向量的坐标及其运算	(7)
§ 1.2.1 空间直角坐标系	(7)
§ 1.2.2 向量的坐标	(10)
§ 1.2.3 向量的模与方向余弦的坐标表示式	(11)
习题 1—2	(13)
第三节 数量积、向量积	(14)
§ 1.3.1 两向量的数量积	(14)
§ 1.3.2 两向量的向量积	(17)
习题 1—3	(21)
第四节 平面及其方程	(22)
§ 1.4.1 平面的点法式与方程	(22)
§ 1.4.2 平面方程的一般式	(24)
§ 1.4.3 点到平面的距离	(27)
§ 1.4.4 两平面的夹角	(29)
习题 1—4	(31)
第五节 空间直线及其方程	(32)
§ 1.5.1 直线的点向式方程与参数方程	(32)

§ 1.5.2	直线的一般方程	(34)
§ 1.5.3	直线与直线的位置关系	(36)
§ 1.5.4	直线与平面的位置关系	(37)
	习题 1—5	(39)
第六节 曲面与方程		(40)
§ 1.6.1	球面	(42)
§ 1.6.2	旋转曲面	(42)
§ 1.6.3	柱面	(45)
	习题 1—6	(46)
第七节 空间曲线及其方程		(47)
§ 1.7.1	空间曲线的一般方程	(47)
§ 1.7.2	空间曲线的参数方程	(48)
	习题 1—7	(50)
第八节 二次曲面		(51)
§ 1.8.1	椭球面	(51)
§ 1.8.2	双曲面	(53)
§ 1.8.3	椭圆抛物面	(54)
	习题 1—8	(54)
	复习题	(55)
第二章 多元函数微分法及其应用		(56)
第一节 多元函数的基本概念		(56)
§ 2.1.1	二元函数的定义及其几何意义	(56)
§ 2.1.2	二元函数的极限与连续	(61)
	习题 2—1	(65)
第二节 偏导数		(66)
§ 2.2.1	偏导数的概念	(66)
§ 2.2.2	偏导数的计算	(69)
§ 2.2.3	偏导数的几何意义	(71)
§ 2.2.4	高阶偏导数	(72)

习题 2—2	(74)
第三节 全微分及其应用	(75)
§ 2.3.1 全微分概念	(75)
§ 2.3.2 全微分在近似计算中的应用	(79)
习题 2—3	(80)
第四节 多元函数的求导法则	(81)
§ 2.4.1 复合函数的求导法则	(81)
§ 2.4.2 隐函数的求导法	(85)
习题 2—4	(89)
第五节 偏导数的几何应用	(90)
§ 2.5.1 空间曲线的切线与法平面	(91)
§ 2.5.2 空间曲面的切平面与法线	(93)
习题 2—5	(96)
第六节 多元函数的极值及其求法	(97)
§ 2.6.1 多元函数的极值及最大值、最小值	(97)
§ 2.6.2 条件极值	(103)
习题 2—6	(107)
复习题	(108)
第三章 重积分	(110)
第一节 二重积分的概念和性质	(110)
§ 3.1.1 二重积分概念	(110)
§ 3.1.2 二重积分的性质	(113)
第二节 二重积分的计算	(115)
§ 3.2.1 二重积分在直角坐标系中的累次积分法	(115)
§ 3.2.2 极坐标系中的面积元素	(120)
§ 3.2.3 将二重积分化为极坐标系中的累次积分	(121)
习题 3—1	(125)
第三节 三重积分概念	(126)
第四节 三重积分的计算	(128)

§ 3.4.1	三重积分在直角坐标系中的累次积分法	··· (128)
§ 3.4.2	三重积分在柱坐标系中的累次积分法	····· (132)
§ 3.4.3	三重积分在球坐标系中的累次积分法	····· (135)
习题 3—2	·····	(139)
第五节	重积分的应用	····· (140)
§ 3.5.1	平面图形的面积	····· (140)
§ 3.5.2	体积	····· (141)
§ 3.5.3	曲面的面积	····· (143)
§ 3.5.4	质量	····· (145)
§ 3.5.5	平面薄片的重心	····· (146)
习题 3—3	·····	(148)
复习题	·····	(148)
第四章	曲线积分与曲面积分	····· (150)
第一节	曲线积分	····· (150)
* § 4.1.1	第一类曲线积分的概念与性质	····· (150)
* § 4.1.2	第一类曲线积分的计算	····· (153)
§ 4.1.3	第二类曲线积分的概念及其性质	····· (155)
§ 4.1.4	第二类曲线积分的计算	····· (158)
* § 4.1.5	两类曲线积分之间的联系	····· (160)
习题 4—1	·····	(161)
第二节	格林公式 曲线积分与路径无关的条件	····· (162)
§ 4.2.1	格林公式	····· (162)
§ 4.2.2	曲线积分与路径无关的条件	····· (166)
习题 4—2	·····	(171)
* 第三节	曲面积分	····· (172)
§ 4.3.1	第一类曲面积分	····· (172)
§ 4.3.2	第二类曲面积分	····· (177)
习题 4—3	·····	(182)

