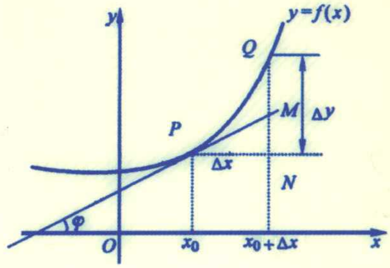
本书由北京市优秀教学团队

——数学公共基础系列课程教学团队项目支持



微积分 WEIJIFEN

典型例题与解法

DIANXING LITI YU JIEFA

尚书霞　杨芝燕　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书由北京市优秀教学团队
——数学公共基础系列课程教学团队项目支持

微积分典型例题与解法

尚书霞　杨芝燕　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是与田立平等编著的《微积分》(机械工业出版社出版)(以下简称教材)配套的学习辅导教材。本书按教材的章节顺序编排内容,与教学同步。每章包括基本要求、知识要点、典型例题、习题和同步习题解答,书末附有习题参考答案与提示。

本书的例题与习题都是微积分中的典型问题,可供使用教材的学生使用,也可供讲授微积分的教师在备课和批改作业时使用,对考研的学生复习微积分也适用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分典型例题与解法/尚书霞,杨芝燕编著.—北京:机械工业出版社,2013.3

ISBN 978-7-111-41532-9

Ⅰ.①微… Ⅱ.①尚…②杨… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第031257号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑:牛新国 责任编辑:牛新国 翟天睿
版式设计:霍永明 责任校对:张 媛
封面设计:赵颖喆 责任印制:邓 博
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2013年4月第1版第1次印刷
169mm×239mm·18印张·368千字
0 001—2 300册
标准书号:ISBN 978-7-111-41532-9
定价:39.90元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心:(010)88361066	教材网:http://www.cmpedu.com
销售一部:(010)68326294	机工官网:http://www.cmpbook.com
销售二部:(010)88379649	机工官博:http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线:(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

微积分是数学的一门基础学科，它对学生的分析问题、解决问题能力的培养，以及对后继课程的学习起着非常重要的作用。但是，学生在学习这门课程时普遍感到吃力，抓不住概念的实质，解题更感到困难，总结不出一般的思考方法。为了帮助学生进一步加深对微积分课程基本概念的理解，灵活地运用所学知识分析问题和解决问题，提高解题技能与技巧，我们编写了本书，希望对广大读者学好微积分能有所帮助。

本书是与机械工业出版社出版的《微积分》配套使用的教学参考书。根据教材的章节编写分为八章，每章设计了五个板块。

一、基本要求。列出了每章的教学基本要求，强调了各知识点不同的要求级别。

二、知识要点。对每章的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结，列出了基本概念、重要定理和公式，以加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、典型例题。从历年的本科生期末试题中精选出题目，还选编了部分方法灵活、综合性较强的例题，并进行了分析和解答。

四、习题。这一部分是为读者检查学习效果和应试能力而设计的。通过习题测试，读者可以进一步加深对所学内容的理解，提高解题能力。在本书的最后给出了习题的答案。

五、同步习题解答。对机械工业出版社出版的《微积分》课后习题全部做了详细解答。在解答中，力求推理严谨，表达流畅，通俗易懂。

本书旨在指导课程教学，帮助读者学好微积分课程，提高解题能力以及适应各类考试。在例题的选编上力争突出重点。

本书共分为八章，第一至第五章由尚书霞编写，第六至第八章由杨芝燕编写。在编写过程中得到了北京物资学院各级各部门的领导和同仁们的大力支持，特别是得到了数学教研室所有同仁的帮助，是他们给了我们很多有价值的建议，在此表示衷心的感谢！本书由北京市优秀教学团队——数学公共基础系列课程教学团队项目（项目编号：PHR200907230）和北京市教师队伍建设——教学名师支持。

由于作者水平有限，加之时间比较仓促，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心恳求读者批评指正，以便能使本书在教学实践中不断改进和完善。

作　者

2013 年 1 月

目　录

第一章　函数与极限

（一）基本要求

1. 理解集合和函数的概念，掌握函数的表示方法，掌握函数的特性（有界性、单调性、周期性、奇偶性）；

2. 了解初等函数的概念；

3. 理解数列极限和函数极限的概念，理解极限的性质（唯一性、有界性、保号性）；

4. 掌握极限的四则运算法则，会用变量代换求某些简单复合函数的极限；

5. 了解极限存在的两个准则，会应用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限，掌握求极限的基本方法；

