

SERGE LANG

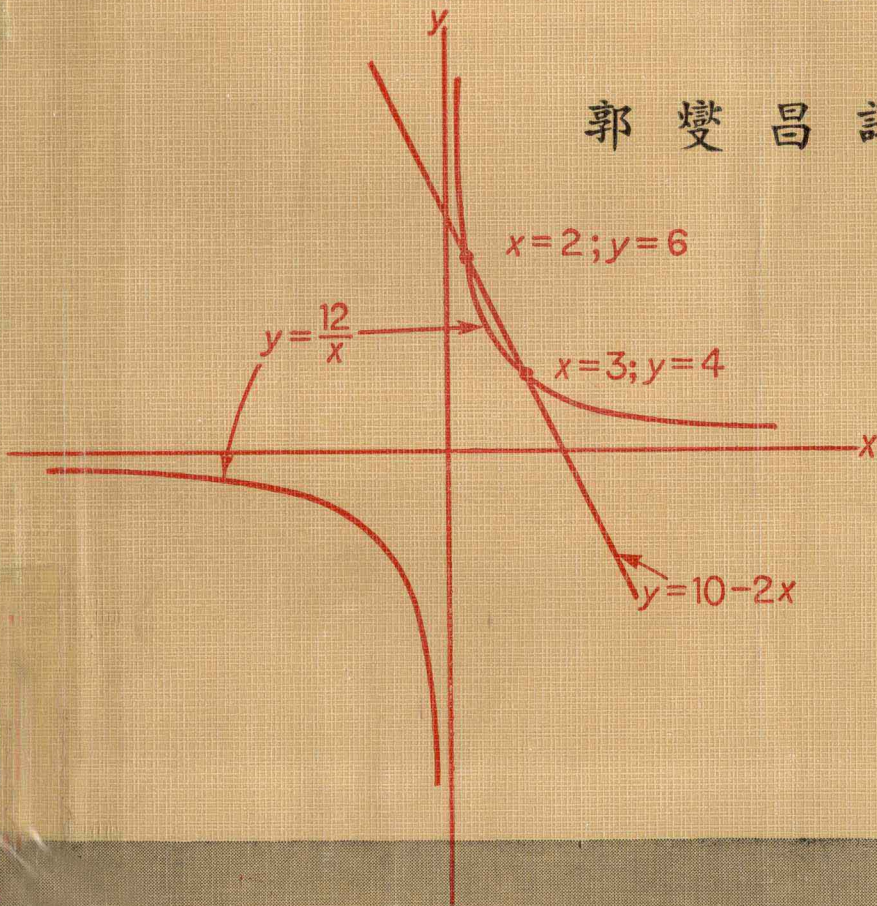
A First Course in Calculus

Second Edition

初等微積分

下 册

郭 燮 昌 譯



東 華 書 局 印 行

初等微積分

下 冊

編 譯 者 郭 燮 昌

東 華 書 局 印 行



版權所有·翻印必究

中華民國五十九年一月初版
中華民國六十八年四月三版

大學
用書 **初等微積分** (全二冊)

下冊 定價 新台幣六十元整

(外埠酌加運費滙費)

著 者 郭 燮 昌

發行人 卓 鑫 森

出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 中 臺 印 刷 廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(58035)

初等微積分

下冊目錄

第九章 積 分 法

9.1	不定積分	189
9.2	連續函數	193
9.3	面積	194
9.4	基本定理	198
9.5	上和及下和	200
9.6	基本性質	206
9.7	可積分函數	209

第十章 積分之性質

10.1	由導數求積分	212
10.2	和	214
10.3	不等式	219
10.4	廣義積分	223

第十一章 積分方法

11.1	代入法	230
11.2	部分積分法	234
11.3	三角積分	237
11.4	部分分式	242

第十二章 實例數則

12.1	$(n!)^{1/n}$ 值之估計	254
12.2	Stirling 公式	256
12.3	Wallis 乘積	257

第十三章 積分法的應用

13.1	曲線長度	259
13.2	極座標中的面積	264
13.3	旋轉體之體積	266
13.4	功	269
13.5	密度與質量	270
13.6	機率	271
13.7	力矩	275

第十四章 Taylor 公 式

14.1	Taylor 公式	283
14.2	餘式之估計	287
14.3	三角函數	292
14.4	指數函數	295
14.5	對數	296
14.6	反正切	299
14.7	二項式展開式	300

第十五章 級 數

15.1	收斂級數	307
15.2	正項級數	310
15.3	比值檢定法	313
15.4	積分檢定法	315
15.5	絕對收斂及交錯級數	319
15.6	冪級數	322
15.7	冪級數的微分與積分	326

第十六章 複 數

16.1	定義	330
------	----------	-----

16.2	極式	334
16.3	複數值函數	337

附錄 1. ϵ 與 δ

A 1.1	最小上界	A 1
A 1.2	極限	A 3
A 1.3	凝聚點	A10
A 1.4	連續函數	A12

附錄 2.	數學歸納法	A16
-------	-------	-----

附錄 3.	正弦與餘弦	A20
-------	-------	-----

附錄 4.	物理與數學	A27
-------	-------	-----

第九章

積 分 法

在本章將解出下列二問題：

(1) 已知一函數 $f(x)$ ，求一函數 $F(x)$ 使

$$F'(x) = f(x).$$

此為微分法之逆，稱為積分法。

(2) 已知一 ≥ 0 之函數 $f(x)$ ，不藉助於幾何直覺，為曲線 $y = f(x)$ 下的面積作一定義。

事實上，在本章中，所述概念即在解這兩個問題。當已知特殊數據之計算方法，留待下章中再作討論。

處理問題 (2) 時，將用到 Archimedes 觀念，即由很多個水平函數求一函數 f 的近似值，而由很多小矩形之和求 f 下之面積。

若對純理論不感興趣則稍具理論性的第 5,6 節可略去。面積的幾何解釋已足可闡明定積分，而將積分比為各小矩形面積和之極限的說法亦可滿足物理的應用。基本定理的公理化可使詳論這幾節時大為方便。