· 第四节 高斯公式 斯托克斯公式	(182)
§ 4.4.1 高斯公式	(182)
§ 4.4.2 斯托克斯公式	(186)
习题 4—4	(188)
复习题	(189)
第五章 场论	(190)
第一节 场	(190)
§ 5.1.1 场的概念	(190)
§ 5.1.2 数量场的等值面	(191)
§ 5.1.3 矢量场的矢量线	(193)
§ 5.1.4 方向导数	(195)
§ 5.1.5 梯度	(198)
习题 5—1	(202)
第二节 矢量场的通量及散度	(202)
§ 5.2.1 通量	(202)
§ 5.2.2 散度	(208)
习题 5—2	(212)
第三节 矢量场的环度与旋度	(213)
§ 5.3.1 环量	(213)
§ 5.3.2 旋度	(217)
习题 5—3	(222)
复习题	(222)
第六章 无穷级数	(224)
第一节 数项级数	(224)
§ 6.1.1 无穷级数的概念和基本性质	(224)
习题 6—1(1)	(232)
§ 6.1.2 正项级数及其审敛法	(234)
习题 6—1(2)	(239)
§ 6.1.3 任意项级数及其审敛法	(241)

习题 6—1(3)	(246)
第二节 幂级数	(247)
§ 6.2.1 幂级数的概念和收敛区间	(247)
习题 6—2(1)	(261)
§ 6.2.2 函数展开为幂级数	(261)
习题 6—2(2)	(274)
§ 6.2.3 幂级数在近似计算中的应用	(275)
习题 6—2(3)	(279)
第三节 傅立叶级数	(279)
§ 6.3.1 三角级数 三角函数系的正交性	(279)
习题 6—3(1)	(283)
§ 6.3.2 以 2π 为周期的函数展开为傅立叶级数	(284)
习题 6—3(2)	(296)
§ 6.3.3 定义在有限区间上的函数展开为傅立叶级数	(296)
习题 6—3(3)	(302)
§ 6.3.4 以任意常数为周期的函数展开为傅立叶级数	(303)
习题 6—3(4)	(309)
复习题	(310)

第一章 向量代数与空间解析几何

向量在数学、物理、力学以及工程技术中都是一种重要的数学工具.

本章将先介绍向量的基本概念和向量的加法、减法、乘法等运算. 本章还将介绍空间解析几何的有关基本概念, 在坐标法的基础上, 把方程与图形联系起来, 然后以向量为工具讨论空间的平面与直线, 最后介绍几种常见的二次曲面, 这些内容都是本书后面研究多元函数所必备的知识.

第一节 向量概念及向量的加、减运算

§ 1.1.1 向量概念

物理学中常遇到的量有两类: 一类仅用数值大小表示, 如温度、时间、质量等都属此类, 这类量称为数量; 另一类量, 不仅有数值的大小而且还要表明它的方向, 例如位移、速度、加速度、力等, 这种既有数值大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**.

向量通常用有向线段 \overrightarrow{AB} 表示, 在取定单位长后, 有向线段的长度表示该向量的大小, 有向线段的方向表示该向量的方向. A 表示向量的起点, B 表示向量的终点. 为了书写方便, 向量常用黑体字母 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 等表示.

始点在原点 O , 终点在 M 的向量称为点 M 的向径, 记作 $\vec{r} = \vec{OM}$.

向量的大小称为向量的模(或称向量的长度). 例如向量 \vec{a} 、 \vec{AB} 的模分别记作 $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{AB}|$. 与向量 \vec{a} 大小相等而方向相反的向量称为向量 \vec{a} 的负向量, 记作 $-\vec{a}$.

模等于1的向量称为单位向量. 模等于0的向量称为零向量, 记作 $\vec{0}$, 零向量的方向不确定.

在实际问题中, 有些向量与其始点有关, 有些向量与其始点无关. 本书只研究与始点无关的向量, 这种向量称为自由向量(以后简称为向量). 所以, 如果两个向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的模相等, 方向相同, 就称 \vec{a} 与 \vec{b} 相等, 记作 $\vec{a} = \vec{b}$. 换句话说, 就是经过平行移动后能完全重合的向量称为相等的向量.