6. 理解无穷小的概念和基本性质；掌握无穷小比较的方法，会用等价无穷小代换求极限；

7. 理解函数连续性的概念；掌握连续与极限的关系；会求函数间断点，且判别间断点的类型；

8. 了解闭区间上连续函数的性质．

（二）知识要点

1. 函数

设 D 是非空数集，若对 D 中任意数 x，按照某一确定的对应法则 f，总有唯一确定的数 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$．

2. 数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,$当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon.$

数列极限的性质：唯一性、有界性、保号性．

若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它只有一个极限．

若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它一定有界，即存在 $M>0$，对任意的 n 都有 $|x_n|\leqslant M$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0(a<0)$，则存在 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0(x_n<0)$.

3. 函数的极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

函数极限的性质:唯一性、局部有界性、局部保号性.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(A<0)$,则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$,则 $A\geqslant0(A\leqslant0)$.

4. 极限运算法则

极限的四则运算法则:在某一变化过程中,$\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$;

(3) 若 $\lim g(x)\neq0$,有 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

复合函数的极限运算法则:设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a,\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,且当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$g(x)\neq a$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

5. 两个重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,适用类型:"$\dfrac{0}{0}$"型极限;三角函数.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,适用类型:"$1^\infty$"型极限;幂指函数.

夹逼准则:若在某一变化过程中,函数 $f(x)$,$g(x)$,$h(x)$ 总有关系 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$,则 $\lim f(x)=A$.

单调有界准则:单调有界数列必有极限,即若数列 $\{x_n\}$ 是单调有界的,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在.

6. 无穷小与无穷大

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

无穷小的性质:在某一变化过程中,有限个无穷小的和仍是无穷小;有限个无穷小的乘积仍是无穷小;有界变量与无穷小量之积仍是无穷小量.

无穷小与无穷大的关系:在某一变化过程中

(1) 若 $y=f(x)$ 是无穷大量,则 $\dfrac{1}{y}$ 是无穷小量;

(2) 若 $y=f(x)(\neq0)$ 是无穷小量,则 $\dfrac{1}{y}$ 是无穷大量.

几个重要的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$e^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

在自变量的某种趋势下，若 α: α'，β: β'，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}f=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}f$，$\lim\alpha f=\lim\alpha' f$；当 $\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq 1$ 时，$\lim(\alpha-\beta)f=\lim(\alpha'-\beta')f$.

7. 函数的连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续．

利用初等函数的连续性求函数的极限是求极限的最基本的方法，即：若 $f(x)$ 是初等函数，x_0 是其定义区间内的点，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

判断函数间断点的步骤：① 考查 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处是否有定义，若无定义，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点；② 若 $f(x_0)$ 存在，再考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点；③ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，再考察 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否等于 $f(x_0)$，若不相等，则 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点．

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则：① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；② $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值（最值定理）；③ 若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$（零点定理）；④当 $f(a)\neq f(b)$ 时，对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c，必存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=c$（介值定理）.

上述三个定理常可用于：证明某些等式和不等式；判定某些方程的根的存在性和根的范围．

8. 求极限的一般方法

（1）利用极限的四则运算法则及复合函数的运算法则；

（2）利用无穷小的运算法则；利用无穷小与无穷大的关系；

（3）利用两个重要极限；

（4）利用夹逼定理，利用单调有界准则及解方程；

（5）利用等价无穷小代换；

（6）利用合并或分项、因式分解、约分、变量代换、取对数等技巧；

（7）单边极限判敛法：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

（三）典型例题

例 1　设 $f(x)=\arctan\frac{1}{1-x}$，由于（　　），所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在．

A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处不存在　　B. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 不存在　　　　　　　D. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ 都存在,但不等

解　函数在一点是否有极限与函数在一点是否有定义无关,因此 A 不正确.

当 $x\to1^-$ 时,有 $\dfrac{1}{1-x}\to+\infty$,因此 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$,因此 C 不正确.

当 $x\to1^+$ 时,有 $\dfrac{1}{1-x}\to-\infty$,因此 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$,因此应选择 D.

例 2　$x\to0$ 时,与 $\sin^2x$ 等价的无穷小量是(　　).

