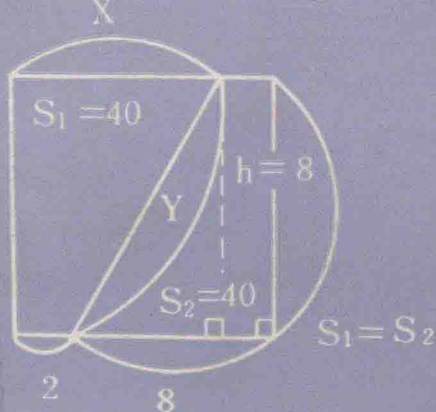
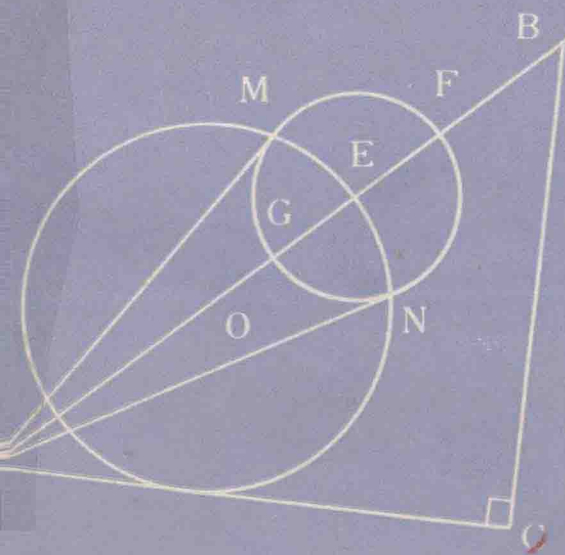


数学选择题的解法与训练



$$X_1 + X_2 = 40 + 40 = 80$$

$$10h = 80$$



$$\angle ACB = 90^\circ$$

$$AG = GB$$

数学选择题的解法与训练

贾士代

河南教育出版社

数学选择题的解法与训练

贾士代

责任编辑 侯耀宗

河南教育出版社出版

中国科学院开封印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 15印张 319千字

1989年12月第1版 1983年12月第1次印刷

印数1—5,403册

ISBN 7-5347-0525-8/G·457

定价 4.40元

前 言

随着高校招生试题的标准化改革，大量的数学选择题一涌而出。为了适应教学改革的新形势，中学师生都迫切需要一本比较全面、系统讲解数学选择题解法和训练的通俗读物。

笔者试图用教育学、心理学和教学法之观点和方法对数学选择题解法和训练作一个比较系统的总结，以适应高中毕业阶段的学习和训练。

本书第一章在“选择题的结构与分类”一节中，除重点讲解目前最盛行的单一选择题外，还涉及到多重选择题、复合选择题、最佳选择题、配偶选择题等其他类型的选择题。重点讲述了编制选择题的原则、方法，并对选择题的题型进行了探讨。第二章对选择题的解法进行了系统总结。重点介绍直接法、淘汰法、验证法、图示法，因为这是解选择题的金钥匙。对每一种解法的原理、作用进行了清晰的分析。章末，用富有启发性的新颖例题阐明了如

何进行一题多解。

后面几章用较大的篇幅按代数、三角、立体几何、解析几何的顺序分专题总结了高中数学选择题的常见题型。对目前流行的几千道选择题进行了认真的筛选。

因水平所限，加之选择题的研究仅仅是开始，所以书中难免有这样或那样的缺点和错误，敬请广大读者提出批评和建议，使选择题之研究日臻完善。

最后，笔者对在编著过程中，参考的所有论文的作者一并表示衷心的感谢。

编 者

1988年8月

目 录

第一章 选择题的编制	(1)
第一节 选择题的结构与分类.....	(1)
第二节 选择题的编制原则.....	(10)
第三节 选择题的编拟方法.....	(22)
第二章 选择题的解法	(76)
第一节 直接法.....	(76)
第二节 淘汰法.....	(88)
第三节 验证法.....	(112)
第四节 图示法.....	(120)
第五节 一题多解.....	(128)
第三章 高中代数选择题例解及训练	(137)
第一节 实数.....	(137)
第二节 方程与方程组.....	(150)
第三节 集合映射和充要条件.....	(165)
第四节 函数.....	(178)
第五节 不等式与最值.....	(198)
第六节 复数.....	(213)
第七节 排列组合、二项式定理、数学归纳法.....	(227)
第八节 数列与极限.....	(239)
第四章 平面三角选择题例解及训练	(255)