9.1 不定積分

設 $f(x)$ 為定義於一區間上之函數，若 $F(x)$ 為定義於同一區間上

之函數且

$$F'(x) = f(x)$$

則稱 F 為 f 之不定積分 (indefinite integral). 若 $G(x)$ 為 f 之另一不定積分, 則亦得 $G'(x) = f(x)$. 故差 $F-G$ 之導數為 0:

$$(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

由第五章 §4. 之定理 3 知, 必存在一數 C , 使對區間上之所有 x ,

$$F(x) = G(x) + C.$$

例 1. $\sin x$ 為 $\cos x$ 之不定積分, $\sin x + 5$ 亦為 $\cos x$ 之不定積分.

例 2. $\log x$ 為 $1/x$ 之不定積分. $\log x + 10$ 或 $\log x - \pi$ 亦為其不定積分.

下章中將述求不定積分的方法. 在此, 僅需察及只要有一個微分之公式, 則對積分也有一對應公式.

函數 f 之不定積分通常寫為

$$\int f \quad \text{或} \quad \int f(x) dx.$$

在第二種寫法中, dx 本身並無意義. $\int f(x) dx$ 整個一式才具意義.

在下章學到代入法時, 可知這種寫法的實用價值.

現利用各已知之導數, 表列一些不定積分於下:

設 n 為一整數, $n \neq -1$. 則有

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

若 $n = -1$, 則

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x.$$

(僅在區間 $x > 0$ 內,此式為真.)

在區間 $x > 0$ 內,也有

$$\int x^c dx = \frac{x^{c+1}}{c+1}$$

其中 c 為任何 $\neq -1$ 之數.

下列各不定積分,對所有 x 皆成立.

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

若 $-1 < x < 1$, 有

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x.$$

在實際應用中,通常不再說明函數定義之範圍,但在處理任一特定問題時,必須牢記此點.例如,若寫

$$\int x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} \cdot x^{2/3},$$

對所有 $x > 0$ 及 $x < 0$ 皆成立.但 0 不能在函數的任何定義區間中,故當 $x < 0$ 時,可有

$$\int x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} \cdot x^{2/3} + 5.$$

及當 $x > 0$ 時,可有

$$\int x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} \cdot x^{2/3} - 2.$$

此後皆設不定積分為定義於各區間上.故論函數 $1/x$ 時須分別考慮 $x > 0$ 及 $x < 0$ 兩種情形.當 $x > 0$ 時,前已指出 $\log x$ 為一不定積分,而 $x < 0$ 時亦可得一不定積分,事實上,若 $x < 0$.

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x).$$

當 $x < 0$ 時， $-x$ 為正，故 $\log(-x)$ 有意義，由連鎖律可證知， $\log(-x)$ 之導數等於 $1/x$ 。

若 $x < 0$ ，任何其他不定積分為

$$\log(-x) + C,$$

其中 C 為一常數。

有時，將此二種情形述為

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C.$$

由於以上所規定者，此式不具任何意義，因函數並非定義於區間上（因 0 不能屬於它）。在任何情形下，此式皆可能為誤，實際上，對 $x < 0$ 有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C_1,$$

而對 $x > 0$ 有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C_2.$$

但兩常數不必須相等，因此不能寫為

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C.$$

現特重申，規定各積分皆定義於區間上。當處理對數時，則設 $x > 0$ 。

習 題 9.1

求下列各函數之不定積分：

$$1. \sin 2x \quad 2. \cos 3x \quad 3. \frac{1}{x+1} \quad 4. \frac{1}{x+2}$$

(在最後二題中,指明求得不定積分所在之區間.)

9.2 連續函數

設 f 為一函數,若對所有使函數有意義之 x ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

則稱 f 為連續 (continuous).

當取極限值時, h 之值須使 $f(x+h)$ 有意義才可. 例如,若 f 定義於區間

$$a \leq x \leq b$$

(設 $a < b$), 若

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(a+h) = f(a),$$

則稱 f 在 a 為連續. 因若 $h < 0$, 函數在 $a+h$ 可能無意義, 所以不能取 $h < 0$.

就幾何觀點言之,若圖形沒有中斷之處,則稱函數為連續,所有可微分函數皆為連續. 前已說明此點,因若

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

有一極限,則

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0. \end{aligned}$$

下二圖爲不連續函數之圖形。

右上圖中，其函數爲

若 $x \leq 0$, $f(x) = -1$

若 $x > 0$, $f(x) = 1$.

可知對所有 $h > 0$,

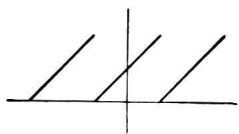
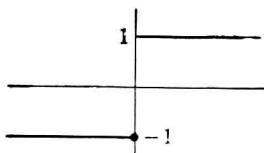
$$f(0+h) = f(h) = 1.$$

故 $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(0+h) = 1,$

不等於 $f(0)$.

右邊下圖中的情形也一樣，

其圖形有中斷處。(看第三章 §2 之例 5.)



9.3 面積

設有 $a < b$ 二數，並設 $f(x)$ 爲定義於區間 $a \leq x \leq b$ 上之連續函數。現欲求一函數 $F(x)$ ，在此區間上可微分，且

$$F'(x) = f(x).$$

在本節中，將藉助於有關面積的幾何直覺。設對區間內所有 x ， $f(x) \geq 0$ ，並定義函數 $F(x)$ 爲曲線下， a 與 x 間面積之數量。

下圖說明此事。