A. $\ln(1+x)$　　B. $\tan x$　　C. $2(1-\cos x)$　　D. e^x-1

解　**解法一**　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin^2x}=\infty$,$\ln(1+x)$ 是比 $\sin^2x$ 的低阶无穷小,排除 A.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$,$\tan x$ 是比 $\sin^2x$ 的低阶无穷小,排除 B.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$,$e^x-1$ 是比 $\sin^2x$ 的低阶无穷小,排除 D.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(1-\cos x)}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\times\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1$,因此与 $\sin^2x$ 等价的无穷小量是 C.

解法二　当 $x\to0$ 时,$\sin^2x\sim x^2$,而 $\ln(1+x)\sim x$,$\tan x\sim x$,$e^x-1\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,故 $2(1-\cos x)\sim x^2\sim\sin^2x$,因此与 $\sin^2x$ 等价的无穷小量是 C.

例 3　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}\cdots+\dfrac{n}{2^n}\right)$.

解　设 $s_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}\cdots+\dfrac{n}{2^n}$,则 $2s_n=1+1+\dfrac{3}{2^2}\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

故

$$s_n=2s_n-s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^n}$$

由于 $n<\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$,故 $0<\dfrac{n}{2^n}<\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots)$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$,因此由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$,所以原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=2$.

例 4　设 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,$x_1=10$,试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　首先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 由于 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$ 知 $x_1>x_2$,设对正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$,则有 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$,故由归纳法知,对任意自然数 n 都有 $x_n>x_{n+1}$,即数列 $\{x_n\}$ 为单调递减数列;又 $x_n>0$,即 $\{x_n\}$ 有下界,根

据极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在．

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由于$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$，从而$A=\sqrt{6+A}$，且$x_n>0$，解得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=3$.

例 5　设函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

解　因$\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\ln(a^1a^2\cdots a^n)=\ln a^{1+2+\cdots+n}=\frac{n(n+1)}{2}\ln a$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}\ln a}{n^2}=\frac{1}{2}\ln a$.

例 6　已知极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，确定$a$及$b$.

解　通分整理，得$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0$，再由于此函数是分式函数，分子分母都是多项式，且分母是一次多项式，因此分子应为常数，故有$1-a=0$和$a+b=0$，因此$a=1,b=-1$.

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

解　当$x\to0$时，有

$$\ln(\sin^2x+e^x)=\ln e^x\left(\frac{\sin^2x}{e^x}+1\right)=x+\ln\left(\frac{\sin^2x}{e^x}+1\right)$$

$$\lim_{x\to0}\ln(x^2+e^{2x})=\ln e^{2x}\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)=2x+\ln\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)$$

而$\ln\left(\frac{\sin^2x}{e^x}+1\right)\sim\frac{\sin^2x}{e^x}$，$\ln\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)\sim\frac{x^2}{e^{2x}}$，因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{\sin^2x}{e^x}+1\right)}{\ln\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}e^x=1$$

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x^2\cdot\sin\frac{2}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x^2\cdot\sin\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x^2\cdot\sin\frac{2}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\sin\frac{2}{x}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}$. 由于

$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\sin\frac{2}{x}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}$$

$$=2\ln\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}=2\ln e^{-4}=-8$$

所以原式 $=e^{-8}$.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $g(x)=\sin x$, 讨论 $f[g(x)]$ 的连续性.

解 当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时, $\sin x\geqslant 0$; 当 $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时, $\sin x<0$,所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\\ -1, & (2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi\end{cases},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

显然当 $x\in(k\pi,(k+1)\pi)(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$时, $f[g(x)]$连续; 而当 $x=k\pi$ 时,

$$\lim_{x\to 2k\pi^-}f[g(x)]=-1\neq\lim_{x\to 2k\pi^+}f[g(x)]=1$$

$$\lim_{x\to(2k+1)\pi^-}f[g(x)]=1\neq\lim_{x\to(2k+1)\pi^+}f[g(x)]=-1$$

所以 $f[g(x)]$在 $x=k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 处不连续.

例 10 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性. 若有间断点,判别其类型.

解 当 $|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}|x^{2n}|=\infty$; 当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$; 故

$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $|x|<1$ 和 $|x|>1$ 时都是连续的, 由 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=1$ 知 $x=-1$ 为可去间断点; 由 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$, 知 $x=1$ 为可去间断点.

例 11 求 $f(x)=\frac{x}{\tan x}$ 的间断点并判断类型.