第一节	同角关系式和诱导公式	(255)
第二节	三角函数的图象	(267)
第三节	加法定理	(279)
第四节	反三角函数	(293)
第五节	三角方程	(307)
第六节	解三角形	(315)
第七节	三角不等式与最值	(330)
第五章	立体几何选择题例解及训练	(344)
第一节	直线与平面	(344)
第二节	多面体	(365)
第三节	旋转体	(381)
第六章	解析几何选择题例解及训练	(395)
第一节	直线	(395)
第二节	圆	(412)
第三节	圆锥曲线	(421)
第四节	参数方程	(445)
第五节	极坐标	(460)

第一章 选择题的编制

要想熟练掌握解决某类问题的方法，那么我们就应该首先了解这类问题的产生及内部结构。

第一节 选择题的结构与分类

一、选择题的结构

我们先仔细观察两道选择题：

例1 本题给出(A)、(B)、(C)、(D)四个答案，有且只有一个是正确的，把正确的代号填在题中的圆括号内。

若集合 $M = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right\}$ ， $N = \{ (x, y) \mid y = x + b \}$ ，且 $M \cap N \neq \emptyset$ ，则 b 的取值范围为()。

(A) $|b| \leq 3\sqrt{2}$ ； (B) $-3 \leq b \leq 3\sqrt{2}$ ；

(C) $0 < b \leq 3\sqrt{2}$ ； (D) $-3 < b \leq 3\sqrt{2}$ 。

例2 下列选择题的五个答案中至少有一个是正确的，把正确答案的代号全部选出来，填在题中的圆括号内。

两个复数 $Z_1 = a_1 + b_1 i$ ， $Z_2 = a_2 + b_2 i$ ($Z_1 \cdot Z_2 \neq 0$ ， a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 都是实数， λ 为非零实数) 对应的向量互相垂直的充要条件为()。

$$(A) \quad \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = -1; \quad (B) \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0;$$

$$(C) \quad Z_1 = i Z_2; \quad (D) \quad Z_2 = i Z_1;$$

$$(E) \quad Z_1 = \lambda i Z_2.$$

与主观题相比较，容易发现，选择题有自己独特的结构，可划为四部分：

1. 每一个选择题都有一句明确的指令性语言（“有且只有一个是正确的”，或“至少有一个是正确的”等），它是选择题的大前提，是主观题所没有的。

2. 每一个选择题都有一个问句（或半截问句），指明题设条件和要考查的内容。我们把这部分叫选择题的题干。

3. 每一个选择题都提供几个可能的答案。我们把这部分叫题支，或叫选择支。正确答案的选择支叫做真支，反之，叫做假支。这是选择题独有的。

4. 每一个选择题都有一个括号，供填写正确答案的代号。因此，我们把选择题又叫选择填空题。

二、选择题的分类

1. 从大前提划分

(1) 单一选择题

大前提是有且只有一个选择支是正确的（或错误的）选择题叫做单一选择题。目前，我国各类考试中最盛行的就是这类选择题。

只有单一选择题，才能把大前提省去，不提“其中只有一个答案是正确的（或错误的），”

例3 集合 $S = \{ z^2 \mid \arg z = \alpha, \alpha \text{ 为常数} \}$ 在复平面的图形如何?

- (A) 射线 $\arg z = 2\alpha$; (B) 射线 $\arg z = -2\alpha$;
(C) 射线 $\arg z = -\alpha$; (D) 以上答案都不对.

[答]()

这是一道单一选择题, 其真支为(D). 这里, (A)、(B)、(C)都是假支. 满足已知条件的图形是射线 $\arg z = \arg e^{i(-2\alpha)}$, 隐蔽于(D)内.

(2) 多重选择题

大前提是至少有一个选择支是正确的(或错误的)选择题叫做多重选择题.

例如, 下列选择题中的五个答案至少有一个是正确的, 把正确答案的代号全部选出来, 填在题中的圆括号内.

例4 下列极坐标方程中, 表示圆锥曲线的是().

(A) $\rho = \frac{3}{2\cos\theta - 5\sin\theta}$; (B) $\rho^2 \cos 2\theta = 16$;

(C) $\rho^2 \sin 2\theta = 2$; (D) $\rho = \frac{1}{1 + \sin\theta - \cos\theta}$;

(E) $\rho \cos^2 \theta = 2 \sin \theta$.

例5 已知平面 α 及平面 α 外的直线 l , 下面说法正确的是().

- (A) 若直线 l 垂直于平面 α 内的两条直线, 则 $l \perp \alpha$;
(B) 若直线 l 垂直于平面 α 内的两条相交直线, 则 $l \perp \alpha$;
(C) 若直线 l 垂直于平面 α 内的所有直线, 则 $l \perp \alpha$;
(D) 若直线 l 垂直于平面 α 内的无数多条直线, 则 $l \perp \alpha$;
(E) 若直线 l 垂直于平面 α 内的任意直线, 则 $l \perp \alpha$.