§ 1.1.2 向量的加、减运算

由物理实验知, 力、速度、位移都可以合成. 向量的加法就是从这些量的合成法则中抽象出来的运算.

1. 向量的加法

设有两个力 $\vec{F}_1 = \vec{OA}$ 和 $\vec{F}_2 = \vec{OB}$ 作用于 O 点, 于是此二力的合力 \vec{F} 就是以 \vec{OA} 和 \vec{OB} 与邻边的平行四边形的对角线向量 \vec{OC} (图 1-1).

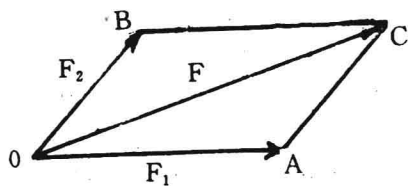


图 1-1

记作 $\vec{F} = \vec{OC} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

\vec{F} 是 \vec{F}_1 与 \vec{F}_2 的合力或称为 \vec{F}_1 与 \vec{F}_2 的和, 而 \vec{F}_1 、 \vec{F}_2 则是 \vec{F} 的两个分力.

力的合成法则(平行四边形法则)也适用于速度、位移等

物理量. 总结这些物理量所遵循的规律, 我们有如下向量的加法定义:

定义 1 设向量 a 、 b 有共同的起点 O , 以 a 、 b 为邻边作平行四边形, 则称对角线向量 $\vec{OC} = c$ 为向量 a 与 b 的和, 记为

$$c = a + b \quad (\text{见图 1-2}).$$

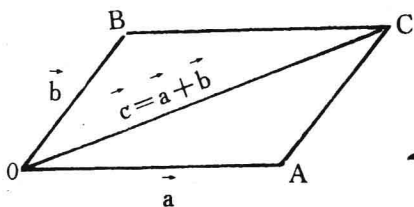


图 1-2

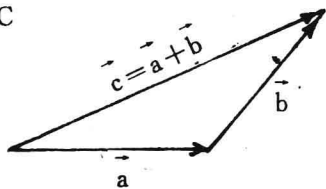


图 1-3

如图 1-2, 因 $b = \vec{AC}$, 因此可将 b 的起点置于 a 的终点上, 然后以 a 的起点为始点, 以 b 的终点为终点作向量 c (见图 1-3). 容易看出 $c = a + b$. 这种求向量的方法称为三角形法则.

容易证明, 向量的加法满足如下规律:

1) 交换律 $a + b = b + a$

2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$

2. 向量的减法 与数量的减法类似, 我们定义向量的减法为向量加法的逆运算.

定义 2 若向量 b 与 c 的和为向量 a , 则称向量 c 为向量 a 与 b 的差, 记作

$$c = a - b$$

即若 $b + c = a$, 则 $c = a - b$ (如图 1-4 所示).

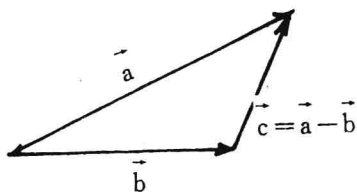


图 1-4

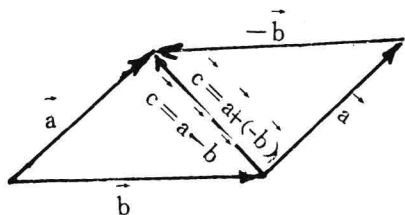


图 1-5

由图 1-5 可以看出,利用负向量概念,可以把向量的减法变成向量的加法运算.即

$$c = a - b = a + (-b)$$

§ 1.1.3 数与向量的乘积

由向量的加法知 $a + a$ 仍为一向量,此和向量与 a 平行且同向,它的模是 a 的模的 2 倍,可记作为 $a + a = 2a$. $2a$ 是数 2 与向量 a 的乘积.

定义 设 a 为任意向量, λ 为任意一实数,数 λ 与向量 a 的乘积(简称数乘),记为

$$\lambda a \text{ 或 } a \lambda$$

即数乘 λa 是与 a 平行的向量,而 λa 的模是 a 的模的 λ 倍,当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向;当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向,特别,当 $\lambda = 0$ 时, $0a = 0$. $\lambda = 1$ 时, $1a = a$; $\lambda = -1$ 时, $(-1)a = -a$.

由 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$, 当 a 为非零向量时,取 $\lambda = \frac{1}{|a|}$, 则 $\lambda a = \frac{1}{|a|} a$ 的模 $|\lambda a| = |\lambda| |a| = \frac{1}{|a|} |a| = 1$. 因而 $\frac{1}{|a|} a$ 是一个单位向量. 记作