解 $\tan x$ 的无定义点和零点分别为 $x=k\pi$ 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$; $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\tan x}=\infty\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi}\frac{x}{\tan x}=0(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 所以 $x=0$ 和 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点; 而 $x=k\pi,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

（四）习题

1. 确定下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

（2）$y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$

（3）$y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

（4）$y=\ln\left(\dfrac{1}{2}-\sin x\right)$

2. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成.

（1）$y=(1+\ln x)^5$

（2）$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$

（3）$y=e^{e^{-x^2}}$

（4）$y=\ln^2\arccos x^2$

3. 填空题.

（1）设 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{a}{x^2-4}\right)=b$，则 $ab=$ ________.

（2）已知 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant 1\\ |x-1|, & |x|>1\end{cases}$，则 $x=$ ________为 $f(x)$ 的第____类间断点.

（3）设 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0\\ A, & x\leqslant 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $A=$ ________.

（4）已知 $\dfrac{1}{n}\sin^2\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n^P}(n\to\infty)$，则常数 $P=$ ________.

（5）设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2\\ 0, & x=2\\ x^2-1, & x>2\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f[f(x)]=$ ________.

（6）设 $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第____类________间断点.

(7) 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)], & x>0\end{cases}$，若极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，则 $a=$ ________.

(8) 设$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)+\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$ ________.

(9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+a}{2-x}=b$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

(10) 设$f(x)=\ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$，补充定义$f(0)=$ ________可使其在$x=0$处连续.

4. 选择题.

(1) 下列函数中，(　　)不为初等函数.

A. $y=\dfrac{|x|}{x}$　　B. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

C. $y=\left[\dfrac{\sin(e^x-1)}{\ln(1+x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$　　D. $y=|x|$

(2) 下列函数中，(　　)为奇函数.

A. $y=\dfrac{|x|}{x}$　　B. $y=\dfrac{\sin x}{x}$

C. $y=x^2+\cos x$　　D. $y=f(x^2)$

(3) 函数 $y=|\sin x|$ 的周期为(　　).

A. 4π　　B. π

C. 2π　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(4) “$f(x)$在 $x=a$ 连续“是“$|f(x)|$在 $x=a$ 连续”的(　　)条件.

A. 必要非充分　　B. 充分非必要

C. 充要　　D. 既非充分又非必要

(5) 设$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，则下列结论错误的是(　　).

A. $x=1$，$x=0$，$x=-1$ 为间断点　　B. $x=0$ 为可去间断点

C. $x=-1$ 为无穷间断点　　D. $x=0$ 为跳跃间断点

(6) 函数$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x-1}}, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$，在 $x=1$ 处(　　).

A. 右连续　　B. 左、右皆不连续　　C. 左连续　　D. 连续

(7) 下列函数在定义域内不连续的是(　　).

A. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2x-1, & x<0\end{cases}$　　B. $f(x)=\dfrac{|x|}{\sin x}$

C. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$　　D. $f(x)=1+\sin x+\sin^2 x+\cdots,\quad |x|<\dfrac{\pi}{2}$

(8) 若数列$\{y_n\}$满足$|y_n-a|<\dfrac{1}{n}$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 则当$n\to\infty$时，必有(　　).

A. y_n是无穷小量　　B. y_n是无界变量

C. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$　　D. y_n是无穷大量

(9) 下列函数中，(　　)在点$x=0$补充定义可成为连续函数

A. $f(x)=\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{x}{2}$　　B. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

C. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1+x}{x^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{ax+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=-1$,则$a=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 以上都不对

(11) 若$x\to0$时,$2\sin x-\sin 2x\sim x^k$,则$k=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(12) 设$f(x)=\dfrac{\cot x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$,要使$f(x)$在$x=\dfrac{\pi}{2}$处连续,则应取$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

(13) 已知$f(x)$在$[a,b]$上连续,则(　　)一定存在.

A. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$　　B. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$　　C. $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$　　D. $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)$

5. 求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{3x-1}\sin\dfrac{1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+2x\arctan x}{2^x-\pi x}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-1}{3x^2}$　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{x}{2}}=3$，求$c$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$　　(8) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x-2}}$

6. 设$0<a_1<a_2<\cdots<a_k$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1^n}+\dfrac{1}{a_2^n}+\cdots+\dfrac{1}{a_k^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

7. 设函数$f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ b, & x=0\\ e^{\frac{a\sin 2x}{x}}, & x>0\end{cases}$,求$a,b$使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

8. 讨论函数 $y = (1+x)\arctan\dfrac{1}{1-x^2}$ 的连续性,并判断间断点的类型.