容易断定, 例4中的四支(B)、(C)、(D)、(E)都是正确的, 例5中的三支(B)、(C)、(E)都是正确的.

在多重选择题中, 真支的个数叫重数. 例4是四重选择题, 例5是三重选择题.

(3) 复合选择题

把符合题设条件的正确结论的某些属性作为真支的选择题叫复合选择题. 一般地说, 复合选择题至少有一个真支.

例6 若直线 $y=mx+b$ 与直线 $x-y+3=0$ 垂直, 且与椭圆 $16x^2+5y^2=80$ 相切, 则

(1) m 满足:

(A) $m \leq 0$; (B) $|m| \in \{5, 6, 8\}$;

(C) $|m| \in \{4, 5, 6, 7\}$; (D) $|m| \in \{2, 3, 6, 7\}$;

(E) $|m| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

(2) b 满足:

(A) $b=0$; (B) $|b| \in \{4, 8\}$;

(C) $|b| \in \{4, 5, 6, 7\}$; (D) $|b| \in \{2, 3, 6, 7\}$;

(E) $|b| \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

解: (1) $\because (-m) \times 1 + 1 \times (-2) = 0$, $\therefore m = -2$.

故(A)、(D)真.

(2) 把 $y = -2x + b$ 代入 $16x^2 + 5y^2 = 80$ 中, 化简得
 $36x^2 - 20bx + 5(b^2 - 16) = 0$,

$$\therefore \Delta = (20b)^2 - 20 \times 36 \times (b^2 - 16) = 0,$$

$$\therefore b = \pm 6.$$

故(C)、(D)真.

例7 设 $s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \cdots + (-1)^{n-1}$

$$\frac{1}{n(n+2)}.$$

且 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, 则().

(A) l 为有理数; (B) $l < \frac{1}{3}$;

(C) $l > \frac{5}{24}$; (D) $l < \frac{11}{40}$;

(E) $l > \frac{7}{30}$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \because s_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} - \frac{1}{24} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \right] \quad (n \geq 2), \end{aligned}$$

$$\therefore l = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4}.$$

故(A)、(B)、(C)、(D)、(E)都真.

(4) 最佳选择题

在多重选择题中, 不仅要求挑选所有的真支, 而且要求注明最贴切题设条件的真支的选择题叫最佳选择题.

例8 下列四个答案中, 把符合条件的答案的代号 填在题中的圆括号内, 并用星号 * 注明最佳答案.

在实数范围内, 判别式大于零, 即 $b^2 - 4ac > 0$ 是二次方程

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个不相等的实根的()条件.

- (A) 充分; (B) 必要;
(C) 充分必要; (D) 既不充分又不必要.

这里, (A)、(B)、(C)都是真支, 而(C)是最佳真支.

2. 从题干和题支的多寡划分

(1) 发散型选择题

由一条题干和众多题支组成的选择题叫发散型选择题. 这种选择题的特点是“一对多”, 思维成发散式. 目前, 它是最常见的选择题.

例9 $\lg(\cos x - 1)^2$ 与下列哪一个相等?

- (A) $[\lg(\cos x - 1)]^2$; (B) $2\lg(\cos x - 1)$;
(C) $2\cos(\lg x)$; (D) $4\lg|\sin\frac{x}{2}| + 2\lg 2$.

[答] ()

本题是“一干四支”, 故属于发散型.

(2) 收敛型选择题

由两条或两条以上的题干构成的选择题叫收敛型选择题. 这类选择题的特点是, 几条题干对应一组选择支, 几条题干的答案都必须在这一组选择支中挑选, 思维成收敛式. 它的实质是有共用的一组备选答案的几个选择题的组合.

例10 在正棱锥 $P-ABC$ 中, 若底面三角形的边 $AB = \sqrt{3}a$, 侧棱 $PC=2a$, 则

- (1) PC 与 BC 所成角为();
(2) PC 与底面所成角为();
(3) PC 与 AB 所成角为();
(4) 侧面 PAB 与底面所成角为(),

$$(A) \frac{\pi}{2} ; \quad (B) \arccos \frac{\sqrt{3}}{4} .$$

$$(C) \frac{\pi}{3} ; \quad (D) \frac{\pi}{6} ;$$

$$(E) \arctg 2\sqrt{3} .$$

该题实际上是四个不同的选择题，它们的答案是：

(1) (B); (2) (C); (3) (A); (4) (E).

