SERGE LANG

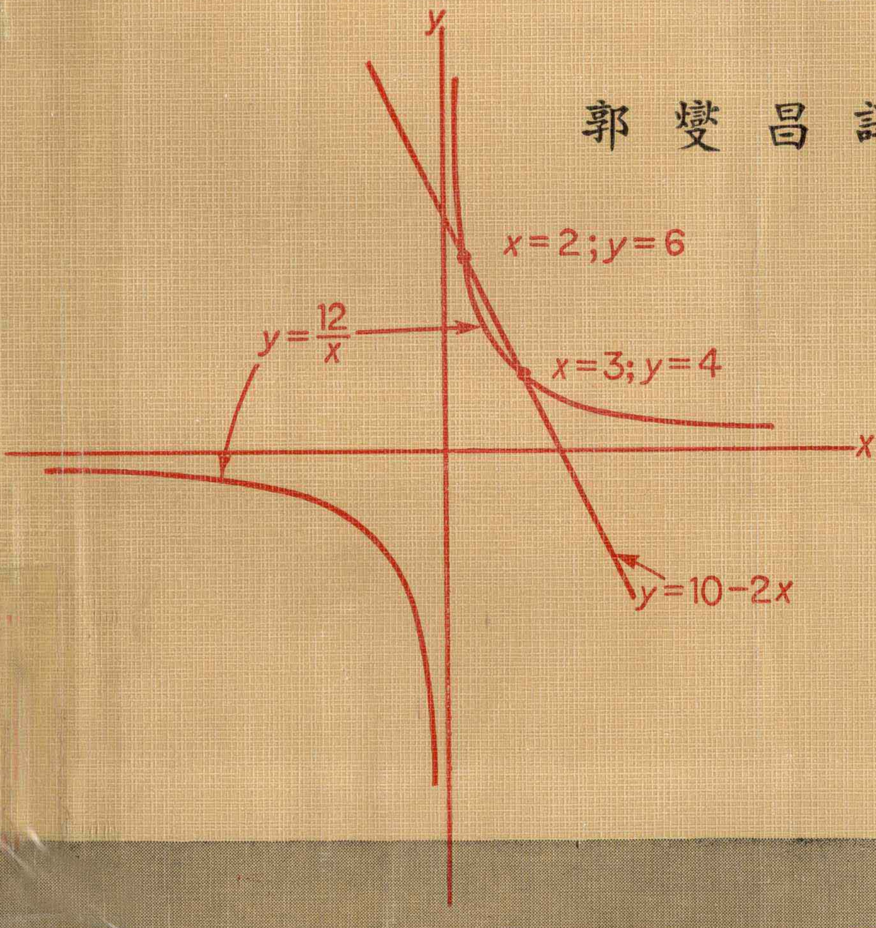
A First Course in Calculus

Second Edition

初等微積分

下 册

郭燮昌譯



東華書局印行

初等微積分

下冊

編譯者 郭燮昌

東華書局印行

中華民國五十九年一月初版
中華民國六十八年四月三版

大學用書 初等微積分（全二冊）

下冊 定價 新台幣六十元整

（外埠酌加運費滙費）

著者 郭　夔　昌
發行人 卓　鑫　淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481
印刷者 中臺印刷廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

（58035）

初 等 微 積 分

下 册 目 錄

第九章 積　分　法

第十章 積 分 之 性 質

第十一章 積 分 方 法

第十二章 實 例 數 則

第十三章 積 分 法 的 應 用

第十四章　Taylor 公　式

第十五章　級　　數

第十六章　複　　數

附錄 1. ϵ 與 δ

第九章

積　分　法

在本章將解出下列二問題:

(1) 已知一函數 $f(x)$, 求一函數 $F(x)$ 使

$$F'(x)=f(x).$$

此爲微分法之逆,稱爲積分法.

(2) 已知一 $\geqq 0$ 之函數$f(x)$,不藉助於幾何直覺,爲曲線 $y=f(x)$ 下的面積作一定義.

事實上,在本章中,所述概念即在解這兩個問題.當已知特殊數據之計算方法,留待下章中再作討論.

處理問題 (2) 時,將用到 Archimedes 觀念,即由很多個水平函數求一函數 f 的近似值,而由很多小矩形之和求 f 下之面積.

若對純理論不感興趣則稍具理論性的第 5,6 節可略去.面積的幾何解釋已足可闡明定積分,而將積分比爲各小矩形面積和之極限的説法亦可滿足物理的應用.基本定理的公理化可使詳論這幾節時大爲方便.

9.1 不定積分

設 $f(x)$ 爲定義於一區間上之函數,若 $F(x)$ 爲定義於同一區間上

之函數且

$$F'(x)=f(x)$$

則稱 F 爲 f 之**不定積分** (indefinite integral). 若 $G(x)$ 爲 f 之另一不定積分,則亦得 $G'(x)=f(x)$。 故差 $F-G$ 之導數爲 0:

$$(F-G)'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

由第五章 §4. 之定理 3 知,必存在一數 C, 使對區間上之所有 x,

$$F(x)=G(x)+C.$$

例 1. $\sin x$ 爲 $\cos x$ 之不定積分, $\sin x+5$ 亦爲 $\cos x$ 之不定積分.