9. 证明:奇次方程 $a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 一定有实根,其中 $a_{2n+1} \neq 0$.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\cos^2(x-1)}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$,问函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续?若不连续,修改函数在 $x = 1$ 处的定义,使之连续.

11. 某人借债 a 万元,若按连续复利计算,至少经过多少年债务额要翻一番(借债年利率为5%)?

12. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\dfrac{1}{2} < x < 0 \\ 3 - e^{\sin x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 的连续性.

13. 设 $f(x) = e^x - 2$,求证:在区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 x_0,使 $f(x_0) = x_0$.

14. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1} - ax - b\right) = 0$,求 a,b.

15. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)} = A \neq 0$,求 c 及 k,使 $f(x) \sim cx^k$.

16. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,$a < x_1 < x_2 < b$,试证:一定存在介于 a,b 之间的一点 ξ,使得 $\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = (\alpha+\beta)f(\xi)$ 成立,其中 $\alpha > 0$,$\beta > 0$.

(五) 同步习题解答

习 题 1.1

1. 求函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{x}{\ln(x+2)}$ (2) $y = \arcsin\sqrt{x^2-9}$

解 (1) 函数 $y = \dfrac{x}{\ln(x+2)}$ 的定义域满足 $\ln(x+2) \neq 0$,即 $x+2>0$,且 $x+2 \neq 1$,故函数 $y = \dfrac{x}{\ln(x+2)}$ 的定义域是 $\{-2 < x < -1\} \cup \{x > -1\}$.

(2) 函数 $y = \arcsin\sqrt{x^2-9}$ 的定义域满足 $\sqrt{x^2-9} \leqslant 1$,即 $x^2 \leqslant 10$,故函数 $y = \arcsin\sqrt{x^2-9}$ 的定义域是 $\{-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant -3\} \cup \{3 \leqslant x \leqslant \sqrt{10}\}$.

2. 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$,求复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域.

解 因为 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$,故复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域满足 $\sin x$

$\in[0,1]$，故复合函数$f(\sin x)$的定义域为$x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$.

3. 下列几对函数中，函数$f(x)$与$g(x)$相同的是哪一对？

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$　　(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$　　(4) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$

解　正确答案是(3).

(1) 函数$f(x)$与$g(x)$的定义域不同，$f(x)$的定义域是$x\neq 0$，而$g(x)$的定义域是$x>0$；

(2) 函数$f(x)$与$g(x)$的对应法则不同，$f(x)=x$，而$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$；

(3) 函数$f(x)$与$g(x)$的定义域都是全体实数，且对应法则都是$|x|$，故函数$f(x)$与$g(x)$相同；

(4) 函数$f(x)$与$g(x)$的定义域不同，$f(x)=1$的定义域是全体实数，而$g(x)=\dfrac{x}{x}$的定义域是$x\neq 0$.

4. 某地电话局按如下办法收费．每月通话次数不超过30次或不通话，收费20元；若超过部分每次以0.18元计算，请列出函数的表达式．

解　设函数的表达式为$f(x)$，则

$$f(x)=\begin{cases}20, & 0\leqslant x\leqslant 30\\ 20+(x-30)\cdot 0.18, & x>30\end{cases}$$

5. 设$y=f(x)=3x^2-2x-1$，求$f(1)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f[f(x)]$.

解　$f(1)=3-2-1=0$，$f(0)=-1$，$f(a)=3a^2-2a-1$

$f(-x)=3(-x)^2-2(-x)-1=3x^2+2x-1$

$f(x+1)=3(x+1)^2-2(x+1)-1=3x^2+4x$

$f[f(x)]=3(3x^2-2x-1)^2-2(3x^2-2x-1)-1=27x^4-36x^3-12x^2+16x+4$

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0\\ 2, & x=0\\ 1+x, & 0<x\leqslant 3\end{cases}$，求函数的定义域，并求函数值$f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

解　函数的定义域$[-2,3]$.$f(-1)=(-1)^2=1$，$f(0)=2$，$f(2)=1+2=3$.

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，写出$f(x)$的定义域与值域，并求$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$和$f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.