(3) 配偶选择题

由 n 个不同的题干与 n 个不同的题支构成，且题干与题支是一一对应关系，这样的选择题称作配偶选择题。

例11 将方程 $f(x, y) = 0$ 的曲线

(1) 沿 x 轴向右平移一个单位，再沿 y 轴向上平移二个单位，所得曲线的方程为()；

(2) 沿 x 轴向右平移一个单位，再沿 y 轴向下平移二个单位，所得曲线的方程是()；

(3) 沿 x 轴向左平移一个单位，再沿 y 轴向上平移二个单位，所得曲线的方程是()；

(4) 沿 x 轴向左平移一个单位，再沿 y 轴向下平移二个单位，所得曲线的方程是()。

$$(A) f(x+1, y+2) = 0 ;$$

$$(B) f(x+1, y-2) = 0 ;$$

$$(C) f(x-1, y+2) = 0 ;$$

$$(D) f(x-1, y-2) = 0 .$$

该题就是一道配偶选择题，它的“四干”与“四支”一一对应。不难得到正确答案是：(1) (D); (2) (C); (3) (B); (4) (A)。

例12 已知极坐标系的曲线(1)~(6)(图1—1)

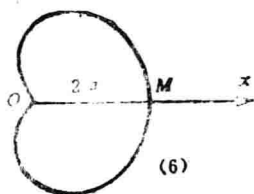
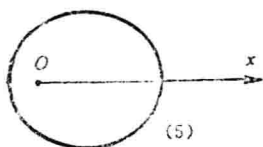
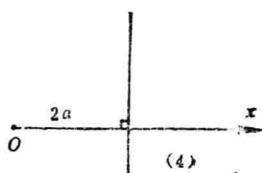
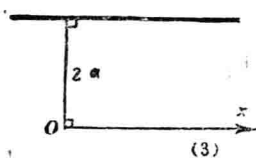
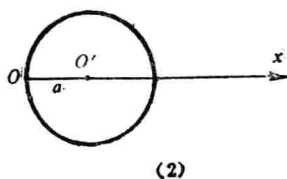
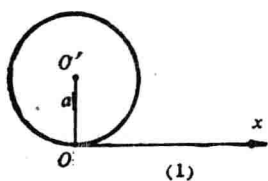


图1—1

和方程

- (A) $\rho = 2a \sin \theta$; (B) $\rho \cos \theta = 2a$;
 (C) $2\rho \cos \theta = 3(\rho - 1)$; (D) $\rho = 2a \cos \theta$;
 (E) $\rho \sin \theta = 2a$; (F) $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$.

试把它们的对应关系填在下表内:

曲线代号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
方程代号						

这是一道考查极坐标系中曲线与方程关系的配偶选择题。

配偶选择题从多对因果对应关系入手,制造纷乱,其目的是考查认识的深刻性和记忆知识的准确性。这需要深入思考,仔细推敲,细微区别,寻找合适的搭配关系。这里,乔太守乱点鸳鸯谱的作法是不可取的。

3. 从答案的属性划分

(1) 定性型选择题

题目的答案是反映该题条件中数学元素的性质或之间性质关系的选择題叫做定性型选择题。

例13 若集合 P 与 Q 的关系是 $P \not\subset Q$,则下列结论中正确的一个是()。

- (A) $P \supset Q$; (B) $P \cap Q = \emptyset$;
 (C) $P \cap Q \neq \emptyset$; (D) $P \cap Q \neq P$.

例14 函数 $y = \sin x (x \in R)$ 与函数 $y = \arcsin x (x \in [-1, 1])$ 都是()。

- (A) 增函数; (B) 周期函数;

(C) 奇函数; (D) 减函数。

例13中的答案反映了已知集合之间的关系; 例14中的答案反映了已知两个函数的共性, 它们都属定性型选择题。

(2) 定量型选择题

题目的答案是元素的数值或元素之间数量关系的选择题叫做定量型选择题。

例15 数字 $N=2^{12} \times 5^8$ 的位数是()。

(A) 9; (B) 10;

(C) 11; (D) 12;

(E) 20。

例16 已知锐角三角形的边长分别是 2、3、 x , 则 x 的取值范围是()。

(A) $1 < x < 5$; (B) $\sqrt{5} < x < \sqrt{13}$;

(C) $\sqrt{13} < x < 5$; (D) $1 < x < \sqrt{5}$ 。

以上两例都是定量型选择题。

第二节 选择题的编制原则

选择题是一种较好的题型, 但是要真正得到一道好的选择题, 确实是件不太容易的事。我们现在来研究选择题的命题原则。

编制设计选择题的 8 个原则如下:

1. 目的性

所谓目的性是指命题的目标要集中, 侧重点要突出。

例1 三个数 a 、 b 、 c 不全为零的充要条件是()。