例 2. $\log x$ 爲 $1/x$ 之不定積分. $\log x+10$ 或 $\log x-\pi$ 亦爲其不定積分.

下章中將述求不定積分的方法.在此,僅需察及只要有一個微分之公式,則對積分也有一對應公式.

函數 f 之不定積分通常寫爲

$$\int f \quad 或 \quad \int f(x)\,dx.$$

在第二種寫法中, dx 本身並無意義. $\int f(x)\,dx$ 整個一式才具意義. 在下章學到代入法時, 可知這種寫法的實用價值.

現利用各已知之導數,表列一些不定積分於下:

設 n 爲一整數, $n\neq-1$. 則有

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

若 $n=-1$, 則

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\log x.$$

(僅在區間 $x>0$ 內,此式爲眞.)

在區間 $x>0$ 內,也有

$$\int x^c\,dx=\frac{x^{c+1}}{c+1}$$

其中 c 爲任何 $\neq -1$ 之數.

下列各不定積分,對所有 x 皆成立.

$$\int \cos x\,dx=\sin x \qquad \int \sin x\,dx=-\cos x$$

$$\int e^x\,dx=e^x \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x$$

若 $-1<x<1$, 有

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x.$$

在實際應用中,通常不再說明函數定義之範圍,但在處理任一特定問題時,必須牢記此點.例如,若寫

$$\int x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}\cdot x^{2/3},$$

對所有 $x>0$ 及 $x<0$ 皆成立.但 0 不能在函數的任何定義區間中,故當 $x<0$ 時,可有

$$\int x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}\cdot x^{2/3}+5.$$

及當 $x>0$ 時,可有

$$\int x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}\cdot x^{2/3}-2.$$

此後皆設不定積分爲定義於各區間上.故論函數 $1/x$ 時須分別考慮 $x>0$ 及 $x<0$ 兩種情形.當 $x>0$ 時,前已指出 $\log x$ 爲一不定積分,而 $x<0$ 時亦可得一不定積分,事實上,若 $x<0$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x).$$

當 $x<0$ 時，$-x$ 爲正，故 $\log(-x)$ 有意義，由連鎖律可證知，$\log(-x)$ 之導數等於 $1/x$.

若 $x<0$，任何其他不定積分爲

$$\log(-x)+C,$$

其中 C 爲一常數.

有時,將此二種情形述爲

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C.$$

由於以上所規定者,此式不具任何意義，因函數並非定義於區間上（因 0 不能屬於它）.在任何情形下,此式皆可能爲誤,實際上,對 $x<0$ 有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C_1,$$

而對 $x>0$ 有

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C_2.$$

但兩常數不必須相等,因此不能寫爲

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x|+C.$$

現特重申,規定各積分皆定義於區間上.當處理對數時,則設$x>0$.

習　題　9.1

求下列各函數之不定積分:

1. $\sin 2x$ 2. $\cos 3x$ 3. $\frac{1}{x+1}$ 4. $\frac{1}{x+2}$

(在最後二題中,指明求得不定積分所在之區間.)

9.2 連續函數

設 f 為一函數,若對所有使函數有意義之 x,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$$

則稱 f 為**連續** (continuous).

當取極限值時, h 之值須使 $f(x+h)$ 有意義才可. 例如,若 f 定義於區間

$$a\leqq x\leqq b$$

(設 $a<b$), 若

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h)=f(a),$$

則稱 f 在 a 為連續. 因若 $h<0$, 函數在 $a+h$ 可能無意義, 所以不能取 $h<0$.

就幾何觀點言之,若圖形沒有中斷之處, 則稱函數為連續, 所有可微分函數皆為連續. 前已說明此點,因若

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

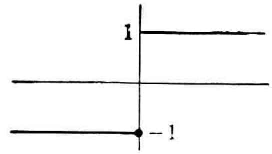
有一極限,則

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x)=\lim_{h\to 0} h\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} h\,\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

下二圖爲不連續函數之圖形.

右上圖中,其函數爲



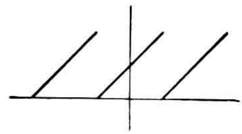
若 $x\leqq 0$, $f(x)=-1$

若 $x>0$, $f(x)=1$.

可知對所有 $h>0$,

$$f(0+h)=f(h)=1.$$

故
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h)=1,$$



不等於 $f(0)$.

右邊下圖中的情形也一樣,

其圖形有中斷處.(看第三章 §2 之例 5.)

9.3 面 積

設有 $a<b$ 二數,並設 $f(x)$ 爲定義於區間 $a\leqq x\leqq b$ 上之連續函數.現欲求一函數 $F(x)$, 在此區間上可微分,且

$$F'(x)=f(x).$$

在本節中, 將藉助於有關面積的幾何直覺. 設對區間內所有 x, $f(x)\geqq 0$, 並定義函數 $F(x)$ 爲曲線下,a 與 x 間面積之數量.

下圖說明此事.